Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Конягин, Ю. В. Малыхин, К. С. Рютин, О точном восстановлении разреженного вектора по линейным измерениям, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 1, 122–129

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10272>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 04:16:33

О точном восстановлении разреженного вектора по линейным измерениям

С. В. Конягин, Ю. В. Малыхин, К. С. Рютин

Пусть $1 \leq k \leq n < N$. Мы говорим, что вектор $x \in \mathbb{R}^N$ является k -разреженным, если он имеет не более k ненулевых координат. Пусть задана $n \times N$ матрица Φ . Рассматривается задача восстановления k -разреженного вектора $x \in \mathbb{R}^N$ по вектору $y = \Phi x \in \mathbb{R}^n$. Мы находим близкие к окончательным необходимые условия на k, n, N для того, чтобы эта задача могла быть сведена к задаче минимизации ℓ_1 -нормы векторов z , удовлетворяющих условию $y = \Phi z$.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm10272

*Посвящается светлой памяти
Сергея Михайловича Никольского*

1. Введение. Всюду в работе $1 \leq k \leq n < N$. Мы говорим, что вектор $x \in \mathbb{R}^N$ является k -разреженным, если он имеет не более k ненулевых координат. Пусть задана $n \times N$ матрица Φ . Рассматривается задача восстановления k -разреженного вектора $x \in \mathbb{R}^N$ по вектору $y = \Phi x \in \mathbb{R}^n$. Эта задача является важной частью теории, называемой в русскоязычной литературе теорией сжатых измерений (“Compressed Sensing” или “Compressive Sampling”), и имеет как теоретический интерес, так и практические приложения. В последнее время появилось много работ по данной тематике (см. обзоры [1], [2] и библиографию в них), и не всегда легко установить авторство того или иного результата.

Часто даже в тех случаях, когда k -разреженный вектор x однозначно восстанавливается по y , явное нахождение x , вообще говоря, очень трудоемко. Поэтому представляет интерес построение эффективных алгоритмов вычисления x для возможно более широкого класса матриц Φ .

Донохо, Сандерс и Чен [3] рассмотрели следующую задачу ℓ_1 -минимизации:

$$\|z\|_1 \rightarrow \min, \quad z \in \mathbb{R}^N, \quad \Phi z = y, \quad (P_1)$$

где $\|z\|_1 = |z_1| + \dots + |z_N|$. Они начали систематическое изучение задачи (P_1) и связали ее с исходной задачей.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00329 (все авторы)) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-6003.2012.1 (первый и третий авторы) и № НШ-6431.2012.1 (второй автор)).

Кандес, Ромберг и Тао (см. [4], [5]) доказали, что если матрица Φ обладает так называемым *свойством ограниченной изометрии* (Restricted Isometry Property) с соответствующими параметрами, то задача восстановления разреженного вектора x полностью сводится к (P_1) , т.е. выполнено следующее свойство:

$$\text{для любого } k\text{-разреженного вектора } x \in \mathbb{R}^N \text{ и } y = \Phi x \text{ решение задачи } \|z\|_1 \rightarrow \min, \Phi z = y, \text{ единственно и совпадает с } x. \quad (\star)$$

Из этого результата следует (см. [4], [6]) существование матриц Φ с условием $(\star)$ для всех k, n, N с условием $k \leq cn/\log(2N/n)$. Мы докажем, что при больших значениях k это невозможно.

ТЕОРЕМА 1. *Если при данных k, n, N существует $n \times N$ матрица Φ , обладающая свойством $(\star)$, то $k \leq \max(1, Cn/\log(2N/n))$.*

Здесь и далее через $c, C, C_1, C_2, \dots$ обозначаются абсолютные положительные постоянные.

Как обычно,

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= (|x_1|^p + \dots + |x_N|^p)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty; \\ \|x\|_\infty &= \max |x_i|. \end{aligned}$$

Обсудим подробнее некоторые результаты в теории сжатого измерения.

