Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Г. Вьяс, К. Н. Дарджи, Абсолютная сходимость кратных рядов Фурье, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 1, 81–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10273>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:32:31

Абсолютная сходимость кратных рядов Фурье

Р. Г. Вьяс, К. Н. Дарджи

Получены достаточные условия для β -абсолютной сходимости ($0 < \beta \leq 2$) кратных рядов Фурье функций из классов

$$L^2([0, 2\pi]^N), \quad (\Lambda^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^N)BV^{(p)}([0, 2\pi]^N), \quad r - BV([0, 2\pi]^N).$$

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm10273

1. Введение. Достаточные условия для абсолютной сходимости рядов Фурье функций из классов $\Lambda BV^{(p)}(\mathbb{T})$ и $\varphi \Lambda BV(\mathbb{T})$, где $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$ – тор, были получены как обобщение классического результата Зигмунда, Шрамма и Ватермана [1]. Дальнейшее обобщение этих результатов дало достаточные условия для β -абсолютной сходимости ($0 < \beta \leq 2$) рядов Фурье функций из этих же классов [2]. В 1947 г. Минакшисундаран и Сас [3] получили достаточные условия для абсолютной сходимости кратных рядов Фурье функций из класса $\text{Lip}(\alpha)$. Недавно, обобщая этот результат, Мориц и Верес ([4] и [5]) доказали ряд утверждений для β -абсолютной сходимости кратных рядов Фурье липшицевых функций нескольких переменных и функций ограниченной s -вариации от нескольких переменных. В данной работе получены достаточные условия для β -абсолютной сходимости кратных рядов Фурье функций нескольких переменных из классов

$$L^2([0, 2\pi]^N), \quad (\Lambda^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^N)BV^{(p)}([0, 2\pi]^N), \quad r - BV([0, 2\pi]^N).$$

2. Обозначения и определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Для заданной функции $f \in L^p(\mathbb{T}^2)$, $1 \leq p < \infty$, ее p -интегральный модуль непрерывности определяется формулой

$$\omega^{(p)}(f; \delta_1, \delta_2) = \sup \left\{ \left(\frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{T}^2} |\Delta f(x, y; h_1, h_2)|^p dx dy \right)^{1/p} : h_1 \in (0, \delta_1], h_2 \in (0, \delta_2] \right\},$$

$\delta_1, \delta_2 > 0$, где

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y; h_1, h_2) &= (T_{h_1, h_2} f - T_{0, h_2} f - T_{h_1, 0} f + f)(x, y), \\ (T_{h, k} f)(x, y) &= f(x + h, y + k). \end{aligned}$$

Заметим, что в случае $p = \infty$ индекс p можно опустить, и тогда модуль непрерывности в определении 2.1 обозначается как $\omega(f; \delta_1, \delta_2)$.

Будем говорить, что функция $f \in \mathbf{C}(\overline{\mathbb{T}}^2)$ *липшицева порядка* (α_1, α_2) , где $0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ (т.е. $f \in \text{Lip}(\alpha_1, \alpha_2)(\overline{\mathbb{T}}^2)$), если

$$\omega(f; \delta_1, \delta_2) = O(\delta_1^{\alpha_1} \delta_2^{\alpha_2}).$$

Рассмотрим функцию f на $\mathbb{R}^k$. При $k = 1$ и $I = [a, b]$ определим $f(I) = f(b) - f(a)$. При $k = 2$, $I = [a, b]$ и $J = [c, d]$ определим

$$f(I \times J) = f(I, d) - f(I, c) = f(b, d) - f(a, d) - f(b, c) + f(a, c).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $\mathbb{L}$ – класс всех неубывающих последовательностей $\Lambda' = \{\lambda'_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, положительных чисел таких, что сумма $\sum_n 1/\lambda'_n$ расходится. При заданных $\Lambda^1 = \{\lambda^1_n\}$, $\Lambda^2 = \{\lambda^2_n\} \in \mathbb{L}$ и $p \geq 1$ комплекснозначная измеримая функция f , определенная на прямоугольнике $R := [a, b] \times [c, d]$, называется *функцией p -(Λ^1, Λ^2)-ограниченной вариации* (т.е. $f \in (\Lambda^1, \Lambda^2)BV^{(p)}(R)$), если

$$V_{\Lambda^p}(f, R) = \sup_{I_1, I_2} \left(\sum_k \sum_j \frac{|f(I_k \times I_j)|^p}{\lambda^1_k \lambda^2_j} \right) < \infty,$$

где I_1 и I_2 – конечные множества непересекающихся подинтервалов $\{I_k\}$ и $\{I_j\}$, принадлежащих интервалам $[a, b]$ и $[c, d]$ соответственно.

Если $f \in (\Lambda^1, \Lambda^2)BV^{(p)}(R)$ такая, что маргинальные функции $f(a, \cdot)$ и $f(\cdot, c)$ принадлежат классам $\Lambda^2 BV^{(p)}[c, d]$ и $\Lambda^1 BV^{(p)}[a, b]$ соответственно (определение класса $\Lambda BV^{(p)}[a, b]$ можно найти в [1; с. 115]), то f называется *функцией p -(Λ^1, Λ^2)*-ограниченной вариации над R* (т.е. $f \in (\Lambda^1, \Lambda^2)^*BV^{(p)}(R)$). Если $f \in (\Lambda^1, \Lambda^2)^*BV^{(p)}(R)$, то f ограничена и каждая из маргинальных функций $f(\cdot, t)$ и $f(s, \cdot)$ принадлежит классу $\Lambda^1 BV^{(p)}[a, b]$ и $\Lambda^2 BV^{(p)}[c, d]$ соответственно, где $t \in [c, d]$ и $s \in [a, b]$ фиксированы.

