Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Абдельмула, А. Баклути, Д. Лахьяни, L^p – L^q аналог теоремы Миячи для нильпотентных групп Ли и проблема точности, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 1, 3–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10271>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 12:44:27

L^p – L^q аналог теоремы Миячи для нильпотентных групп Ли и проблема точности

Ф. Абдельмула, А. Баклути, Д. Лахьяни

Формулируется и доказывается L^p – L^q аналог теоремы Миячи для связных нильпотентных групп Ли с некомпактным центром при $2 \leq p, q \leq +\infty$. Это позволило установить точность границ для принципов неопределенности Харди и Коулинга–Прайса. Показано, что эти принципы неопределенности не выполняются для групп G с компактным центром. Результаты являются продолжением результатов из работы [1], в которой дополнительно предполагалось, что G односвязна, $p = 2$ и $q = +\infty$. В более общем случае, когда G экспоненциально разрешима, этот принцип также выполняется, если центр G не тривиален. В доказательствах важную роль играют теория представлений и локализованная формула Планшереля.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm10271

1. Введение

Один из способов строгой формализации принципа неопределенности в классическом анализе Фурье на $\mathbb{R}$ – изучить, при каких условиях функция f и ее преобразование Фурье $\hat{f}$, задаваемое формулой

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i xy} dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

не могут одновременно произвольно быстро убывать в смысле Гаусса, если f не тождественно равна нулю. Эта задача широко изучалась во многих ситуациях. Например, для вещественной прямой Харди (см. [2]) доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть a, b и C – положительные вещественные числа, и предположим, что f – измеримая функция на $\mathbb{R}$, для которой

i) $|f(x)| \leq C e^{-a\pi x^2}$ для всех $x \in \mathbb{R}$,

ii) $|\hat{f}(\xi)| \leq C e^{-b\pi \xi^2}$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$.

Если $ab > 1$, то $f = 0$ почти везде. Если $ab < 1$, существует бесконечно много линейно независимых функций, удовлетворяющих i) и ii), и если $ab = 1$, то $f(x) = k e^{-a\pi x^2}$ для некоторой константы k .

Работа выполнена при поддержке гранта DGRSRT Исследовательской лаборатории LR 11ES52.

С тех пор было опубликовано несколько обобщений теоремы Харди, среди них самым важным для нас был результат Коулинга–Прайса (см. [3]), который подтверждает, что измеримая функция и ее преобразование Фурье не могут одновременно очень быстро убывать, и состоит в замене поточечных гауссовых границ для f гауссовыми границами в смысле L^p , а для $\widehat{f}$ – гауссовыми границами в смысле L^q .

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $1 \leq p, q \leq +\infty$ и $\min(p, q) < +\infty$, пусть $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ и пусть функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ измерима на $\mathbb{R}$ и для нее

$$\text{i)} \int_{\mathbb{R}} e^{pa\pi x^2} |f(x)|^p dx < +\infty,$$

$$\text{ii)} \int_{\mathbb{R}} e^{qb\pi \xi^2} |\widehat{f}(\xi)|^q d\xi < +\infty.$$

Если $ab \geq 1$, то $f = 0$ почти везде. Если $ab < 1$, существует бесконечно много линейно независимых функций, удовлетворяющих условиям i) и ii).

Заметим, что случай $p = q = +\infty$ и $ab > 1$ рассматривается в теореме Харди. Одним из ее расширений является теорема Миячи, которая обобщает теоремы Харди и Коулинга–Прайса (ср. [1]).

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть f – интегрируемая функция на $\mathbb{R}$, для которой

$$e^{a\pi|\cdot|^2} f \in L^1(\mathbb{R}) + L^\infty(\mathbb{R})$$

при некотором положительном вещественном a . Далее предположим, что

$$\int_{\mathbb{R}} \log^+ \left(\frac{e^{b\pi|\xi|^2} |\widehat{f}(\xi)|}{c} \right) d\xi < +\infty$$

для некоторых положительных чисел b и c . Если $ab = 1$, то $f(x) = Ae^{-a\pi x^2}$, где $x \in \mathbb{R}$ и A – некоторая положительная константа.

Следующее утверждение немедленно следует из теоремы 1.3.

СЛЕДСТВИЕ 1.4 (ср. [4] и [1]). Пусть f – интегрируемая функция на $\mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq +\infty$ и $e^{a\pi|\cdot|^2} f \in L^p(\mathbb{R}) + L^q(\mathbb{R})$ для некоторого положительного a . Предположим далее, что

$$\int_{\mathbb{R}} e^{b\pi|\xi|^2} |\widehat{f}(\xi)| \log^+ \left(\frac{e^{b\pi|\xi|^2} |\widehat{f}(\xi)|}{c} \right) d\xi < +\infty$$

для некоторых положительных чисел b и c . Если $ab = 1$, то $f(x) = Ae^{-a\pi x^2}$, где $x \in \mathbb{R}$ и A – положительная константа. Если $ab < 1$, существует бесконечно много линейно независимых функций, удовлетворяющих условиям теоремы. В остальных случаях ($ab > 1$) f обращается в нуль почти везде на $\mathbb{R}$.

За последние десять лет было сделано много попыток доказать теоремы, аналогичные теоремам Харди и Коулинга–Прайса, для различных групп Ли. Кануйт и Кумар доказали теорему Харди для односвязных нильпотентных групп Ли (см. [5]). Недавно Баклутти и Кануйт (см. [6]) опустили условие односвязности группы G и получили аналог теоремы Харди для групп G с некомпактным центром; обозначим его $Z(G)$. В этом случае $Z(G)$ содержит замкнутую подгруппу вида $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d$,

где $\mathbb{T}^d = G^c$ – максимальная компактная подгруппа G . Выберем сечение Бореля Y пространства классов смежности $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d$ в G . Тогда каждый элемент G можно единственным образом представить в виде тройки (t, z, y) , $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{T}^d$ и $y \in Y$. Был получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть G – связная нильпотентная группа Ли с некомпактным центром, Y – борелево сечение пространства классов смежности $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d$ в G , a, b, c – некоторые положительные целые числа. Предположим, что $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ – измеримая функция, для которой

$$\text{i) } |f(t, z, y)| \leq C e^{-a\pi t^2} \varphi(y), \varphi \in L^1(Y) \cap L^2(Y) \text{ и для всех } (t, z, y) \in G,$$

$$\text{ii) } \|\pi_\xi(f)\|_{H.S} \leq C e^{-b\pi \|\xi\|^2} \text{ для всех } \xi \in \mathcal{X},$$

$\mathcal{X}$ – подходящее сечение орбит коприсоединенного действия общего положения в $\mathfrak{g}^*$. Тогда $f = 0$ почти везде на G , если $ab > 1$. В частности, условие i) удовлетворяется, если $|f(x)| \leq D e^{-a\pi \|x\|^2}$ для всех $x \in G$ и некоторого $D > 0$.

Точные определения норм $x \mapsto \|x\|$ на G и $\xi \mapsto \|\xi\|$ на $\mathfrak{g}^*$ и сечения $\mathcal{X}$ мы дадим позже.