Кандес и Тао [5] ввели свойство *k-ограниченной изометрии* с константой $\delta_k \in [0, 1)$ для матрицы Φ , которое заключается в том, что для всех k -разреженных векторов x выполнено неравенство

$$(1 - \delta_k)\|x\|_2^2 \leq \|\Phi x\|_2^2 \leq (1 + \delta_k)\|x\|_2^2.$$

Они показали, что если $\delta_k + \delta_{2k} + \delta_{3k} < 1$, то для матрицы Φ выполняется свойство $(\star)$. Этот результат был уточнен в ряде работ. Кроме того, было доказано (см. [4], [6]), что случайные матрицы (с некоторым распределением вероятностей) удовлетворяют свойству k -ограниченной изометрии при фиксированном δ с вероятностью, близкой к единице, при $k \asymp n/\log(2N/n)$. Более того, эта оценка точна, см. [1]. Проблема построения явных примеров матриц со свойством ограниченной изометрии для больших k остается открытой, отметим в связи с этим работу [7].

Рядом авторов (см. [8]–[10]) отмечалась связь между задачей сжатого измерения и оценками поперечников конечномерных множеств. Важную роль в этих вопросах играет нуль-пространство $\mathcal{N}(\Phi) = \{x: \Phi x = 0\}$. Обозначим

$$\sigma_k(x) = \min \|x - \tilde{x}\|_1,$$

где минимум берется по k -разреженным векторам $\tilde{x}$. В [10] было доказано, что следующие три свойства эквивалентны:

- *слабое свойство сжатого измерения*: для любого $x \in \mathbb{R}^N$ и любого решения z задачи (P_1) имеет место неравенство $\|x - z\|_2 \leq C_1 k^{-1/2} \|x\|_1$;
- *сильное свойство сжатого измерения*, определяемое более сильным неравенством $\|x - z\|_2 \leq C_2 k^{-1/2} \sigma_k(x)$;
- *свойство поперечника*: $\|x\|_2 \leq C_3 k^{-1/2} \|x\|_1 \quad \forall x \in \mathcal{N}(\Phi)$.

(Эквивалентность понимается следующим образом: если выполнено свойство i с константой C_i , то выполняется и свойство j с константой $C_j = C_j(C_i)$.) В той же работе было отмечено, что из известных оценок поперечников $d^n(B_1^N, \ell_2^N) = d_n(B_2^N, \ell_\infty^N)$ (см. (4)) следует, что сильное свойство сжатого измерения имеет место лишь при $k \leq Cn/\log(2N/n)$. Эта оценка следует и из теоремы 1, поскольку сильное свойство сжатого измерения влечет свойство $(\star)$.

Весьма общий результат был получен в [11]. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^N$. Доказано, что если существует $\mathcal{A}$ такое, что

$$\|x - \mathcal{A}(\Phi x)\|_1 \leq B\sigma_k(x) \quad (1)$$

для любого $x \in \mathbb{R}^N$, то $k \leq B'n/\log(2N/n)$, где $B' = B'(B)$. Более того, если матрица Φ выбирается случайным образом и требуется лишь, чтобы неравенство (1) выполнялось с вероятностью не менее $3/4$, то справедлива та же оценка на k .

Особенность нашего результата в том, что мы рассматриваем только разреженные векторы x .

В работе Беньямини, Кроо и Пинкуса [12], посвященной L_1 -аппроксимации функций с малым носителем, введена важная характеристика α^* . Для $M \subset L^1(X, \mu)$ определяется

$$\alpha^*(M) = \sup \left\{ \alpha : \sup_{\substack{f \in M \\ f \neq 0}} \sup_{E: \mu(E) \leq \alpha} \frac{\int_E |f| d\mu}{\int_X |f| d\mu} \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

В [12] установлен ряд свойств α^* и указана связь с задачей сжатого измерения.

При доказательстве теоремы мы будем использовать близкую характеристику k^* . Для ненулевого вектора $x \in \mathbb{R}^N$ определим $k^*(x)$ как наименьшее число k такое, что $|x_{i_1}| + \dots + |x_{i_k}| \geq \|x\|_1/2$ для некоторых различных координат $i_1, \dots, i_k$.