Заметим, что при $\Lambda = \Lambda^1$ и $\Lambda^2 = \{1\}$ (т.е. при $\lambda_n = \lambda^1_n$ и $\lambda^2_n = 1$ для всех n), классы $(\Lambda^1, \Lambda^2)BV^{(p)}(R)$ и $(\Lambda^1, \Lambda^2)^*BV^{(p)}(R)$ сводятся к классам $\Lambda BV^{(p)}(R)$ и $\Lambda^*BV^{(p)}(R)$ соответственно; при $p = 1$ индекс p опускается и классы $(\Lambda^1, \Lambda^2)BV^{(p)}(R)$, $(\Lambda^1, \Lambda^2)^*BV^{(p)}(R)$, $\Lambda BV^{(p)}(R)$ и $\Lambda^*BV^{(p)}(R)$ сводятся к классам $(\Lambda^1, \Lambda^2)BV(R)$ [6; определение 2], $(\Lambda^1, \Lambda^2)^*BV(R)$, $\Lambda BV(R)$ и $\Lambda^*BV(R)$ соответственно, а при $\Lambda = \{1\}$ классы $\Lambda BV(R)$ и $\Lambda^*BV(R)$ сводятся к классам $BV_V(R)$ (класс функций ограниченной вариации в смысле Витали) и $BV_H(R)$ (класс функций ограниченной вариации в смысле Харди) соответственно.

Заметим, что характеристическая функция множества $E = \{(x, y) : x \in [0, 1], y \in [0, 1 - x]\}$ принадлежит классу $\Lambda BV^{(p)}([0, 1]^2)$ только при условии, что

$$\sum_n \frac{1}{\lambda^2_n} < \infty. \quad (1)$$

Если Λ удовлетворяет неравенству (1), то условие измеримости функций в определении 2.2 не может быть опущено; в противном случае класс $\Lambda BV^{(p)}$ содержит функции, которые не являются измеримыми по Лебегу. Дьяченко и Ватерман [7; предложение 1] построили пример существования всюду разрывной функции $f \in \Lambda BV(R)$ даже при выполнении условия измеримости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Для заданного положительного целого числа r комплекснозначная функция f , определенная на прямоугольнике $R := [a, b] \times [c, d]$, называется функцией r -ограниченной вариации (т.е. $f \in r - BV(R)$), если выполняются следующие два условия:

(i) выполнено

$$V_r(f, R) = \sup_{P=P_1 \times P_2} \left(\sum_{i=1}^{m-r} \sum_{j=1}^{n-r} |\Delta^r f(x_i, y_j)| \right) < \infty,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta f(x_i, y_j) &= \Delta f(x_i, y_j; \Delta x_i, \Delta y_i), & \Delta x_i &= x_i - x_{i-1}, \\ P_1 : a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b, & P_2 : c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d, \\ \Delta^k f(x_i, y_j) &= \Delta^{k-1}(\Delta f(x_i, y_j)), & k &\geq 2, \end{aligned}$$

так что

$$\Delta^r f(x_i, y_j) = \sum_{s=1}^r \sum_{t=1}^r (-1)^{s+t} \binom{r}{s} \binom{r}{t} f(x_{i+r-s}, y_{j+r-t});$$

(ii) маргинальные функции $f(\cdot, c)$ и $f(a, \cdot)$ принадлежат классам $r - BV([a, b])$ и $r - BV([c, d])$.

Легко доказать, что если $f \in r - BV(R)$, то функция f ограничена на R .

3. Новые результаты для функций двух переменных. Для любых $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$ и $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ их скалярное произведение записывается как $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_1 x_1 + k_2 x_2$.

Для любой $f \in L^1(\overline{\mathbb{T}}^2)$ (функция f 2π -периодическая по каждой из переменных) ее ряд Фурье определен как

$$f(\mathbf{x}) \sim \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})},$$

где

$$\widehat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\overline{\mathbb{T}}^2} f(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d\mathbf{x}$$

– $\mathbf{k}$ -й коэффициент Фурье функции f .

Введем обозначение

$$S_2 := \sum_{|k_1|=1}^{\infty} \sum_{|k_2|=1}^{\infty} |\widehat{f}(k_1, k_2)|^\beta, \quad 0 < \beta \leq 2.$$

В дальнейшем будем считать, что C – это положительные константы, которые могут принимать различные значения в разных ситуациях.

Мы докажем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 3.1. Если $f \in L^2(\overline{\mathbb{T}}^2)$, то

$$S_2 \leq C \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{(\omega^{(2)}(f; \pi/k_1, \pi/k_2))^\beta}{(k_1 k_2)^{\beta/2}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Если $f \in \text{Lip}(\alpha_1, \alpha_2)(\overline{\mathbb{T}}^2)$, $0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$, то при

$$\beta > \max\left\{\frac{2}{2\alpha_1 + 1}, \frac{2}{2\alpha_2 + 1}\right\}$$

выполняется неравенство

$$\sum_{|k_1| \geq 1} \sum_{|k_2| \geq 1} |\widehat{f}(k_1, k_2)|^\beta < \infty. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 3.3. Если $f \in (\Lambda^1, \Lambda^2)BV(\overline{\mathbb{T}}^2) \cap \mathbf{C}(\overline{\mathbb{T}}^2)$, то

$$S_2 \leq C \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \left(\frac{\omega(f; \pi/k_1, \pi/k_2)}{k_1 k_2 (\sum_{r_1=1}^{k_1} \sum_{r_2=1}^{k_2} 1/(\lambda_{r_1}^1 \lambda_{r_2}^2))} \right)^{\beta/2}. \quad (3)$$

СЛЕДСТВИЕ 3.4. (i) Если $f \in (\Lambda^1, \Lambda^2)^*BV(\overline{\mathbb{T}}^2)$, то выполняется неравенство (3).

(ii) Если $f \in BV_V(\overline{\mathbb{T}}^2) \cap \mathbf{C}(\overline{\mathbb{T}}^2)$, то

$$S_2 \leq C \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{(\omega(f; \pi/k_1, \pi/k_2))^{\beta/2}}{(k_1 k_2)^\beta}. \quad (4)$$

(iii) Если $f \in BV_V(\overline{\mathbb{T}}^2) \cap \text{Lip}(\alpha_1, \alpha_2)(\overline{\mathbb{T}}^2)$, $0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$, то неравенство (2) выполняется при

$$\beta > \max\left\{\frac{2}{2 + \alpha_1}, \frac{2}{2 + \alpha_2}\right\}.$$

ТЕОРЕМА 3.5. Если $f \in (\Lambda^1, \Lambda^2)^*BV^{(p)}(\overline{\mathbb{T}}^2)$, $1 \leq p < 2r$, $1 < r < \infty$, то

$$S_2 \leq C \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \left(\frac{(\omega^{((2-p)s+p)}(f; \pi/k_1, \pi/k_2))^{2-p/r}}{k_1 k_2 (\sum_{r_1=1}^{k_1} \sum_{r_2=1}^{k_2} 1/(\lambda_{r_1}^1 \lambda_{r_2}^2))^{1/r}} \right)^{\beta/2},$$

где $1/r + 1/s = 1$.