Одна из целей данной работы – сформулировать и доказать L^p – L^q аналог теоремы Миячи для случая связных нильпотентных групп Ли с некомпактным центром при $2 \leq p, q \leq +\infty$. Это также даст нам возможность проверить точность оценок, использованных в теоремах Харди и Коулинга–Прайса. Как следствие мы получим, что константа 1 в теореме Харди для нильпотентной группы Ли (ср. с теоремой 3.4 ниже) является точной оценкой, если второе условие убывания заменить на

$$|Pf(\xi)|^{1/2} \|\pi_\xi(f)\|_{H.S} \leq c e^{-b\pi \|\xi\|^2}, \quad \xi \in \mathcal{X}.$$

В случае теоремы Коулинга–Прайса (ср. с теоремой 3.5 ниже) любая функция, которая удовлетворяет двум условиям теоремы (3.2) из [7], обращается в нуль почти везде при $ab \geq 1$, если $\min(p, q) < +\infty$ и второе условие убывания заменено на

$$\int_{\mathcal{X}} e^{qb\pi \|\xi\|^2} \|\pi_\xi(f)\|_{H.S}^q |Pf(\xi)|^{q/2} d\xi < +\infty.$$

Эти результаты немедленно следуют из варианта теоремы Миячи для $p = 2, q = +\infty$, который мы докажем в этой статье. Из-за неодносвязности рассматриваемых групп нам придется справиться с множеством технических деталей, в частности, придумать, как построить подходящее сечение коприсоединенных орбит общего положения, на котором сосредоточен интеграл, выражающий второе условие, и как обращаться с дискретными компонентами формулы Планшереля. Если группа G компактна, этот вариант теоремы Миячи не выполняется, как показывает множество примеров.

2. Предварительные сведения

2.1. Нормы на нильпотентных группах Ли. Пусть G – связная нильпотентная группа Ли, $\tilde{G}$ – ее односвязная накрывающая группа, и Γ – дискретная нормальная подгруппа $\tilde{G}$, для которой $G \simeq \tilde{G}/\Gamma$. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли групп G и $\tilde{G}$, и обозначим $\exp_G: \mathfrak{g} \rightarrow G$ и $\exp_{\tilde{G}}: \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{G}$ экспоненциальные отображения групп

G и $\tilde{G}$ соответственно. Пусть $\log$ – обратное отображение к $\exp_{\tilde{G}}$, и обозначим $\Lambda = \log \Gamma$; она является аддитивной подгруппой центра $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$.

Пусть

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g} \quad (2.1)$$

– последовательность Жордана–Гёльдера нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, проходящая через $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, т.е. флаг идеалов $\mathfrak{g}$, для которого $\dim \mathfrak{g}_i = i$, $i = 0, \dots, n$, и $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_r$ для некоторого $r \in \{1, \dots, n\}$. Извлечем из (2.1) базис Жордана–Гёльдера

$$\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_n\}, \quad (2.2)$$

для этого возьмем $X_i \in \mathfrak{g}_i \setminus \mathfrak{g}_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$, для которых $\Lambda = \bigoplus_{i=1}^d \mathbb{Z}X_i$, $d \leq r$. Тогда очевидно, что $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}X_1$ является центральным идеалом в $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathcal{B}^* = \{X_1^*, \dots, X_n^*\}$ – базис в $\mathfrak{g}^*$, двойственный к базису $\{X_1, \dots, X_n\}$; это базис Жордана–Гёльдера для коприсоединенного действия G на $\mathfrak{g}^*$. Для $X = \sum_{j=1}^{j=n} x_j X_j \in \mathfrak{g}$ с $x_j \in \mathbb{R}$ пусть $\|X\| = (\sum_{j=1}^{j=n} x_j^2)^{1/2}$ является евклидовой нормой X в этом базисе. Введем функцию нормы на G , положив

$$\|x\| = \inf\{\|X\| : X \in \mathfrak{g}, \exp_G X = x\}.$$

Композиция отображений

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{G}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^{j=n} x_j X_j \mapsto \sum_{j=1}^{j=n} \exp_{\tilde{G}}(x_j X_j)$$

является диффеоморфизмом. В частности, она переводит меру Лебега на $\mathbb{R}^n$ в меру Хаара на $\tilde{G}$. Также отождествим $\mathfrak{g}^*$ с $\mathbb{R}^n$ с помощью отображения

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \sum_{j=1}^{j=n} \xi_j X_j^*$$

и введем на $\mathfrak{g}^*$ евклидову норму относительно базиса $\{X_1^*, \dots, X_n^*\}$, т.е. положим

$$\left\| \sum_{j=1}^n \xi_j X_j^* \right\| = \left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2 \right)^{1/2}.$$

2.2. Формула Планшереля. Пусть $\ell \in \mathfrak{g}^*$. Индекс $i \in \{1, \dots, n\}$ называется *индексом подскока* для ℓ , если $\mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{g}_i \neq \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{g}_{i-1}$. Пусть $e(\ell)$ – множество индексов подскока для ℓ . Это множество содержит ровно $\dim(\tilde{G} \cdot \ell)$ индексов, и это число обязательно четно. Более того, существуют два непересекающихся множества индексов S, T с $S \cup T = \{1, \dots, n\}$ и G -инвариантное непустое открытое по Зарискому множество $\mathcal{U}$ в $\mathfrak{g}^*$, для которых $e(\ell) = S$ для всех $\ell \in \mathcal{U}$. Пусть $Pf(\ell)$ обозначает пфаффиан кососимметричной матрицы

$$M_S(\ell) = (\ell([X_i, X_j]))_{i,j \in S}.$$

Тогда имеем $|Pf(\ell)|^2 = \det M_S(\ell)$. Далее, пусть $T = \{1, \dots, n\} \setminus S$ и $V_T = \mathbb{R} - \text{span}\{X_i^* : i \in T\}$. Тогда $\mathcal{W} = \mathcal{U} \cap V_T$ является сечением орбит общего положения

и $\mathscr{W}$ является носителем меры Планшереля на $\tilde{G}$. Положим $\mathfrak{g}_\Gamma^* = \{\ell \in \mathfrak{g}^* : \ell(\Lambda) \subseteq \mathbb{Z}\}$ и $\mathfrak{h} = \mathbb{R} - \text{span}(\Lambda)$. Ясно, что $\mathfrak{g}_\Gamma^*$ – аддитивная подгруппа группы $\mathfrak{g}^*$, содержащая $\mathfrak{h}^\perp$. Отсюда имеем $\mathfrak{g}_\Gamma^* = \mathbb{Z} - \text{span}\{X_1^*, \dots, X_d^*\} + \mathfrak{h}^\perp$. Тогда очевидно, что $\{1, \dots, d\} \subseteq T$ и что $\mathbb{R} - \text{span}\{X_1^*, \dots, X_d^*\} \subseteq V_T$. Пусть $V'_T = \mathbb{R} - \text{span}\{X_i^* : i \in T, i > d\}$ и

$$\mathscr{X} = (\mathfrak{g}_\Gamma^* \cap \mathscr{W}) \setminus V'_T.$$

Если $f \in L^1(G)$, обозначим $f_1 = f \circ p$, где $p: \tilde{G} \rightarrow G$ – очевидная проекция. Тогда $f_1 \circ \exp$ постоянна на Λ -классах смежности. Действительно, если $Z \in \Lambda$ и $X \in \mathfrak{g}$, то

$$f_1(\exp(X + Z)) = f_1(\exp X \cdot \exp Z) = f_1(\exp X),$$

так как Z центральный. Таким образом, $f_1 \circ \exp$ определяет функцию на $\mathfrak{g}/\Lambda$. Пусть dX – евклидова мера на $\mathfrak{g}$. Можно выбрать евклидову меру $d\dot{X}$ на $\mathfrak{g}/\Lambda$ так, чтобы для всех $\phi \in S(\mathfrak{g})$ выполнялось

$$\int_{\mathfrak{g}} \phi(X) dX = \int_{\mathfrak{g}/\Lambda} \left(\sum_{Z \in \Lambda} \phi(X + Z) \right) d\dot{X}.$$

С помощью этой меры на $\mathfrak{g}/\Lambda$ определим пространство $L^1(\mathfrak{g}/\Lambda)$, и для $\phi \in L^1(\mathfrak{g}/\Lambda)$ определим $\hat{\phi}$ на $\mathfrak{g}_\Gamma^*$ соотношением

$$\hat{\phi}(\ell) = \int_{\mathfrak{g}/\Lambda} \phi(X) e^{2\pi i \ell(X)} d\dot{X}.$$