Для $M \subset \mathbb{R}^N$ положим $k^*(M) = \min_{x \in M, x \neq 0} k^*(x)$. Легко видеть, что $k^*(M) = \alpha^*(M)$ или $k^*(M) = \alpha^*(M) - 1$ (при определении α^* мы считаем, что $\mathbb{R}^N$ есть L_1 с естественной дискретной мерой).

2. Переформулировка задачи в терминах k^* . Известно, что свойство $(\star)$ можно сформулировать в терминах нуль-пространства $\mathcal{N}(\Phi) = \{x: \Phi x = 0\}$. Соответствующее утверждение удобно записать, используя обозначение k^* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $k^* = k^*(\mathcal{N}(\Phi))$. Свойство $(\star)$ выполняется при $k < k^*$ и не выполняется при $k \geq k^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (приводится для полноты изложения). Задачу (P_1) можно записать в следующем виде:

$$\|x - w\|_1 \rightarrow \min, \quad w \in \mathcal{N}(\Phi).$$

Пусть I — носитель x , т.е. множество ненулевых координат, и $|I| < k^*$. Докажем, что $w = 0$ будет единственным решением. Пусть $w \in \mathcal{N}(\Phi)$ и $w \neq 0$. В силу определения k^* имеем

$$\sum_{i \in I} |w_i| < \frac{1}{2} \|w\|_1,$$

откуда

$$\sum_{i \in I} |w_i| < \sum_{i \notin I} |w_i|.$$

Следовательно,

$$\|x - w\|_1 = \sum_{i \in I} |x_i - w_i| + \sum_{i \notin I} |w_i| \geq \sum_{i \in I} |x_i| - \sum_{i \in I} |w_i| + \sum_{i \notin I} |w_i| > \sum_{i \in I} |x_i| = \|x\|_1.$$

Пусть теперь $k = k^*$. Найдется ненулевой вектор w такой, что $\sum_{i \in I} |w_i| \geq \|w\|_1/2$, $|I| = k^*$. Определим x и z :

$$x_i = \begin{cases} w_i, & i \in I, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad z = x - w.$$

Тогда $\Phi z = \Phi x - \Phi w = \Phi x$ и $\|z\|_1 = \sum_{i \notin I} |w_i| \leq \sum_{i \in I} |w_i| = \|x\|_1$. Следовательно, либо x не является решением задачи (P_1) , либо решение не единственно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для любого $k < k^*$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\sum_{i \in I} |w_i| \leq \left(\frac{1}{2} - \delta\right) \|w\|_1 \quad \forall w \in \mathcal{N}(\Phi) \quad \forall I: |I| = k.$$

Из этого свойства следует (аналогично доказательству предложения 1), что для любого $x \in \mathbb{R}^N$ любое решение z задачи (P_1) удовлетворяет неравенству

$$\|x - z\|_1 \leq \frac{1}{\delta} \sigma_k(x).$$

Предложение 1 является аналогом следующего результата [12]. Пусть M – линейное подпространство в $L^1(X, \mu)$. Для $f \in L^1(X, \mu)$ обозначим $\alpha(f) = \mu\{x \in X: f(x) \neq 0\}$. Тогда

- если $\alpha(f) < \alpha^*(M)$, то нуль является элементом наилучшего приближения функции f пространством M ;
- если $\alpha > \alpha^*(M)$, то найдется функция f , для которой $\alpha(f) \leq \alpha$ и нуль не является элементом наилучшего приближения функции f пространством M .

Из предложения 1 вытекает, что максимальное k , при котором существует матрица Φ со свойством $(\star)$, равно $k_{n,N}^* - 1$, где

$$k_{n,N}^* = \max_{\Phi} k^*(\mathcal{N}(\Phi)) = \max_{L: \dim L \geq N-n} k^*(L)$$

(максимум берется по линейным пространствам $L \subset \mathbb{R}^N$ коразмерности не выше n).

В случае $n = 1$ легко видеть, что $k_{1,N}^* = 1$; далее для удобства $n > 1$.