ТЕОРЕМА 3.6. Если $f \in r - BV(\overline{\mathbb{T}}^2)$, то выполняется неравенство (4).

Будем говорить, что ряд Фурье функции f сходится β -абсолютно, если

$$\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k_1, k_2)|^\beta < \infty, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k_1, k_2)|^\beta \\ &= \sum_{k_1 \geq 1} \sum_{k_1 \geq 1} |\widehat{f}(k_1, k_2)|^\beta + \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k_1, 0)|^\beta + \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(0, k_2)|^\beta - |\widehat{f}(0, 0)|^\beta. \end{aligned}$$

Здесь при $\beta = 1$ имеет место абсолютная сходимость ряда Фурье функции f .

Если функция $f \in L^1(\overline{\mathbb{T}}^2)$ удовлетворяет условию

$$\widehat{f}(k_1, k_2) = 0 \quad \text{при} \quad k_1 = 0 \quad \text{или} \quad k_2 = 0, \quad (6)$$

то условие (2) является достаточным условием для β -абсолютной сходимости ряда Фурье функции f .

Если условие (6) не выполняется, то будем действовать следующим образом.

В частном случае, когда $k_1 = 0$ или $k_2 = 0$, будем писать

$$\widehat{f}(k_1, 0) = \widehat{f}_1(k_1), \quad \text{где} \quad f_1(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{T}; \quad (7)$$

$$\widehat{f}(0, k_2) = \widehat{f}_2(k_2), \quad \text{где} \quad f_2(y) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x, y) dx, \quad y \in \mathbb{T}. \quad (8)$$

Объединяя результаты относительно β -абсолютной сходимости ряда Фурье функции одной переменной, полученные в [8; теорема 3.10, V. I, с. 243] и [8; теорема 3.13, V. I, с. 243], со следствием 3.2 и следствием 3.4, (iii) соответственно, получим следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 3.7. Если $f \in \text{Lip}(\alpha_1, \alpha_2)(\overline{\mathbb{T}}^2)$, $f_1 \in \text{Lip}(\alpha_3)(\overline{\mathbb{T}})$ и $f_2 \in \text{Lip}(\alpha_4)(\overline{\mathbb{T}})$ при $\alpha_j \in (0, 1]$, $j = 1, 2, 3, 4$, где функции f_1 и f_2 определены в (7) и (8), то ряд Фурье функции f сходится β -абсолютно при

$$\beta > \max \left\{ \frac{2}{2\alpha_1 + 1}, \frac{2}{2\alpha_2 + 1}, \frac{2}{2\alpha_3 + 1}, \frac{2}{2\alpha_4 + 1} \right\}.$$

Из следствия 3.7 вытекает, что если $f \in \text{Lip}(\alpha_1, \alpha_2)(\overline{\mathbb{T}}^2)$, $f_1 \in \text{Lip}(\alpha_3)(\overline{\mathbb{T}})$ и $f_2 \in \text{Lip}(\alpha_4)(\overline{\mathbb{T}})$ при $\alpha_j \in (1/2, 1]$, $j = 1, 2, 3, 4$, то ряд Фурье функции f сходится абсолютно.

СЛЕДСТВИЕ 3.8. Если $f \in BV_V(\overline{\mathbb{T}}^2) \cap \text{Lip}(\alpha_1, \alpha_2)(\overline{\mathbb{T}}^2)$, $f_1 \in BV(\overline{\mathbb{T}}) \cap \text{Lip}(\alpha_3)(\overline{\mathbb{T}})$ и $f_2 \in BV(\overline{\mathbb{T}}) \cap \text{Lip}(\alpha_4)(\overline{\mathbb{T}})$ при $\alpha_j \in (0, 1]$, $j = 1, 2, 3, 4$, где функции f_1 и f_2 определены в (7) и (8), то ряд Фурье функции f сходится β -абсолютно при

$$\beta > \max \left\{ \frac{2}{2 + \alpha_1}, \frac{2}{2 + \alpha_2}, \frac{2}{2 + \alpha_3}, \frac{2}{2 + \alpha_4} \right\}.$$

Из следствия 3.8 вытекает, что если $f \in BV_V(\overline{\mathbb{T}}^2) \cap \text{Lip}(\alpha_1, \alpha_2)(\overline{\mathbb{T}}^2)$, $f_1 \in BV(\overline{\mathbb{T}}) \cap \text{Lip}(\alpha_3)(\overline{\mathbb{T}})$ и $f_2 \in BV(\overline{\mathbb{T}}) \cap \text{Lip}(\alpha_4)(\overline{\mathbb{T}})$ при $\alpha_j \in (0, 1]$, $j = 1, 2, 3, 4$, то ряд Фурье функции f сходится абсолютно.

Аналогично, объединяя теорему 3.1 и результат, полученный в [9; теорема 2, при $n_k = k$ для всех k и $r = 1$, с. 116], или теорему 3.3 и результат, полученный в [10; теорема 1, при $n_k = k$ для всех k , с. 131], легко получить достаточные условия, которым должны удовлетворять функции f , f_1 и f_2 для того, чтобы ряд Фурье функции f сходился β -абсолютно. Наконец, объединяя теорему 3.5 и результат, полученный в [2; теорема 1, при $n_k = k$ для всех k , с. 770], или теорему 3.6 и результат, полученный в [10; теорема 3, при $n_k = k$ для всех k , с. 132], легко получить достаточные условия, которым должны удовлетворять функции f , f_1 и f_2 для того, чтобы ряд Фурье функции f сходился β -абсолютно.