Теорема 2.1, приведенная ниже, которую называют теоремой Планшереля, доказана (см. [8]) для частного случая, когда дискретная подгруппа Γ имеет ранг 1. Определим для $f \in S(G)$ функцию F на G/H соотношением $F(x) = \int_H f * f^*(xh) dh$, где $H = \tilde{H}/\Gamma$ и $\tilde{H} = \exp_{\tilde{G}} \mathfrak{h}$. Тогда выполняется следующая

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть Γ имеет ранг один. Для любой $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathscr{X}} \|\pi_\eta(f)\|_{H.S}^2 |Pf(\eta)| d\eta + F(e).$$

2.3. Обобщенное неравенство Минковского. Пусть (X, μ) и (Y, ν) – пространства с σ -конечной мерой, а F – измеримая функция на $X \times Y$. Тогда для любого $r \geq 1$ выполняется

$$\left(\int_X \left(\int_Y |F(x, y)| dy \right)^r dx \right)^{1/r} \leq \int_Y \left(\int_X |F(x, y)|^r dx \right)^{1/r} dy.$$

2.4. Неравенство Йенсена. Пусть (Ω, μ) – пространство с вероятностной мерой. Если g – вещественнозначная μ -интегрируемая функция, а φ – выпуклая функция на вещественной прямой, то

$$\varphi \left(\int_\Omega g d\mu \right) \leq \int_\Omega \varphi \circ g d\mu.$$

3. Основные результаты

Пусть G – связная нильпотентная группа Ли, и предположим, что центр $Z(G)$ группы G не компактен. Будем использовать те же обозначения, что и в предыдущем пункте. Как было показано ранее, $Z(G)$ содержит замкнутую подгруппу вида $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d$. Выберем борелево сечение Y пространства классов смежности по $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d$ в G . Мы можем взять

$$Y = \exp\left(\sum_{i=d+2}^n \mathbb{R}X_i\right),$$

используя базис Жордана–Гёльдера, выбранный как в (2.2). Тогда каждый элемент из G можно записать единственным образом в виде тройки (t, z, y) , $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{T}^d$ и $y \in Y$. Нормализуем меры Хаара на $\mathbb{T}^d$ и на $G/(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d)$ так, что $\mathbb{T}^d$ имеет меру 1 и выполняется формула Вейля. С помощью борелевского изоморфизма $y \rightarrow y(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d)$ перенесем меру Хаара с $G/(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d)$ в Y . Теперь дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть G – связная нильпотентная группа Ли с некомпактным центром и $1 \leq p, q \leq +\infty$. Будем говорить, что измеримая функция $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет L^p – L^q аналогу принципа неопределенности Миячи, если

- i) $e^{a\pi\|(t,y)\|^2} f \in L^p(G) + L^q(G)$, $(t, y) \in \mathbb{R} \times Y$,
- ii) выполнено

$$\int_{\mathcal{X}} \log^+\left(\frac{e^{b\pi\|\xi\|^2} \|\pi_{\xi}(f)\|_{H.S} |Pf(\xi)|^{1/2}}{C}\right) |Pf(\xi)| d\xi < +\infty$$

для некоторой положительной константы C .

Центральный вопрос нашей статьи следующий.

ВОПРОС. Возьмем те же условия, что в определении 3.1, и пусть $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ – измеримая функция, удовлетворяющая L^p – L^q аналогу принципа неопределенности Миячи для $1 \leq p, q \leq +\infty$. Тогда

- 1) обращается ли f в нуль при $ab > 1$;
- 2) если да, является ли константа 1 оптимальной?

Мы дадим частичный ответ на этот вопрос. Основной результат, полученный нами, состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть G – связная нильпотентная группа Ли с некомпактным центром и пусть $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет первому условию определения 3.1 при $2 \leq p, q \leq +\infty$. Предположим далее, что

$$\int_{\mathcal{X}} e^{2b\pi\|\xi\|^2} \|\pi_{\xi}(f)\|_{H.S}^2 |Pf(\xi)| \log^+\left(\frac{e^{b\pi\|\xi\|^2} \|\pi_{\xi}(f)\|_{H.S} |Pf(\xi)|^{1/2}}{C}\right) d\xi < +\infty$$

для некоторых положительных a, b и C . Тогда

- если $ab > 1$, то $f = 0$ почти везде на G ;
- если $ab = 1$, то $f(t, z, y) = f(0, z, y)e^{-a\pi t^2}$ для всех $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{T}^d$ и $y \in Y$.

Следующий пункт посвящен доказательству теоремы 3.2. Но прежде, чем перейти к нему, сделаем замечание. Для односвязных нильпотентных групп Ли второй автор этой статьи и Тангавелу доказали следующий аналог теоремы Миячи.

ТЕОРЕМА 3.3 (ср. [1]). Пусть G и f такие же, как в теореме 3.2, и предположим дополнительно, что G односвязна. Тогда $d = 0$, и это же верно для $p = 2$ и $q = +\infty$.

Из теоремы 3.2 немедленно следует приведенный ниже результат, который показывает точность константы 1 в принципе неопределенности Харди.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть G – связная нильпотентная группа Ли с некомпактным центром, и пусть $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ – измеримая функция, для которой при некоторых положительных a, b и c выполняется

- i) $|f(t, z, y)| \leq ce^{-a\pi\|(t, z)\|^2}$ для всех $(t, z, y) \in G$,
- ii) $|Pf(\xi)|^{1/2}\|\pi_\xi(f)\|_{H.S} \leq ce^{-b\pi\|\xi\|^2}$ для всех $\xi \in \mathcal{X}$.

Если $ab > 1$, то f равна нулю почти везде на G , а если $ab = 1$, то $f(t, z, y) = f(0, z, y)e^{-a\pi t^2}$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{T} \times Y$.

Для теоремы Коулинга–Прайса мы получили, как в [1; с. 16], следующее обобщение, которое также показывает, что константа 1 в ней является точной.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть G – связная нильпотентная группа Ли с некомпактным центром. Пусть $2 \leq p, q \leq +\infty$ и $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Предположим, что $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ – измеримая функция, причем

- i) $\int_G e^{pa\pi\|(t, y)\|^2} |f(t, z, y)|^p dt dz dy < +\infty$,
- ii) $\int_{\mathcal{X}} e^{qb\pi\|\xi\|^2} \|\pi_\xi(f)\|_{H.S}^q |Pf(\xi)|^{q/2} d\xi < +\infty$.

Тогда $f = 0$ почти везде, если $ab \geq 1$.

4. Доказательство теоремы 3.2

4.1. Несколько лемм. Сначала мы докажем несколько лемм.

ЛЕММА 4.1. Пусть f – измеримая функция на G , удовлетворяющая условию i) определения 3.1. Тогда $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С одной стороны, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{Y \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}} |f(t, z, y)|^2 dt dz dy \\ & \leq \int_{Y \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}} e^{-2a\pi\|(t, y)\|^2} 4 \left(\frac{|u_p(t, z, y)|}{2} + \frac{|u_q(t, z, y)|}{2} \right)^2 dt dz dy \end{aligned}$$

(используем выпуклость функции $x \mapsto x^2$ на $\mathbb{R}^+$)

$$\leq 2 \int_{Y \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}} e^{-2a\pi\|(t, y)\|^2} (|u_p(t, z, y)|^2 + |u_q(t, z, y)|^2) dt dz dy.$$

Пусть $p' = p/2 \geq 1$ и $q' = q/2 \geq 1$. Применим неравенство Гёльдера и получим

$$\|f\|_{L^2(G)}^2 \leq D \left(\left(\int_G |u_p(t, z, y)|^{2p'} dt dz dy \right)^{1/p'} \right)$$

$$+ \left(\int_G |u_q(t, z, y)|^{2q'} dt dz dy \right)^{1/q'} < +\infty,$$

т.е. f – функция с интегрируемым квадратом на G .