ТЕОРЕМА 2. При $2 \leq n < N$ имеют место соотношения

$$\max\left(2, \frac{C_1 n}{\log(2N/n)}\right) \leq k_{n,N}^* \leq \max\left(2, \frac{C_2 n}{\log(2N/n)}\right). \quad (2)$$

Теорема 1 следует из оценки сверху на k^* . Оценка снизу $k^* \geq C_1 n / \log(2N/n)$ вытекает из упомянутых во введении результатов о существовании матриц Φ с условием $(\star)$. Отметим, что из неравенства $k^* \geq 2$ следует, что два линейных измерения позволяют восстановить 1-разреженный вектор с помощью (P_1) .

Напомним некоторые определения, которые понадобятся для исследования $k_{n,N}^*$. Пусть X – нормированное пространство, $A, B \subset X$. *Уклонением* от A до B называется величина

$$d(A, B)_X = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|_X.$$

Поперечник по Колмогорову множества $K \subset X$ определяется как

$$d_n(K, X) = \inf_{L: \dim L \leq n} d(K, L)_X,$$

где инфимум берется по линейным подпространствам $L \subset X$ размерности не выше n .

В дальнейшем $X = \ell_p^N$, B_p^N – единичный шар ℓ_p^N , $d(A, B)_\infty = d(A, B)_{\ell_\infty^N}$.

Рассмотрим множество

$$V_k = V_k^N = \left\{ (v_1, \dots, v_N) : v_j \in \{-1, 0, 1\}, \sum_{j=1}^N |v_j| = k \right\}.$$

Очевидно, что

$$k^*(x) \leq k \iff \max_{v \in V_k} \frac{\langle x, v \rangle}{\|x\|_1} \geq \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Пусть L – линейное подпространство в $\mathbb{R}^N$; обозначим $L^\perp = \{l' \in \mathbb{R}^N : \forall l \in L \langle l, l' \rangle = 0\}$. Тогда

$$k^*(L) \leq k \iff d(V_k, L^\perp)_\infty \geq \frac{1}{2}.$$

Действительно, возьмем в (3) максимум по ненулевым $x \in L$:

$$k^*(L) \leq k \iff \max_{x \in L, x \neq 0} \max_{v \in V_k} \frac{\langle x, v \rangle}{\|x\|_1} \geq \frac{1}{2}.$$

Из теоремы двойственности Никольского [13] следует, что

$$\max_{x \in L, x \neq 0} \frac{\langle x, v \rangle}{\|x\|_1} = d(v, L^\perp)_\infty,$$

откуда получается нужное утверждение.

В качестве следствия получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеем*

$$k_{n,N}^* \leq k \iff d_n(V_k^N, \ell_\infty^N) \geq \frac{1}{2}.$$

В следующем разделе мы оценим поперечник множества V_k и тем самым завершим доказательство теорем.

3. Оценка поперечника $d_n(V_k^N, \ell_\infty^N)$. Оценим $k^* = k_{n,N}^*$ снизу. Неравенство $k^* \geq 2$ следует из того, что $d_2(V_1^N, \ell_\infty^N) = d_2(B_1^N, \ell_\infty^N) < 1/2$. Этот поперечник был вычислен Ходулевым [14]:

$$d_2(B_1^N, \ell_\infty^N) = \frac{\cos(\pi/N)}{1 + \cos(\pi/N)}.$$

В качестве пространства L коразмерности 2 со свойством $k^*(L) = 2$ можно взять $L = \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N x_k \zeta^k = 0\}$, где $\zeta = \exp(\pi i/N)$.