4. Доказательство новых результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Пусть заданы $h_1, h_2 > 0$. Если положить

$$g(x_1, x_2) = \Delta f(x_1, x_2; h_1, h_2) \quad \text{для всех} \quad (x_1, x_2) \in \overline{\mathbb{T}}^2,$$

то для любых $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ получим

$$\widehat{g}(k_1, k_2) = -4\widehat{f}(k_1, k_2)e^{ih_1k_1/2}e^{ih_2k_2/2}\sin\frac{h_1k_1}{2}\sin\frac{h_2k_2}{2}.$$

Из того, что $f \in L^2(\overline{\mathbb{T}}^2)$, следует, что $g \in L^2(\overline{\mathbb{T}}^2)$. Таким образом, из формулы Парсеваля получим

$$\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}(k_1, k_2) \sin\frac{h_1k_1}{2} \sin\frac{h_2k_2}{2} \right|^2 = O(\|g\|_2^2).$$

Полагая $h_1 = \pi/2^{t_1}$ и $h_2 = \pi/2^{t_2}$, где $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$, и принимая во внимание, что

$$\frac{\pi}{4} \leq \frac{|k_j|\pi}{2^{t_j+1}} < \frac{\pi}{2}, \quad 2^{t_j-1} \leq |k_j| < 2^{t_j} \quad \text{при } j = 1, 2, \quad (9)$$

получим

$$S_{t_1 t_2} \equiv \sum_{2^{t_1-1} \leq |k_1| < 2^{t_1}} \sum_{2^{t_2-1} \leq |k_2| < 2^{t_2}} |\widehat{f}(k_1, k_2)|^2 = O(\|g\|_2^2).$$

Таким образом,

$$S_{t_1 t_2} = O\left(\left(\omega^{(2)}\left(f; \frac{\pi}{2^{t_1}}, \frac{\pi}{2^{t_2}}\right)\right)^2\right).$$

Теперь при $0 < \beta \leq 2$, применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{2^{t_1-1} \leq |k_1| < 2^{t_1}} \sum_{2^{t_2-1} \leq |k_2| < 2^{t_2}} |\widehat{f}(k_1, k_2)|^\beta \\ &= O(2^{t_1} 2^{t_2})^{1-\beta/2} \left(\sum_{2^{t_1-1} \leq |k_1| < 2^{t_1}} \sum_{2^{t_2-1} \leq |k_2| < 2^{t_2}} |\widehat{f}(k_1, k_2)|^2 \right)^{\beta/2} \\ &= O\left(2^{t_1} 2^{t_2} \frac{(\omega^{(2)}(f; \pi/2^{t_1}, \pi/2^{t_2}))^\beta}{(2^{t_1} 2^{t_2})^{\beta/2}}\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{|k_1|=1}^\infty \sum_{|k_2|=1}^\infty |\widehat{f}(k_1, k_2)|^\beta &= \sum_{t_1=1}^\infty \sum_{t_2=1}^\infty \sum_{2^{t_1-1} \leq |k_1| < 2^{t_1}} \sum_{2^{t_2-1} \leq |k_2| < 2^{t_2}} |\widehat{f}(k_1, k_2)|^\beta \\ &= O\left(\sum_{t_1=1}^\infty \sum_{t_2=1}^\infty 2^{t_1} 2^{t_2} \frac{(\omega^{(2)}(f; \pi/2^{t_1}, \pi/2^{t_2}))^\beta}{(2^{t_1} 2^{t_2})^{\beta/2}}\right), \end{aligned}$$

что доказывает теорему.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3. Для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$ рассмотрим соотношение

$$\begin{aligned} & \Delta f_{r_1 r_2} \left(x_1, x_2; \frac{\pi}{2^{t_1}}, \frac{\pi}{2^{t_2}} \right) \\ &= f \left(x_1 + \frac{r_1 \pi}{2^{t_1}}, x_2 + \frac{r_2 \pi}{2^{t_2}} \right) - f \left(x_1 + \frac{(r_1 - 1)\pi}{2^{t_1}}, x_2 + \frac{r_2 \pi}{2^{t_2}} \right) \\ & \quad - f \left(x_1 + \frac{r_1 \pi}{2^{t_1}}, x_2 + \frac{(r_2 - 1)\pi}{2^{t_2}} \right) + f \left(x_1 + \frac{(r_1 - 1)\pi}{2^{t_1}}, x_2 + \frac{(r_2 - 1)\pi}{2^{t_2}} \right). \end{aligned}$$

Далее, для любых $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\begin{aligned} & \widehat{\Delta f}_{r_1 r_2}(k_1, k_2) \\ &= -4\widehat{f}(k_1, k_2)e^{ik_1(r_1-1/2)\pi/2^{t_1}}e^{ik_2(r_2-1/2)\pi/2^{t_2}}\sin\frac{k_1 r_1 \pi}{2^{t_1+1}}\sin\frac{k_2 r_2 \pi}{2^{t_2+1}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как $f \in L^2(\overline{\mathbb{T}}^2)$, из формулы Парсеваля следует, что

$$\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}(k_1, k_2) \sin\frac{r_1 k_1 \pi}{2^{t_1+1}} \sin\frac{r_2 k_2 \pi}{2^{t_2+1}} \right|^2 = O(\|\Delta f_{r_1 r_2}\|_2^2).$$

В силу условий (9) имеем

$$\begin{aligned} S_{t_1 t_2} &\equiv \sum_{2^{t_1-1} \leq |k_1| < 2^{t_1}} \sum_{2^{t_2-1} \leq |k_2| < 2^{t_2}} |\widehat{f}(k_1, k_2)|^2 \\ &= O\left(\iint_{\overline{\mathbb{T}}^2} \left| \Delta f_{r_1 r_2}\left(x_1, x_2; \frac{\pi}{2^{t_1}}, \frac{\pi}{2^{t_2}}\right) \right|^2 dx_1 dx_2\right) \end{aligned} \quad (11)$$

для всех $r_1 = 1, \dots, 2^{t_1}$ и для всех $r_2 = 1, \dots, 2^{t_2}$.