С другой стороны,

$$\int_{Y \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}} |f(t, z, y)| dt dz dy \leq \int_{Y \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}} e^{-a\pi\|(t,y)\|^2} (|u_p(t, z, y)| + |u_q(t, z, y)|) dt dz dy$$

(используем неравенство Гёльдера)

$$\begin{aligned} &\leq D \left(\left(\int_{Y \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}} |u_p(t, z, y)|^p dt dz dy \right)^{1/p} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{Y \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}} |u_q(t, z, y)|^q dt dz dy \right)^{1/q} \right) < +\infty \end{aligned}$$

для некоторой положительной константы D .

ЛЕММА 4.2. Пусть G – связная нильпотентная группа Ли, K – компактная центральная подгруппа G и χ – характер K . Пусть f – измеримая функция на G , удовлетворяющая условию i) определения 3.1. Тогда это условие будет выполняться и для $f * \mu_\chi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть dk – мера Хаара K , нормализованная единицей. Тогда, поскольку K является центральной в G ,

$$\begin{aligned} &e^{a\pi\|(t,y)\|^2} (f * \mu_\chi(t, z, y)) \\ &= e^{a\pi\|(t,y)\|^2} \int_K f((t, z, y)k) \overline{\chi(k)} dk = e^{a\pi\|(t,y)\|^2} \int_K f(t, zk, y) \overline{\chi(k)} dk \\ &= e^{a\pi\|(t,y)\|^2} \int_K f(t, k, y) \overline{\chi(z^{-1}k)} dk \\ &= \chi(z) e^{a\pi\|(t,y)\|^2} e^{-a\pi\|(t,y)\|^2} \int_K (u_p(t, k, y) + u_q(t, k, y)) \overline{\chi(k)} dk \\ &= \chi(z) \int_K u_p(t, k, y) \overline{\chi(k)} dk + \chi(z) \int_K u_q(t, k, y) \overline{\chi(k)} dk \\ &= f_p(t, z, y) + f_q(t, z, y), \end{aligned}$$

где $f_{p,q}(t, z, y) = \chi(z) \int_K u_{p,q}(t, k, y) \overline{\chi(k)} dk$. Поэтому очевидно, что $f_{p,q} \in L^{p,q}(G)$.

В дальнейшем для связной нильпотентной группы Ли G будем как и раньше обозначать $Z(G)^c$ максимальной компактной подгруппой G . Тогда $Z(G)^c$ связна, содержится в $Z(G)$ и $G/Z(G)^c$ односвязна.

ЛЕММА 4.3. Пусть G – связная нильпотентная группа Ли, и предположим, что теорема 3.2 выполняется для всех факторгрупп $H = G/C$, где C – замкнутая подгруппа группы $Z(G)^c$, которая удовлетворяет $Z(G)^c/C = \{e\}$ или $Z(G)^c/C = \mathbb{T}$. Тогда теорема 3.2 выполняется для G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K = Z(G)^c$, и пусть f – измеримая функция на G , удовлетворяющая условиям i) и ii) теоремы 3.2. Для $\chi \in \widehat{K}$ положим $f_\chi = f * \mu_{\bar{\chi}}$. Согласно лемме 4.2 f_χ также удовлетворяет условию i) из определения 3.1. Пусть $K_\chi = \{k \in K : \chi(k) = 1\}$. Тогда f_χ постоянна на классах смежности по подгруппе K_χ . Действительно, для каждого $x \in G$ и $y \in K_\chi$ имеем

$$f_\chi(xy) = \int_K f(xyk)\chi(k) dk = \int_K f(xk)\chi(y^{-1})\chi(k) dk = f_\chi(x).$$

При этом $\pi(f_\chi) = 0$ для каждого неприводимого представления π из G , если $\pi|_K$ не кратно χ . Действительно, так как

$$\pi(f_\chi) = \pi(f)\pi(\mu_{\bar{\chi}}) = \pi(f) \int_K \overline{\chi(k)}\pi(k) dk$$

и $\pi|_K$ кратно некоторому характеру для K , не равному χ , соотношения ортогональности дают $\int_K \overline{\chi(k)}\pi(k) dk = 0$. Определим g_χ на $H = G/K_\chi$ соотношением $g_\chi(xK_\chi) = f_\chi(x)$, $x \in G$, и пусть $q_\chi : G \rightarrow G/K_\chi$ обозначает факторгомоморфизм. Пусть dk – мера Хаара K_χ , нормализованная единицей. Теперь для каждого $\tau \in \widehat{G/K_\chi}$ положим $\pi = (\tau \circ q_\chi)$. Таким образом, как в [7],

$$\|\pi(f_\chi)\|_{H.S} = \|\tau(g_\chi)\|_{H.S}.$$

Тогда g_χ удовлетворяет предположениям теоремы 3.2. Действительно,

$$e^{a\pi\|(t,y)\|^2} g_\chi((t,z,y)K_\chi) = e^{a\pi\|(t,y)\|^2} f_\chi(t,z,y) = f_p(t,z,y) + f_q(t,z,y),$$

где $f_p \in L^p(G)$ и $f_q \in L^q(G)$.

Для $\xi \in \mathcal{X}$ пусть τ_ξ выбрано так, что $\pi_\xi = (\tau_\xi \circ q_\chi)$ и $\mathcal{X}_\chi = \{\xi \in \mathcal{X} : \pi_\xi|_K \text{ кратно } \chi\}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{X}_\chi} e^{2b\pi\|\xi\|^2} \|\tau_\xi(g_\chi)\|_{H.S}^2 |Pf(\xi)| \log^+ \left(\frac{e^{b\pi\|\xi\|^2} \|\tau_\xi(g_\chi)\|_{H.S} |Pf(\xi)|^{1/2}}{c} \right) d\xi \\ &= \int_{\mathcal{X}_\chi} e^{2b\pi\|\xi\|^2} \|\pi_\xi(f_\chi)\|_{H.S}^2 |Pf(\xi)| \log^+ \left(\frac{e^{b\pi\|\xi\|^2} \|\pi_\xi(f_\chi)\|_{H.S} |Pf(\xi)|^{1/2}}{c} \right) d\xi \\ &= \int_{\mathcal{X}_\chi} e^{2b\pi\|\xi\|^2} \|\pi_\xi(f_\chi)\|_{H.S}^2 |Pf(\xi)| \log^+ \left(\frac{e^{b\pi\|\xi\|^2} \|\pi_\xi(f_\chi)\|_{H.S} |Pf(\xi)|^{1/2}}{c} \right) d\xi \\ &\leq \int_{\mathcal{X}} e^{2b\pi\|\xi\|^2} \|\pi_\xi(f_\chi)\|_{H.S}^2 |Pf(\xi)| \log^+ \left(\frac{e^{b\pi\|\xi\|^2} \|\pi_\xi(f_\chi)\|_{H.S} |Pf(\xi)|^{1/2}}{c} \right) d\xi < +\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, поскольку $K/K_\chi = \mathbb{T}$ или $K/K_\chi = \{e\}$, из предположений теоремы следует, что $g_\chi = 0$ почти везде на $H = G/K_\chi$ и, следовательно, $f_\chi = 0$ почти везде на G . Наконец, поскольку это выполняется для всех $\chi \in \widehat{K}$, можно сделать вывод, что $f = 0$ почти везде.

Благодаря лемме 4.3, с этого момента мы можем полагать, что компактный центр группы G является одномерным и что $Z(G)$ содержит замкнутую подгруппу вида $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$.