В общем случае заметим, что $V_k^N \subset \sqrt{k} B_2^N$, откуда интересующий нас поперечник не превосходит $\sqrt{k} \cdot d_n(B_2^N, \ell_\infty^N)$. Применим результат о поперечниках евклидова шара (Кашин [15], Глускин, Гарнаев [16]):

$$C_1 \min\left(1, \sqrt{\frac{\log(2N/n)}{n}}\right) \leq d_n(B_2^N, \ell_\infty^N) \leq C_2 \min\left(1, \sqrt{\frac{\log(2N/n)}{n}}\right). \quad (4)$$

Отсюда получим, что

$$d_n(V_k^N, \ell_\infty^N) < \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad k < \frac{Cn}{\log(2N/n)},$$

откуда

$$k^* \geq \frac{Cn}{\log(2N/n)}.$$

Оценим k^* сверху. В любом подпространстве $L \subset \mathbb{R}^N$ коразмерности n найдется $(n+1)$ -разреженный вектор. Следовательно,

$$k^* \leq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil.$$

Поэтому если N/n не очень велико, то неравенство $k^* \leq Cn/\log(2N/n)$ выполняется за счет выбора большой константы C .

Предположим, что $d(V_{4l}^N, L)_\infty < 1/2$ для некоторого n -мерного пространства L , и покажем, что при $l = \lceil n \log(11)/\log(2N/n) \rceil$ и достаточно малом n/N это невозможно.

Возьмем семейство $\mathcal{I}$ множеств $I \subset \{1, \dots, N\}$ со следующими свойствами:

- $|I| = 3l$ для любого $I \in \mathcal{I}$;
- $|I \cap J| \leq l$ для любых $I, J \in \mathcal{I}$, $I \neq J$;
- $|\mathcal{I}| \geq (cN/l)^l$.

Это возможно, поскольку существует $\binom{N}{3l} \geq (N/(3l))^{3l}$ множеств I с условием $|I| = 3l$ и для каждого такого I количество множеств J с условием $|I \cap J| > l$ не больше $2^{3l} \binom{N}{2l} \leq 2^{3l} (eN/(2l))^{2l}$.

Каждому множеству $I \in \mathcal{I}$ сопоставим функционал $\xi_I: x \mapsto \sum_{i \in I} x_i/|I|$. Ограничим эти функционалы на L и рассмотрим их как элементы двойственного пространства L^* (норма на L индуцируется из ℓ_∞^N). Поскольку $\|\xi_I\| \leq 1$, то при выполнении неравенства $|\mathcal{I}| > 11^n$ обязательно найдется пара функционалов ξ_{I_0}, ξ_{J_0} на расстоянии не больше $1/5$ (иначе шары радиуса $1/10$ вокруг ξ_I не пересекаются и лежат

внутри шара радиуса $1 + 1/10$, что невозможно по соображениям объема). Это означает, что

$$|\xi_{I^0}(x) - \xi_{J^0}(x)| \leq \frac{1}{5} \|x\|_\infty \quad \forall x \in L. \quad (5)$$

Докажем, что $|\mathcal{I}| > 11^n$; для этого установим неравенство

$$\left(\frac{cN}{l}\right)^l > 11^n. \quad (6)$$

Если $n \leq 2/c$ и n/N достаточно мало, то $l = 1$ и неравенство (6) выполнено. Пусть $n > 2/c$. Тогда $l = \lceil n \log(11)/\log(2N/n) \rceil < cn/2$, откуда $(cN/l)^l > (2N/n)^l \geq 11^n$.

Построим $v \in V_{4l}$ следующим образом:

$$\begin{cases} v_{i_1}, \dots, v_{i_{2l}} = 1, & \text{для некоторых } i_1, \dots, i_{2l} \in I^0 \setminus J^0, \\ v_{j_1}, \dots, v_{j_{2l}} = -1, & \text{для некоторых } j_1, \dots, j_{2l} \in J^0 \setminus I^0, \\ v_l = 0, & \text{при остальных } l. \end{cases}$$

В силу предположения найдется $v' \in L$, для которого $\|v - v'\|_\infty \leq 1/2$. Очевидно,

$$v'_{i_1}, \dots, v'_{i_{2l}} \geq \frac{1}{2}, \quad v'_{j_1}, \dots, v'_{j_{2l}} \leq -\frac{1}{2}, \quad |v'_l| \leq \frac{1}{2} \quad \text{при остальных } l,$$

откуда $\xi_{I^0}(v') \geq 1/6$, $\xi_{J^0}(v') \leq -1/6$. При этом $\|v'\|_\infty \leq \|v\|_\infty + 1/2 = 3/2$, откуда в силу (5) получим $|(\xi_{I^0} - \xi_{J^0})(v')| \leq 1/5 \cdot 3/2 < 1/3$. Противоречие.