Умножая обе части этого уравнения на $1/(\lambda_{r_1}^1 \lambda_{r_2}^2)$ и суммируя по $r_1 = 1, \dots, 2^{t_1}$ и $r_2 = 1, \dots, 2^{t_2}$, получим

$$\begin{aligned} S_{t_1 t_2} &= O\left(\frac{1}{\sum_{r_1=1}^{2^{t_1}} \sum_{r_2=1}^{2^{t_2}} 1/(\lambda_{r_1}^1 \lambda_{r_2}^2)}\right) \\ &\quad \times \left(\iint_{\overline{\mathbb{T}}^2} \sum_{r_1=1}^{2^{t_1}} \sum_{r_2=1}^{2^{t_2}} \frac{|\Delta f_{r_1 r_2}(x_1, x_2; \pi/2^{t_1}, \pi/2^{t_2})|^2}{\lambda_{r_1}^1 \lambda_{r_2}^2} dx_1 dx_2\right). \end{aligned}$$

Так как

$$\left| \Delta f_{r_1 r_2}\left(x_1, x_2; \frac{\pi}{2^{t_1}}, \frac{\pi}{2^{t_2}}\right) \right| = O\left(\omega\left(f; \frac{\pi}{2^{t_1}}, \frac{\pi}{2^{t_2}}\right)\right), \quad f \in (\Lambda^1, \Lambda^2)BV(\overline{\mathbb{T}}^2),$$

получим

$$\sum_{r_1=1}^{2^{t_1}} \sum_{r_2=1}^{2^{t_2}} \frac{|\Delta f_{r_1 r_2}(x_1, x_2; \pi/2^{t_1}, \pi/2^{t_2})|}{\lambda_{r_1}^1 \lambda_{r_2}^2} = O(1).$$

Таким образом, имеем

$$S_{t_1 t_2} = O\left(\frac{\omega(f; \pi/2^{t_1}, \pi/2^{t_2})}{\sum_{r_1=1}^{2^{t_1}} \sum_{r_2=1}^{2^{t_2}} 1/(\lambda_{r_1}^1 \lambda_{r_2}^2)}\right).$$

Теперь, применяя неравенство Гёльдера и проводя рассуждения аналогично доказательству теоремы 3.1, получим искомый результат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.5. Из того, что $f \in (\Lambda^1, \Lambda^2)^*BV^{(p)}(\overline{\mathbb{T}}^2)$, следует, что функция f ограничена и, таким образом, $f \in L^2(\overline{\mathbb{T}}^2)$. Проводя рассуждения аналогично доказательству теоремы 3.3, получим (11).

Так как

$$2 = \frac{(2-p)s+p}{s} + \frac{p}{r},$$

применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{T}^2} \left| \Delta f_{r_1 r_2} \left(x_1, x_2; \frac{\pi}{2^{t_1}}, \frac{\pi}{2^{t_2}} \right) \right|^2 dx_1 dx_2 \\ & \leq \left(\iint_{\mathbb{T}^2} \left| \Delta f_{r_1 r_2} \left(x_1, x_2; \frac{\pi}{2^{t_1}}, \frac{\pi}{2^{t_2}} \right) \right|^{(2-p)s+p} dx_1 dx_2 \right)^{1/s} \\ & \quad \times \left(\iint_{\mathbb{T}^2} \left| \Delta f_{r_1 r_2} \left(x_1, x_2; \frac{\pi}{2^{t_1}}, \frac{\pi}{2^{t_2}} \right) \right|^p dx_1 dx_2 \right)^{1/r} \\ & \leq \Omega_{1/(2^{t_1} 2^{t_2})}^{1/r} \left(\iint_{\mathbb{T}^2} \left| \Delta f_{r_1 r_2} \left(x_1, x_2; \frac{\pi}{2^{t_1}}, \frac{\pi}{2^{t_2}} \right) \right|^p dx_1 dx_2 \right)^{1/r}, \end{aligned}$$

где

$$\Omega_{1/(2^{t_1} 2^{t_2})} = \left(\omega^{((2-p)s+p)} \left(f; \frac{\pi}{2^{t_1}}, \frac{\pi}{2^{t_2}} \right) \right)^{2r-p}.$$

Отсюда и из (11) следует, что

$$S_{t_1 t_2} = O \left(\Omega_{1/(2^{t_1} 2^{t_2})}^{1/r} \left(\iint_{\mathbb{T}^2} \left| \Delta f_{r_1 r_2} \left(x_1, x_2; \frac{\pi}{2^{t_1}}, \frac{\pi}{2^{t_2}} \right) \right|^p dx_1 dx_2 \right)^{1/r} \right)$$

для всех $r_1 = 1, \dots, 2^{t_1}$ и всех $r_2 = 1, \dots, 2^{t_2}$. Таким образом,

$$(S_{t_1 t_2})^r = O \left(\Omega_{1/(2^{t_1} 2^{t_2})} \iint_{\mathbb{T}^2} \left| \Delta f_{r_1 r_2} \left(x_1, x_2; \frac{\pi}{2^{t_1}}, \frac{\pi}{2^{t_2}} \right) \right|^p dx_1 dx_2 \right).$$

Умножая обе части уравнения на $1/(\lambda_{r_1}^1 \lambda_{r_2}^2)$ и суммируя по $r_1 = 1, \dots, 2^{t_1}$ и $r_2 = 1, \dots, 2^{t_2}$, получим

$$\begin{aligned} & (S_{t_1 t_2})^r \sum_{r_1=1}^{2^{t_1}} \sum_{r_2=1}^{2^{t_2}} \frac{1}{\lambda_{r_1}^1 \lambda_{r_2}^2} \\ & = O(\Omega_{1/(2^{t_1} 2^{t_2})}) \left(\iint_{\mathbb{T}^2} \sum_{r_1=1}^{2^{t_1}} \sum_{r_2=1}^{2^{t_2}} \frac{|\Delta f_{r_1 r_2}(x_1, x_2; \pi/2^{t_1}, \pi/2^{t_2})|^p}{\lambda_{r_1}^1 \lambda_{r_2}^2} dx_1 dx_2 \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S_{t_1 t_2} & = O \left(\frac{\Omega_{1/(2^{t_1} 2^{t_2})}}{\sum_{r_1=1}^{2^{t_1}} \sum_{r_2=1}^{2^{t_2}} 1/(\lambda_{r_1}^1 \lambda_{r_2}^2)} \right)^{1/r} \\ & \quad \times \left(\iint_{\mathbb{T}^2} \sum_{r_1=1}^{2^{t_1}} \sum_{r_2=1}^{2^{t_2}} \frac{|\Delta f_{r_1 r_2}(x_1, x_2; \pi/2^{t_1}, \pi/2^{t_2})|^p}{\lambda_{r_1}^1 \lambda_{r_2}^2} dx_1 dx_2 \right)^{1/r}. \end{aligned}$$