ЛЕММА 4.4. Пусть f – измеримая функция на G , удовлетворяющая условию i) определения 3.1. Тогда интеграл

$$A = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{T} \times Y} |f(t, z, y)|^2 dz dy \right)^{1/2} dt$$

сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{T} \times Y} |f(t, z, y)|^2 dz dy \right)^{1/2} dt \right)^2 \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{T} \times Y} e^{-2a\pi\|(t,y)\|^2} 4 \left(\frac{|u_p(t, z, y)|}{2} + \frac{|u_q(t, z, y)|}{2} \right)^2 dz dy \right)^{1/2} dt \right)^2 \end{aligned}$$

(используем выпуклость функции $x \mapsto x^2$ на $\mathbb{R}^+$)

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{T} \times Y} 2e^{-2a\pi\|(t,y)\|^2} (|u_p(t, z, y)|^2 + |u_q(t, z, y)|^2) dz dy \right)^{1/2} dt \right)^2 \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-a\pi t^2} \left(\int_{\mathbb{T} \times Y} 2e^{-a\pi\|(t,y)\|^2} (|u_p(t, z, y)|^2 + |u_q(t, z, y)|^2) dz dy \right)^{1/2} dt \right)^2 \end{aligned}$$

(используем неравенство Гёльдера)

$$\leq M \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{T} \times Y} (e^{-a\pi\|(t,y)\|^2} |u_p(t, z, y)|^2 + e^{-a\pi\|(t,y)\|^2} |u_q(t, z, y)|^2) dz dy dt.$$

При таких же p' и q' , как раньше, используя неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} A^2 &\leq M' \left(\left(\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{T} \times Y} |u_p(t, z, y)|^{2p'} dz dy dt \right)^{1/p'} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{T} \times Y} |u_q(t, z, y)|^{2q'} dz dy dt \right)^{1/q'} \right) < \infty, \end{aligned}$$

где M и M' – некоторые положительные константы.

4.2. Нам понадобится локализованная версия меры Планшереля. Пусть

$$\mathcal{X}_{\eta_2} = \{\eta_2 X_2^* + \eta', \eta = (\eta_2, \eta') \in \mathcal{X}\}.$$

Пусть также $\mathfrak{b} = \mathbb{R}X_2$, B – ассоциированная ей подгруппа Ли группы $Z(G)$ и $\chi = \chi_{\eta_2}$ – унитарный характер B , определенный соотношением $\chi(\exp(rX_2)) = e^{-2\pi i r \eta_2}$, $r \in \mathbb{R}$. Пусть также

$$\widehat{G}_\chi = \{\pi \in \widehat{G} : \pi|_B = \chi \cdot I_d\}.$$

Тогда $\widehat{G}_\chi$ – замкнутое подмножество множества $\widehat{G}$, гомеоморфное пространству орбит $\mathfrak{g}_{\eta_2}^*/G$, где $\mathfrak{g}_{\eta_2}^* = \eta_2 X_2^* + \mathfrak{b}^\perp \cdot \mathfrak{g}^*$. Оно является двойственным пространством алгебры конволюций $L^1(G/B, \chi)$, где при $1 \leq p < +\infty$ пространство $L^p(G/B, \chi)$

определяется как множество всех измеримых функций $\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}$, для которых $\varphi(ga) = \overline{\chi(a)}\varphi(g)$ для всех $g \in G$ и $a \in B$. Более того,

$$\|\varphi\|_{L^p(G/B, \chi)}^p = \int_{G/B} |\varphi(g)|^p dg < +\infty.$$

Как в [9] и [10] таким образом мы получаем, что для любой $f \in L^1(G/B, \chi) \cap L^2(G/B, \chi)$

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathcal{X}_{\eta_2}} \|\pi_{\eta}(f)\|_{H.S}^2 |Pf(\eta)| d\eta + \int_H f * f^*(h) dh. \quad (4.1)$$

Эта формула называется локализованной версией формулы Планшереля.

4.3. Зафиксируем $\xi_2 \in \mathbb{R}$, и для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим $V_k = [\xi_2 - 1/(2k), \xi_2 + 1/(2k)]$. Для $k \in \mathbb{N}$ и $m > 2k$ выберем C^∞ -функцию $v_{k,m}$ на $\mathbb{R}$ так, чтобы она удовлетворяла следующим трем условиям:

- 1) $\text{supp } v_{k,m} \subseteq V_k$,
- 2) $v_{k,m} = 1$ на $[\xi_2 - 1/2k + 1/m, \xi_2 + 1/2k - 1/m]$,
- 3) $0 \leq v_{k,m} \leq 1$ на $\mathbb{R}$.

Пусть $u_{k,m} \in L^1(\mathbb{R})$ и выполняется $\widehat{u}_{k,m} = v_{k,m}$. Пусть $f \in L^1(G)$, $f_{k,m} = u_{k,m} * f$ и

$$F_{k,m}(x) = \int_{\mathbb{T}} f_{k,m} * f_{k,m}^*(xz) dz, \quad x \in G.$$

ЛЕММА 4.5. Если f удовлетворяет условию i) определения 3.1, то

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} kF_{k,m}(e) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $z, w \in \mathbb{T}$ и $y \in Y$, и пусть

$$E_{k,m}(z, w, y) = \int_{\mathbb{R}} f(t, z, y) \int_{\xi_2 - 1/(2k)}^{\xi_2 + 1/(2k)} \widehat{u}_{k,m}(s) \widehat{u}_{k,m}(t+s) \overline{\widehat{f}(t+s, w, y)} ds dt.$$

Несложное вычисление показывает, что

$$|E_{k,m}(z, w, y)| \leq \frac{1}{k} H(z, w, y),$$

где

$$H(z, w, y) = \int_{\mathbb{R}} |f(t, z, y)| dt \int_{\mathbb{R}} |f(r, w, y)| dr.$$

Кроме того,

$$\int_{\mathbb{T}^2 \times Y} H(z, w, y) dz dw dy = \int_{\mathbb{T}^2 \times Y} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t, z, y)| dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |f(r, w, y)| dr \right) dz dw dy$$

(используем неравенство Гёльдера)

$$\leq \int_{\mathbb{T} \times Y} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t, z, y)| dt \right)^2 dz dy$$

(используем неравенство Минковского)

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{T} \times Y} |f(t, z, y)|^2 dz dy \right)^{1/2} dt \right)^2,$$

который конечен согласно лемме 4.4. Отсюда следует, что

$$E_k(z, w, y) = \lim_{m \rightarrow +\infty} E_{k,m}(z, w, y) = \int_{\mathbb{R}} f(t, z, y) \int_{\xi_2 - 1/(2k)}^{\xi_2 + 1/(2k)} 1_{V_k}(t + s) \widehat{f}(t + s, w, y) ds dt$$

по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. Из леммы 3.1 работы [6] имеем

$$F_{k,m}(e) = \int_Y \int_{\mathbb{T}^2} E_{k,m}(z, w, y) dz dw dy.$$

Пусть

$$\begin{aligned} R &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} k F_{k,m}(e) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} k \int_Y \int_{\mathbb{T}^2} E_{k,m}(z, w, y) dz dw dy = \lim_{k \rightarrow +\infty} k \int_Y \int_{\mathbb{T}^2} E_k(z, w, y) dz dw dy \end{aligned}$$

(мы опять воспользовались теоремой Лебега о мажорируемой сходимости). С другой стороны,

$$\begin{aligned} |E_k(z, w, y)| &\leq \int_{-1/k}^{1/k} |f(t, z, y)| \left(\int_{\xi_2 - 3/(2k)}^{\xi_2 + 3/(2k)} |\widehat{f}(t + s, w, y)| ds \right) dt \\ &\leq \left(\int_{-1/k}^{1/k} |f(t, z, y)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{-1/k}^{1/k} \left(\int_{\xi_2 - 3/(2k)}^{\xi_2 + 3/(2k)} |\widehat{f}(t + s, w, y)| ds \right)^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{3\sqrt{2}}{k\sqrt{k}} \|\widehat{f}(\cdot, w, y)\|_{\infty} \left(\int_{-1/k}^{1/k} |f(t, z, y)|^2 dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

(мы применили неравенство Гёльдера). Таким образом, имеем

$$R \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} k \int_{Y \times \mathbb{T}^2} \frac{3\sqrt{2}}{k\sqrt{k}} \|\widehat{f}(\cdot, w, y)\|_{\infty} \left(\int_{-1/k}^{1/k} |f(t, z, y)|^2 dt \right)^{1/2} dz dw dy$$

(использовали неравенство Гёльдера)

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{k}} \left(\int_{Y \times \mathbb{T}^2} \|\widehat{f}(\cdot, w, y)\|_{\infty}^2 dz dw dy \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int_{Y \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}} |f(t, z, y)|^2 dt dz dw dy \right)^{1/2} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{k}} \left(\int_{Y \times \mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(r, w, y)| dr \right)^2 dw dy \right)^{1/2} \left(\int_{Y \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}} |f(t, z, y)|^2 dt dz dy \right)^{1/2} \end{aligned}$$

(использовали неравенство Минковского)

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{k}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{Y \times \mathbb{T}} |f(r, w, y)|^2 dw dy \right)^{1/2} dr \right) \left(\int_{Y \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}} |f(t, z, y)|^2 dt dz dy \right)^{1/2} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{k}} A \|f\|_2 = 0, \end{aligned}$$

что мы и хотели показать. Здесь A такая же, как в лемме 4.4.