Таким образом, мы доказали, что $d_n(V_{4l}^N, \ell_\infty^N) \geq 1/2$. Следовательно, $k^* \leq 4l \leq \max(4, Cn/\log(2N/n))$. Для доказательства неравенства с $\max(2, \dots)$ нужно рассмотреть множество V_2 и семейство $\mathcal{I} = \{\{1\}, \dots, \{N\}\}$. Если $N > 11^n$, то мы повторяем предыдущие рассуждения. Если $N \leq 11^n$, то дело решает выбор подходящей константы C .

ЗАМЕЧАНИЕ. Неравенство $d_n(V_k^N, \ell_\infty^N) \geq \alpha$ при фиксированном $\alpha < 1/2$ и соответствующих k можно доказать так же, как в [16].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. A. Davenport, M. F. Duarte, Y. C. Eldar, G. Kutyniok, “Introduction to compressed sensing”, *Compressed Sensing*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012, 1–64.
- [2] M. Fornasier, H. Rauhut, “Compressive sensing”, *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*, Springer-Verlag, Berlin, 2011, 187–228.
- [3] S. S. Chen, D. L. Donoho, M. A. Saunders, “Atomic decomposition by basis pursuit”, *SIAM Rev.*, **43:1** (2001), 129–159.
- [4] E. J. Candès, J. K. Romberg, T. Tao, “Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **59:8** (2006), 1207–1223.
- [5] E. J. Candès, T. Tao, “Decoding by linear programming”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **51:12** (2005), 4203–4215.
- [6] R. Baraniuk, M. Davenport, R. DeVore, M. Wakin, “A simple proof of the restricted isometry property for random matrices”, *Constr. Approx.*, **28:3** (2008), 253–263.
- [7] J. Bourgain, S. Dilworth, K. Ford, S. Konyagin, D. Kutzarova, “Explicit constructions of RIP matrices and related problems”, *Duke Math. J.*, **159:1** (2011), 145–185.

- [8] D.L. Donoho, “Compressed sensing”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **52**:4 (2006), 1289–1306.
- [9] A. Cohen, W. Dahmen, R. DeVore, “Compressed sensing and k -term approximation”, *J. Amer. Math. Soc.*, **22**:1 (2009), 211–231.
- [10] Б. С. Кашин, В. Н. Темляков, “Замечание о задаче сжатого измерения”, *Матем. заметки*, **82**:6 (2007), 829–837.
- [11] K. D. Ba, P. Indyk, E. Price, D. P. Woodruff, “Lower bounds for sparse recovery”, *Proceedings of the Twenty-First Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SIAM, Philadelphia, PA, 2010, 1190–1197.
- [12] Y. Benyamini, A. Kroó, A. Pinkus, “ L^1 -Approximation and finding solutions with small support”, *Constr. Approx.*, **36**:3 (2012), 399–431.
- [13] С. М. Никольский, “Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **10**:3 (1946), 207–256.
- [14] А. Б. Ходулев, “Некоторые точные значения колмогоровских поперечников в конечномерных пространствах”, *Препринты ИПМ*, 1988, 185.
- [15] Б. С. Кашин, “Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:2 (1977), 334–351.
- [16] А. Ю. Гарнаев, Е. Д. Глушкин, “О поперечниках евклидова шара”, *ДАН СССР*, **277**:5 (1984), 1048–1052.

С. В. Конягин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
г. Москва
E-mail: konyagin23@gmail.com

Поступило

15.11.2012

Исправленный вариант

06.05.2013

Ю. В. Малыхин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
г. Москва
E-mail: jura05@narod.ru

К. С. Рютин

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: ksrutin@zmail.ru