Так как $f \in (\Lambda^1, \Lambda^2)^* BV^{(p)}(\mathbb{T}^2)$, то

$$\sum_{r_1=1}^{2^{t_1}} \sum_{r_2=1}^{2^{t_2}} \frac{|\Delta f_{r_1 r_2}(x_1, x_2; \pi/2^{t_1}, \pi/2^{t_2})|^p}{\lambda_{r_1}^1 \lambda_{r_2}^2} = O(1).$$

Следовательно,

$$S_{t_1 t_2} = O\left(\left(\frac{\Omega_{1/(2^{t_1} 2^{t_2})}}{\sum_{r_1=1}^{2^{t_1}} \sum_{r_2=1}^{2^{t_2}} 1/(\lambda_{r_1}^1 \lambda_{r_2}^2)}\right)^{1/r}\right).$$

Теперь, применяя неравенство Гёльдера и проводя рассуждения аналогично доказательству теоремы 3.1, получим искомый результат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.6. Проводя рассуждения аналогично доказательству теоремы 3.3, получим (10). Аналогично, получим

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta^2 f}_{r_1 r_2}(k_1, k_2) \\ = (-4)^2 \widehat{f}(k_1, k_2) e^{i2k_1(r_1-1/2)\pi/2^{t_1}} e^{i2k_2(r_2-1/2)\pi/2^{t_2}} \sin^2 \frac{k_1 r_1 \pi}{2^{t_1+1}} \sin^2 \frac{k_2 r_2 \pi}{2^{t_2+1}}. \end{aligned}$$

Повторяя этот процесс r раз, получим

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta^r f}_{r_1 r_2}(k_1, k_2) \\ = (-4)^r \widehat{f}(k_1, k_2) e^{ir k_1(r_1-1/2)\pi/2^{t_1}} e^{ir k_2(r_2-1/2)\pi/2^{t_2}} \sin^r \frac{k_1 r_1 \pi}{2^{t_1+1}} \sin^r \frac{k_2 r_2 \pi}{2^{t_2+1}}. \end{aligned}$$

Так как $f \in L^2(\overline{\mathbb{T}}^2)$, то из формулы Парсеваля имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k_1, k_2)|^2 \sin^{2r} \frac{k_1 r_1 \pi}{2^{t_1+1}} \sin^{2r} \frac{k_2 r_2 \pi}{2^{t_2+1}} \\ = O\left(\iint_{\overline{\mathbb{T}}^2} \left| \Delta^r f_{r_1 r_2}\left(x_1, x_2; \frac{\pi}{2^{t_1}}, \frac{\pi}{2^{t_2}}\right) \right|^2 dx_1 dx_2\right). \end{aligned}$$

Из (9) следует, что

$$S_{t_1 t_2} = O\left(\iint_{\overline{\mathbb{T}}^2} \left| \Delta^r f_{r_1 r_2}\left(x_1, x_2; \frac{\pi}{2^{t_1}}, \frac{\pi}{2^{t_2}}\right) \right|^2 dx_1 dx_2\right),$$

где $S_{t_1 t_2}$ – то же самое выражение, что и в формуле (11).

Суммируя обе части по $r_1 = 1, \dots, 2^{t_1} - r$ и $r_2 = 1, \dots, 2^{t_2} - r$, получим

$$2^{t_1} 2^{t_2} (S_{t_1 t_2}) = O\left(\iint_{\overline{\mathbb{T}}^2} \sum_{r_1=1}^{2^{t_1}-r} \sum_{r_2=1}^{2^{t_2}-r} \left| \Delta^r f_{r_1 r_2}\left(x_1, x_2; \frac{\pi}{2^{t_1}}, \frac{\pi}{2^{t_2}}\right) \right|^2 dx_1 dx_2\right)$$

при $2^{t_1} - r \sim 2^{t_1}$ и $2^{t_2} - r \sim 2^{t_2}$.

Так как

$$\left| \Delta^r f_{r_1 r_2}\left(x_1, x_2; \frac{\pi}{2^{t_1}}, \frac{\pi}{2^{t_2}}\right) \right| = O\left(\omega\left(f; \frac{\pi}{2^{t_1}}, \frac{\pi}{2^{t_2}}\right)\right)$$

и $f \in r - BV(\mathbb{T}^2)$, то

$$\sum_{r_1=1}^{2^{t_1}-r} \sum_{r_2=1}^{2^{t_2}-r} \left| \Delta^r f_{r_1 r_2}\left(x_1, x_2; \frac{\pi}{2^{t_1}}, \frac{\pi}{2^{t_2}}\right) \right| = O(1).$$

Таким образом, имеем

$$S_{t_1 t_2} = O\left(\frac{\omega(f; \pi/2^{t_1}, \pi/2^{t_2})}{2^{t_1} 2^{t_2}}\right).$$

Теперь, применяя неравенство Гёльдера и проводя рассуждения аналогично доказательству теоремы 3.1, получим искомый результат.

5. Обобщение результатов на случай функций нескольких переменных.