Для всех $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{T}$ и $y \in Y$ пусть $f_{(z,y)}(t) = f(t, z, y)$, и определим $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ соотношением

$$g(t) = \int_{\mathbb{T} \times Y} f_{(z,y)} * f_{(z,y)}^*(t) dz dy.$$

ЛЕММА 4.6. Для любого $\xi_2 \in \mathbb{R}$

$$\widehat{g}(\xi_2) = \int_{\mathcal{X}_{\xi_2}} |Pf(\eta)| \cdot \|\pi_\eta(f)\|_{H.S}^2 d\eta'.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 4.5 и статьей [6] и получим

$$\widehat{g}(\xi_2) = \lim_{k \rightarrow +\infty} k \int_{V_k(\xi_2)} \int_{\mathcal{X}_{\eta_2}} |Pf(\eta)| \cdot \|\pi_\eta(f)\|_{H.S}^2 d\eta' d\eta_2,$$

где $\eta = (\eta_2, \eta')$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \pi_\eta(f) &= \int_G f(x) \pi_\eta(x) dx = \int_{G/B} \int_{\mathbb{R}} f(s, g) \pi_\eta(s, g) ds dg \\ &= \int_{G/B} \int_{\mathbb{R}} f(s, g) \pi_\eta(g) e^{-2\pi i s \eta_2} ds dg = \widetilde{\pi}_\eta(f_{\eta_2}), \end{aligned}$$

где $f_{\eta_2} = \widehat{f}^1(\eta_2, \cdot)$. Поэтому

$$\widehat{g}(\xi_2) = \lim_{k \rightarrow +\infty} k \int_{V_k(\xi_2)} \int_{\mathcal{X}_{\eta_2}} |Pf(\eta)| \cdot \|\widetilde{\pi}_\eta(f_{\eta_2})\|_{H.S}^2 d\eta' d\eta_2.$$

Применим локализованную формулу Планшереля и получим

$$\int_{\mathcal{X}_{\eta_2}} |Pf(\eta)| \cdot \|\widetilde{\pi}_{(\eta_2, \eta')}(f_{\eta_2})\|_{H.S}^2 d\eta' = \|f_{\eta_2}\|_{L^2(G/B)}^2 - \int_{\mathbb{T}} f_{\eta_2} * f_{\eta_2}^*(w) dw;$$

тогда

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\xi_2) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} k \int_{V_k(\xi_2)} \left(\|f_{\eta_2}\|_{L^2(G/B)}^2 - \int_{\mathbb{T}} f_{\eta_2} * f_{\eta_2}^*(w) dw \right) d\eta_2 \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} k \int_{V_k(\xi_2)} \|f_{\eta_2}\|_{L^2(G/B)}^2 d\eta_2 - \lim_{k \rightarrow +\infty} k \int_{V_k(\xi_2)} \int_{\mathbb{T}} f_{\eta_2} * f_{\eta_2}^*(w) dw d\eta_2. \end{aligned}$$

Теперь докажем, что $\eta_2 \mapsto \int_{\mathbb{T}} f_{\eta_2} * f_{\eta_2}^*(w) dw$ непрерывно. Действительно, $\eta_2 \mapsto f_{\eta_2} * f_{\eta_2}^*(w)$ непрерывно для почти всех $w \in \mathbb{T}$, и для $|f_{\eta_2} * f_{\eta_2}^*(w)|$ при фиксированном w

выполняется

$$\begin{aligned} |f_{\eta_2} * f_{\eta_2}^*(w)| &= \left| \int_{\mathbb{T} \times Y} f_{\eta_2}(s, y) f_{\eta_2}^*(ws^{-1}, y^{-1}) ds dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{T} \times Y} |\widehat{f}^1(\eta_2, s, y)| |\widehat{f}^1(\eta_2, sw^{-1}, y)| ds dy \\ &\leq \int_{\mathbb{T} \times Y} \int_{\mathbb{R}} |f(r, s, y)| dr \int_{\mathbb{R}} |f(t, sw^{-1}, y)| dt ds dy \end{aligned}$$

(используем неравенство Гёльдера)

$$\leq \int_{\mathbb{T} \times Y} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(r, s, y)| dr \right)^2 ds dy$$

(используем неравенство Минковского)

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{T} \times Y} |f(r, s, y)|^2 ds dy \right)^{1/2} dr \right)^2 < +\infty,$$

как в лемме 4.4. Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} k \int_{V_k(\xi_2)} \int_{\mathbb{T}} f_{\eta_2} * f_{\eta_2}^*(w) dw d\eta_2 = \int_{\mathbb{T}} f_{\xi_2} * f_{\xi_2}^*(w) dw := F_{\xi_2}(e).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\xi_2) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} k \int_{V_k(\xi_2)} \|f_{\eta_2}\|_{L^2(G/B)}^2 d\eta_2 - F_{\xi_2}(e) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} k \int_{V_k(\xi_2)} \int_{G/B} |f_{\eta_2}(g)|^2 dg d\eta_2 - F_{\xi_2}(e) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{G/B} \left(k \int_{V_k(\xi_2)} |f_{\eta_2}(g)|^2 d\eta_2 \right) dg - F_{\xi_2}(e). \end{aligned}$$

Воспользуемся теоремой о мажорируемой сходимости. Мы имеем

$$k \int_{V_k(\xi_2)} |f_{\eta_2}(g)|^2 d\eta_2 = |f_{c_k}(g)|^2$$

для некоторого $c_k \in V_k(\xi_2)$. Кроме этого отметим, что

$$|f_{c_k}(g)|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} f(s, g) e^{-2\pi i s c_k} ds \right|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(s, g)| ds \right)^2.$$

Применим обобщенное неравенство Минковского и получим

$$\int_{G/B} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(s, g)| ds \right)^2 dg \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{G/B} |f(s, g)|^2 dg \right)^{1/2} ds \right)^2 < +\infty.$$

Наконец, используем (4.1) и получим

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\xi_2) &= \int_{G/B} |f_{\xi_2}(g)|^2 dg - F_{\xi_2}(e) \\ &= \|f_{\xi_2}\|_{L^2(G/B)}^2 - F_{\xi_2}(e) = \int_{\mathcal{X}_{\xi_2}} |Pf(\eta)| \cdot \|\pi_{\eta}(f)\|_{H.S}^2 d\eta', \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Для фиксированной функции Шварца φ на $\mathbb{T} \times Y$ определим функцию F на $\mathbb{R}$ соотношением

$$F(t) = \int_{\mathbb{T} \times Y} f(t, z, y) \varphi(z, y) dz dy, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ЛЕММА 4.7. Пусть f – измеримая функция на G , удовлетворяющая условию i) теоремы 3.2. Тогда

$$e^{a|\cdot|^2} F \in L^p(\mathbb{R}) + L^q(\mathbb{R}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с первого условия убывания f из теоремы 3.2 и заметим, что

$$F(t) = \int_{\mathbb{T} \times Y} e^{-a\pi(t^2 + \|y\|^2)} (u_p(t, z, y) + u_q(t, z, y)) \varphi(z, y) dz dy$$

для всех $t \in \mathbb{R}$, поэтому

$$e^{a\pi t^2} F(t) = \int_{\mathbb{T} \times Y} e^{-a\pi \|y\|^2} u_p(t, z, y) \varphi(z, y) dz dy + \int_{\mathbb{T} \times Y} e^{-a\pi \|y\|^2} u_q(t, z, y) \varphi(z, y) dz dy.$$

Обозначим

$$F_{p,q}(t) = \int_{\mathbb{T} \times Y} e^{-a\pi \|y\|^2} u_{p,q}(t, z, y) \varphi(z, y) dz dy.$$

Тогда $F_p \in L^p(\mathbb{R})$ и $F_q \in L^q(\mathbb{R})$. В самом деле,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{T} \times Y} e^{-a\pi \|y\|^2} u_p(t, z, y) \varphi(y) dz dy \right|^p dt \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{T} \times Y} e^{-a\pi \|y\|^2} |u_p(t, z, y)| |\varphi(z, y)| dz dy \right)^p dt \\ & \leq M_1 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{T} \times Y} e^{-a\pi \|y\|^2} |u_p(t, z, y)| dz dy \right)^p dt \end{aligned}$$

(применим неравенство Минковского)

$$< M_1 \left(\int_{\mathbb{T} \times Y} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-a\pi \|y\|^2} |u_p(t, z, y)|^p dt \right)^{1/p} dz dy \right)^p$$

(применим неравенство Гёльдера)

$$< M_2 \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{T} \times Y} |u_p(t, z, y)|^p dt dz dy < +\infty$$

для некоторых положительных констант M_1 и M_2 . Аналогично рассуждая, можно получить такой же вывод для F_q .

ЛЕММА 4.8. Пусть f и C – такие же, как в теореме 3.2. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2b\pi\lambda^2} |\widehat{F}(\lambda)|^2 \log^+ \left(\frac{e^{b\pi\lambda^2} |\widehat{F}(\lambda)|}{C\sqrt{Nc}} \right) d\lambda < +\infty$$

для некоторых положительных констант c и N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$F(t) = \int_{\mathbb{T} \times Y} f(t, z, y) \varphi(z, y) dz dy.$$

Отсюда

$$\widehat{F}(\lambda) = \int_{\mathbb{T} \times Y} \widehat{f_{(z,y)}}(\lambda) \varphi(z, y) dz dy, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

и, следовательно,

$$|\widehat{F}(\lambda)|^2 \leq \|\varphi\|_2^2 \int_{\mathbb{T} \times Y} |\widehat{f_{(z,y)}}(\lambda)|^2 dz dy.$$

Пусть $N = \|\varphi\|_2^2$. Тогда

$$|\widehat{F}(\lambda)|^2 \leq N \widehat{g}(\lambda) = N \int_{\mathcal{X}_\lambda} |Pf(\eta)| \cdot \|\pi_\eta(f)\|_{H.S}^2 d\eta'. \quad (4.2)$$

Поэтому

$$e^{2b\pi\lambda^2} |\widehat{F}(\lambda)|^2 \leq Nc \int_{\mathcal{X}_\lambda} e^{2b\pi\|\eta\|^2} |Pf(\eta)| \cdot \|\pi_\eta(f)\|_{H.S}^2 \frac{e^{-2b\pi\|\eta'\|^2}}{c} d\eta',$$

где c выбрана так, чтобы $e^{-2b\pi\|\eta'\|^2}/c$ была плотностью вероятностной меры на $\mathcal{X}_\lambda$. Применим неравенство Йенсена и получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Nc} e^{2b\pi\lambda^2} |\widehat{F}(\lambda)|^2 \log^+ \left(\frac{e^{b\pi\lambda^2} |\widehat{F}(\lambda)|}{C\sqrt{Nc}} \right) \\ & \leq 2 \int_{\mathcal{X}_\lambda} e^{2b\pi\|\eta\|^2} |Pf(\eta)| \cdot \|\pi_\eta(f)\|_{H.S}^2 \log^+ \left(\frac{e^{b\pi\|\eta\|^2} |Pf(\eta)|^{1/2} \cdot \|\pi_\eta(f)\|_{H.S}}{C} \right) d\eta'. \end{aligned}$$

Это доказывает, что

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} e^{2b\pi\lambda^2} |\widehat{F}(\lambda)|^2 \log^+ \left(\frac{e^{b\pi\lambda^2} |\widehat{F}(\lambda)|}{C\sqrt{Nc}} \right) d\lambda \\ & \leq 2Nc \int_{\mathcal{X}} e^{2b\pi\|\eta\|^2} |Pf(\eta)| \cdot \|\pi_\eta(f)\|_{H.S}^2 \\ & \quad \times \log^+ \left(\frac{e^{b\pi\|\eta\|^2} |Pf(\eta)|^{1/2} \cdot \|\pi_\eta(f)\|_{H.S}}{C} \right) d\eta < +\infty. \end{aligned}$$

4.4. Доказательство теоремы 3.2. Применим следствие 1.4 и получим, что $F = 0$ почти везде на $\mathbb{R}$, если $ab > 1$, и тогда $f = 0$ почти везде на G . Если $ab = 1$, $F(t) = c_\varphi e^{-a\pi t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, для некоторой константы c_φ , зависящей от φ .

Пусть теперь ξ_i , $i \in I$, – ортонормальный базис в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{T} \times Y)$. Тогда

$$\begin{aligned} f(t, z, y) &= \sum_{i \in I} \langle f(t, \cdot, \cdot), \xi_i(\cdot, \cdot) \rangle \xi_i(z, y) \\ &= \sum_{i \in I} \int_{\mathbb{T} \times Y} f(t, z_1, y_1) \overline{\xi_i(z_1, y_1)} dz_1 dy_1 \xi_i(z, y) \\ &= \sum_{i \in I} F_i(t) \xi_i(z, y) = \sum_{i \in I} C_{\xi_i} e^{-a\pi t^2} \xi_i(z, y) = e^{-a\pi t^2} f(0, z, y), \end{aligned}$$

где $f(0, z, y) = \sum_{i \in I} C_{\xi_i} \xi_i(z, y)$. Это завершает доказательство теоремы.

5. Заключительные замечания

5.1. Пусть $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ – одномерная группа окружности. Тогда $\widehat{G} = \mathbb{Z}$. Пусть $f(\bar{t}) = e^{2i\pi t}$, $\bar{t} = t + \mathbb{Z}$. Для $n \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 e^{2i\pi t} e^{-2i\pi tn} dt = \int_0^1 e^{2i\pi t(1-n)} dt.$$

Отсюда $\widehat{f}(n) = 1$, если $n = 1$, и $\widehat{f}(n) = 0$ в остальных случаях. Поэтому легко построить ненулевую функцию $f \in L^1(G)$, для которой

$$e^{a\pi|\cdot|^2} f \in L^p(G) + L^q(G), \quad 1 \leq p, q \leq +\infty,$$

и

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2b\pi|n|^2} |\chi_n(f)|_{H.S}^2 \log^+(e^{b\pi|n|^2} |\chi_n(f)|_{H.S}) = e^{2b\pi} \log(e^{2b\pi}) < +\infty.$$

Этот первый пример показывает, что используемое нами условие некомпактности центра G является существенным.