При заданных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{T}^N$ и $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_N) \in \mathbb{T}^N$ определим

$$\begin{aligned} \Delta f(\mathbf{x}; \mathbf{h}) &= f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \Delta f(x_1, x_2, \dots, x_N; h_1, h_2, \dots, h_N) \\ &= \sum_{\varepsilon_1=0}^1 \cdots \sum_{\varepsilon_N=0}^1 (-1)^{\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_N} f(x_1 + \varepsilon_1 h_1, \dots, x_N + \varepsilon_N h_N). \end{aligned}$$

При заданной $f \in L^p(\overline{\mathbb{T}}^N)$, $1 \leq p < \infty$, p -интегральный модуль непрерывности функции f определяется как

$$\begin{aligned} \omega^{(p)}(f; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N) \\ = \sup \left\{ \left(\frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\overline{\mathbb{T}}^N} |\Delta f(\mathbf{x}; \mathbf{h})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} : 0 < h_j \leq \delta_j, j = 1, 2, \dots, N \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что, при $p = \infty$ модуль непрерывности записывается как $\omega(f; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N)$.

Будем говорить, что функция $f \in \mathbf{C}(\overline{\mathbb{T}}^N)$ *липшицева порядка* $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ при некотором $\alpha_i \in (0, 1]$ и при всех i (т.е. $f \in \text{Lip}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)(\overline{\mathbb{T}}^N)$), если

$$\omega(f; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N) = O(\delta_1^{\alpha_1} \delta_2^{\alpha_2} \cdots \delta_N^{\alpha_N}).$$

Пусть $I^k = [a^k, b^k] \subset \mathbb{R}$ при $k = 1, \dots, N$. Выше в п. 2 были определены $f(I^1)$ для функции одной переменной и $f(I^1 \times I^2)$ для функции двух переменных. Аналогично, для функции f на $\mathbb{R}^N$, определяя по индукции выражение $f(I^1 \times \cdots \times I^{N-1})$ для функции $N - 1$ переменных, получим

$$f(I^1 \times \cdots \times I^N) = f(I^1 \times \cdots \times I^{N-1}, b^N) - f(I^1 \times \cdots \times I^{N-1}, a^N).$$

При заданных $\Lambda = \Lambda^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^N \in \mathbb{L}$, где $\Lambda^i = \{\lambda_n^i\} \in \mathbb{L}$, $i = 1, \dots, N$, и $p \geq 1$ измеримая функция $f: \overline{\mathbb{T}}^N \rightarrow \mathbb{C}$ называется *функцией p -($\Lambda^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^N$)-ограниченной вариации* (т.е. $f \in (\Lambda^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^N)BV^{(p)}(\overline{\mathbb{T}}^N)$), если

$$V_{\Lambda_p}(f, \overline{\mathbb{T}}^N) = \sup_{I^1, \dots, I^N} \left(\sum_{k_1} \cdots \sum_{k_N} \frac{|f(I_{k_1}^1 \times \cdots \times I_{k_N}^N)|^p}{\lambda_{k_1}^1 \cdots \lambda_{k_N}^N} \right) < \infty,$$

где $I^1, \dots, I^N$ – конечные наборы непересекающихся подинтервалов $\{I_{k_1}^1\}, \dots, \{I_{k_N}^N\}$, принадлежащих $\overline{\mathbb{T}}$, соответственно.

Кроме того, функция $f \in (\Lambda^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^N)BV^{(p)}(\overline{\mathbb{T}}^N)$ называется *функцией p -($\Lambda^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^N$)*-ограниченной вариации* (т.е. $f \in (\Lambda^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^N)^*BV^{(p)}(\overline{\mathbb{T}}^N)$), если для любой из ее маргинальных функций выполняется включение

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_N) \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^{i-1}, \Lambda^{i+1}, \dots, \Lambda^N)^*BV^{(p)}(\overline{\mathbb{T}}^N(0_i))$$

при всех $i = 1, 2, \dots, N$, где

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{T}}^N(0_i) &= \{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \in \overline{\mathbb{T}}^{N-1} \\ &\quad : x_k \in \overline{\mathbb{T}} \text{ при } k = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Легко показать, что из $f \in (\Lambda^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^N)^* BV^{(p)}(\overline{\mathbb{T}}^N)$ следует, что эта функция ограничена. В частности, f интегрируема по Лебегу на $\overline{\mathbb{T}}^N$.

Заметим, что, при $p = 1$ и $\Lambda^1 = \Lambda^2 = \dots = \Lambda^N = \{1\}$ классы $(\Lambda^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^N)^* BV^{(p)}(\overline{\mathbb{T}}^N)$ и $(\Lambda^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^N)^* BV^{(p)}(\overline{\mathbb{T}})$ сводятся к классам $BV_V(\overline{\mathbb{T}}^N)$ и $BV_H(\overline{\mathbb{T}}^N)$, соответственно.

Аналогично, будем говорить, что функция $f \in r - BV(\overline{\mathbb{T}}^N)$, если выполняются следующие два условия:

(i) выполнено

$$V_r(f, \overline{\mathbb{T}}^N) = \sup_P \left(\sum_{r_1=1}^{s_1-r} \dots \sum_{r_N=1}^{s_N-r} |\Delta^r f(x_1^{r_1-1}, \dots, x_N^{r_N-1}; h_1^{r_1}, \dots, h_N^{r_N})| \right) < \infty,$$

где при $k \geq 2$

$$\Delta^k f(x_1^{r_1-1}, \dots, x_N^{r_N-1}; h_1^{r_1}, \dots, h_N^{r_N}) = \Delta^{k-1}(\Delta f(x_1^{r_1-1}, \dots, x_N^{r_N-1}; h_1^{r_1}, \dots, h_N^{r_N}))$$

и спектр охватывает все разбиения $P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_N$ замкнутого параллелепипеда $\overline{\mathbb{T}}^N$, $P_j = \{0 = x_j^0 < x_j^1 < \dots < x_j^{s_j} = 2\pi\}$, где $s_j \geq 1$, $r_j = 1, 2, \dots, s_j$, $h_j^{r_j} = x_j^{r_j} - x_j^{r_j-1}$, $j = 1, 2, \dots, N$;

(ii) для каждой из ее маргинальных функций выполняется включение

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_N) \in r - BV(\overline{\mathbb{T}}^N(0_i)) \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, N.$$

Для любых $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{T}^N$ и $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_N) \in \mathbb{Z}^N$ их скалярное произведение записывается как $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_N x_N$.

Для любой функции $f \in L^1(\overline{\mathbb{T}}^N)$ (функция f 2π -периодическая по каждой из переменных), ее ряд Фурье определен как

$$f(\mathbf{x}) \sim \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})},$$

где

$$\widehat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\overline{\mathbb{T}}^N} f(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d\mathbf{x}$$

— $\mathbf{k}$ -й коэффициент Фурье функции f .

Введем обозначение

$$S_N := \sum_{|k_1|=1}^{\infty} \sum_{|k_2|=1}^{\infty} \dots \sum_{|k_N|=1}^{\infty} |\widehat{f}(k_1, k_2, \dots, k_N)|^{\beta}, \quad 0 < \beta \leq 2.$$

Теперь можно обобщить указанные выше теоремы на случай пространств более высокой размерности следующим образом.

ТЕОРЕМА 5.1. Если $f \in L^2(\overline{\mathbb{T}}^N)$, то

$$S_N \leq C \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \dots \sum_{k_N=1}^{\infty} \frac{(\omega^{(2)}(f; \pi/k_1, \pi/k_2, \dots, \pi/k_N))^{\beta}}{(k_1 k_2 \dots k_N)^{\beta/2}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Если $f \in \text{Lip}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)(\overline{\mathbb{T}}^N)$, $0 < \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \leq 1$, то при

$$\beta > \max \left\{ \frac{2}{2\alpha_1 + 1}, \frac{2}{2\alpha_2 + 1}, \dots, \frac{2}{2\alpha_N + 1} \right\}$$

имеем

$$\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{k_N \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k_1, k_2, \dots, k_N)|^\beta < \infty. \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 5.3. Если $f \in (\Lambda^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^N)BV(\overline{\mathbb{T}}^N) \cap \mathbf{C}(\overline{\mathbb{T}}^N)$, то

$$S_N \leq C \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \dots \sum_{k_N=1}^{\infty} \left(\frac{\omega(f; \pi/k_1, \pi/k_2, \dots, \pi/k_N)}{k_1 k_2 \dots k_N \sum_{r_1=1}^{k_1} \sum_{r_2=1}^{k_2} \dots \sum_{r_N=1}^{k_N} 1/(\lambda_{r_1}^1 \lambda_{r_2}^2 \dots \lambda_{r_N}^N)} \right)^{\beta/2}. \quad (13)$$

СЛЕДСТВИЕ 5.4. (i) Если $f \in (\Lambda^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^N)^*BV(\overline{\mathbb{T}}^N)$, то выполняется (13).

(ii) Если $f \in BV_V(\overline{\mathbb{T}}^N) \cap \mathbf{C}(\overline{\mathbb{T}}^N)$, то

$$S_N \leq C \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \dots \sum_{k_N=1}^{\infty} \frac{(\omega(f; \pi/k_1, \pi/k_2, \dots, \pi/k_N))^{\beta/2}}{(k_1 k_2 \dots k_N)^\beta}. \quad (14)$$

(iii) Если $f \in BV_V(\overline{\mathbb{T}}^N) \cap \text{Lip}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)(\overline{\mathbb{T}}^N)$, $0 < \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \leq 1$, то выполняется (12) при

$$\beta > \max \left\{ \frac{2}{2 + \alpha_1}, \frac{2}{2 + \alpha_2}, \dots, \frac{2}{2 + \alpha_N} \right\}.$$

ТЕОРЕМА 5.5. Если $f \in (\Lambda^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^N)^*BV^{(p)}(\overline{\mathbb{T}}^N)$, $1 \leq p < 2r$, $1 < r < \infty$, то

$$S_N \leq C \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \dots \sum_{k_N=1}^{\infty} \left(\frac{(\omega^{((2-p)s+p)}(f; \pi/k_1, \pi/k_2, \dots, \pi/k_N))^{2-p/r}}{k_1 k_2 \dots k_N (\sum_{r_1=1}^{k_1} \sum_{r_2=1}^{k_2} \dots \sum_{r_N=1}^{k_N} 1/(\lambda_{r_1}^1 \lambda_{r_2}^2 \dots \lambda_{r_N}^N))^{1/r}} \right)^{\beta/2},$$

где $1/r + 1/s = 1$.

ТЕОРЕМА 5.6. Если $f \in r - BV(\overline{\mathbb{T}}^N)$, то выполняется (14).

Все результаты, перечисленные в этом пункте, можно доказать аналогично результатам, доказанным в п. 4.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Schramm, D. Waterman, "Absolute convergence of Fourier series of functions of class $\Lambda BV^{(p)}$ and $\varphi \Lambda BV$ ", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **40**:3-4 (1982), 273–276.
- [2] R.G. Vyas, "On the absolute convergence of Fourier series of functions of $\Lambda BV^{(p)}$ and $\varphi \Lambda BV$ ", *Georgian Math. J.*, **14**:4 (2007), 769–774.
- [3] S. Minakshisundaram, O. Szász, "On absolute convergence of multiple Fourier series", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **61** (1947), 36–53.

- [4] F. Móricz, A. Veres, “On the absolute convergence of multiple Fourier series”, *Acta Math. Hungar.*, **117**:3 (2007), 275–292.
- [5] F. Móricz, A. Veres, “Absolute convergence of multiple Fourier series revisited”, *Anal. Math.*, **34**:2 (2008), 145–162.
- [6] А. Н. Бахвалов, “Коэффициенты Фурье функций из многомерных классов ограниченной Λ -вариации”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **66**:1 (2011), 8–16.
- [7] M. I. Dyachenko, D. Waterman, “Convergence of double Fourier series and W -classes”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357**:1 (2005), 397–407.
- [8] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Vol. I, II, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1977.
- [9] J. R. Patadia, R. G. Vyas, “Fourier series with small gaps and functions of generalized variations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **182**:1 (1994), 113–126.
- [10] R. G. Vyas, J. R. Patadia, “On the absolute convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variations”, *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, **62**:1-4 (1996), 129–136.

Р. Г. Вьяс

The Maharaja Sayajirao University of Baroda, Индия

E-mail: drvgvyas@yahoo.com

Поступило

14.11.2011

К. Н. Дарджи

Tatva Institute of Technological Studies, Индия

E-mail: darjikiranmsu@gmail.com