5.2. Пусть G – связная нильпотентная группа Ли, и предположим, что G имеет несократимое представление σ с интегрируемым квадратом. Пусть χ_0 – характер $Z(G) = \mathbb{T}^d$, выбранный так, что $\sigma|_{Z(G)}$ кратно χ_0 . Тогда

$$\chi_0(z_1, \dots, z_d) = \prod_{j=1}^d z_j^{m_j}, \quad (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{T}^d,$$

для некоторых целых $m_1, \dots, m_d$. В работе [6] авторы показали, что функция f , определенная на G соотношением

$$f(\exp_G(X)) = \exp\left(-\alpha \sum_{j=d+1}^n x_j^2\right) \exp\left(-2\pi i \sum_{j=1}^d x_j m_j\right)$$

при $X = \sum_{j=1}^n x_j X_j \in \mathfrak{g}$ и некотором $\alpha > 0$, имеет следующее свойство: для каждого $\tau \in \widehat{G}$ $\tau(f) \neq 0$ если и только если $\tau \simeq \sigma$. Отсюда очевидно, что $e^{-a\|x\|^2} f \in L^p(G) + L^q(G)$ для любого $0 < a < \alpha$ и любого $1 \leq p, q \leq +\infty$. С другой стороны, второе условие затухания из теоремы 3.2 очевидно выполняется в данном случае. Это так же показывает, что условие некомпактности центра G является необходимым.

5.3. Случай экспоненциально разрешимых групп Ли. Пусть G – экспоненциально разрешимая группа Ли, а $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли. Пусть

$$\mathcal{S} : \mathfrak{s}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{s}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{s}_n = \mathfrak{g}$$

– хорошая последовательность подалгебр, из которой мы выберем мальцевский базис $\{X_1, \dots, X_n\}$ для $\mathfrak{g}$. Отображение

$$\mathbb{R}^n \rightarrow G, \quad (t_1, \dots, t_n) \mapsto \exp(t_n X_n) \cdots \exp(t_1 X_1)$$

является C^∞ диффеоморфизмом и отображает меру Лебега $dt_n \cdots dt_1$ в меру Хаара на G . Используя это, отождествим G с $\mathbb{R}^n$ как множества. Для краткости будем

записывать произвольную функцию ϕ на G как функцию, зависящую от переменных $t_1, \dots, t_n$, с помощью формулы $\phi(t_1, \dots, t_n) = \phi(\exp(t_n X_n) \cdots \exp(t_1 X_1))$. Теперь введем на G функцию нормы $\|\cdot\|$, положив для любого $x = \exp(t_n X_n) \cdots \exp(t_1 X_1) \in G$

$$\|x\|_G = \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right)^{1/2}, \quad (t_j \in \mathbb{R}).$$

Пусть $\mathfrak{g}^*$ обозначает, как и раньше, векторное пространство, двойственное к $\mathfrak{g}$. Тогда $\{X_1^*, \dots, X_n^*\}$ – базис в $\mathfrak{g}^*$, двойственный к мальцевскому базису $\{X_1, \dots, X_n\}$. Поэтому можно отождествить $\mathfrak{g}^*$ с $\mathbb{R}^n$, тогда произвольный ξ в двойственном базисе будет иметь вид

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i X_i^*,$$

а его евклидова норма относительно этого базиса будет равна

$$\|\xi\| = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^{1/2}.$$

Как было объяснено в [7] и [11], существует алгоритм построения единственным и естественным способом точного измеримого сечения Σ почти всех коприсоединенных орбит $\mathfrak{g}^*$, снабженного мерой Лебега. Пусть $\{\pi_\xi, \mathcal{H}_\xi, \xi \in \Sigma\}$ обозначает измеримое поле несократимых унитарных представлений, связанных с параметром ξ с помощью соответствия Кириллова–Берната. Для любого $\xi \in \Sigma$ существует положительный самоприсоединенный полуинвариантный оператор, действующий на $\mathcal{H}_\xi$, который дает

$$\phi(e) = \int_{\Sigma} \text{Tr}(K_\xi^{1/2} \pi_\xi(\phi) K_\xi^{1/2}) d\xi$$

для каждой гладкой функции ϕ на G с компактным носителем. Более точно, для любого $\xi \in \Sigma$ выполняется $K_\xi = c|Pf(\xi)|D_\xi$, где D_ξ – оператор умножения, задаваемый модулярной функцией Δ_G на $\mathcal{H}_\xi$, а c – положительная константа.

Если X_1 – центральный вектор в $\mathfrak{g}$, то любой $x = \exp(t_n X_n) \cdots \exp(t_1 X_1) \in G$ можно представить в виде пары (t_1, y) , где $y = \exp(t_n X_n) \cdots \exp(t_2 X_2) \in \mathbb{R}^{n-1}$ и, что эквивалентно, произвольную функцию на G можно представить в виде отображения, зависящего от двух переменных t_1 и y .

Доказательства, приведенные в [1] для случая связных и односвязных нильпотентных групп Ли, легко можно адаптировать, чтобы доказать следующий основной результат этого пункта.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть G – экспоненциально разрешимая группа Ли с нетривиальным центром и пусть $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет следующим условиям:

- i) $e^{a\pi\|(t,y)\|^2} f \in L^p(G) + L^q(G)$, $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ и $2 \leq p, q \leq +\infty$;
- ii) выполнено

$$\int_{\Sigma} e^{2b\pi\|\xi\|^2} \|D_\xi^{1/2} \pi_\xi(f)\|_{H.S}^2 |Pf(\xi)| \log^+ \left(\frac{e^{b\pi\|\xi\|^2} \|D_\xi^{1/2} \pi_\xi(f)\|_{H.S} |Pf(\xi)|^{1/2}}{C} \right) d\xi < +\infty$$

для некоторых положительных чисел a, b и C . Тогда $f = 0$ почти везде на G , если $ab > 1$, и $f(t, y) = f(0, y)e^{-a\pi t^2}$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}^{n-1}$.

В заключение отметим, что можно адаптировать примеры, приведенные в разделе 4 работы [7], и с их помощью показать, что предположение о нетривиальности центра является существенным.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Baklouti, S. Thangavelu, “Variant of Miyachi’s Theorem for nilpotent Lie Groups”, *J. Aust. Math. Soc.*, **88**:1 (2010), 1–17.
- [2] G. H. Hardy, “A theorem concerning Fourier transforms”, *J. London Math. Soc.*, **8**:3 (1933), 227–231.
- [3] M. G. Cowling, J. F. Price, “Generalisations of Heisenberg’s inequality”, *Harmonic Analysis*, Lecture Notes in Math., **992**, Springer-Verlag, Berlin, 1983, 443–449.
- [4] S. Azouazi, A. Baklouti, M. Elloumi, “Analogues of Miyachi, Cowling–Price and Morgan theorems for compact extensions of $\mathbb{R}^n$ ”, *Int. J. Pure Appl. Math.* (to appear).
- [5] E. Kaniuth, A. Kumar, “Hardy’s theorem for simply connected nilpotent Lie groups”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **131**:3 (2001), 487–494.
- [6] A. Baklouti, E. Kaniuth, “On Hardy’s uncertainty principle for connected nilpotent Lie groups”, *Math. Z.*, **259**:2 (2008), 233–247.
- [7] F. Abdelmoula, A. Baklouti, “The L^p - L^q analog of Morgan’s theorem on exponential solvable Lie groups”, *Math. Notes*, **88**:4 (2010), 464–478.
- [8] L. J. Corwin, F. P. Greenleaf, *Representations of Nilpotent Lie Groups and their Applications*. Part 1. *Basic Theory and Examples*, Cambridge Stud. Adv. Math., **18**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [9] A. Baklouti, K. Smaoui, J. Ludwig, “Estimate of L^p -Fourier transform norm on nilpotent Lie groups”, *J. Funct. Anal.*, **199**:2 (2003), 508–520.
- [10] M. Duflo, M. Raïs, “Sur l’analyse hamonique sur les groupes de Lie résolubles”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **9**:1 (1976), 107–144.
- [11] B. N. Currey, “Explicit orbital parameters and the Plancherel measure for exponential Lie groups”, *Pacific J. Math.*, **219**:1 (2005), 97–138.

Ф. Абдельмула

University of Sfax, Тунис

E-mail: abdelmoulafatma@yahoo.fr

Поступило

20.03.2013

А. Баклутти

University of Sfax, Тунис

E-mail: Ali.Baklouti@fss.rnu.tn

Д. Лахьяни

University of Sfax, Тунис

E-mail: lahyanidhoha@yahoo.fr