Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Бибилов, Дифференциальные инварианты и проблемы контактной и точечной эквивалентности функций на пространствах n -джетов $J^n\mathbb{R}$, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 1, 150–153

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10277>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 17:12:44

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Дифференциальные инварианты и проблемы контактной и точечной эквивалентности функций на пространствах n -джетов $J^n\mathbb{R}$

П. В. Бибииков

В работе [1] была получена классификация гладких функций, заданных на пространстве 1-джетов $J^1\mathbb{R}$, относительно действия псевдогруппы точечных преобразований (все необходимые определения можно найти в [2]). Целью данной заметки является решение общих проблем контактной и точечной классификаций функций, заданных на пространстве n -джетов $J^n\mathbb{R}$ для произвольного $n \geq 2$.

Напомним, что *псевдогруппой контактных преобразований пространства n -джетов* $J^n\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{n+2}$ называется псевдогруппа $\text{Cont}^{(n)}$ диффеоморфизмов, сохраняющих распределение Картана. В канонических координатах $(x, y, p_1, \dots, p_n)^1$ это распределение задается нулями дифференциальных 1-форм Картана

$$\omega_0 := dy - p_1 dx, \quad \omega_1 := dp_1 - p_2 dx, \quad \dots \quad \omega_{n-1} := dp_{n-1} - p_n dx.$$

Псевдогруппой точечных преобразований пространства n -джетов $J^n\mathbb{R}$ называется псевдогруппа $\text{Point}^{(n)}$ контактных диффеоморфизмов, сохраняющих базу $J^0\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$ (т.е. плоскость с координатами (x, y)).

Действия контактной и точечной псевдогруппы на пространстве n -джетов $J^n\mathbb{R}$ удобно описывать в инфинитезимальной форме. А именно, алгебра Ли $\text{cont}^{(n)}$ контактной псевдогруппы $\text{Cont}^{(n)}$ состоит из векторных полей вида

$$X_\varphi^{(n-1)} = -\varphi_{p_1} \left(\frac{d}{dx} \right) \Big|_{J^n\mathbb{R}} + \sum_{k=0}^n \left(\frac{d^k}{dx^k} \right) \Big|_{J^n\mathbb{R}} (\varphi) \frac{\partial}{\partial p_k},$$

где

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p_1 \frac{\partial}{\partial y} + p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} + \dots$$

– оператор *полной производной* и $\varphi \in C^\infty(J^1\mathbb{R})$ – произвольная гладкая функция на пространстве 1-джетов (она называется *производящей функцией*). Такие векторные поля называются *контактными*.

Отметим, что $\varphi = \omega_0(X_\varphi^{(n-1)})$.

Алгебра Ли $\text{point}^{(n)}$ точечной псевдогруппы $\text{Point}^{(n)}$ состоит из контактных векторных полей $X_\varphi^{(n)}$, где $\varphi(x, y, p_1) = b(x, y) - a(x, y)p_1$ и $a, b \in C^\infty(J^0\mathbb{R})$ – произвольные гладкие функции на пространстве 0-джетов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № мол_а 14-01-31045).

¹Для удобства ниже мы будем считать, что $p_0 \equiv y$.

DOI: 10.4213/mzm10277

Действия псевдогрупп $\text{Cont}^{(n)}$ и $\text{Point}^{(n)}$ продолжаются до действий на пространстве функций $C^\infty(J^n\mathbb{R})$. Наша задача – описать орбиты этих действий.

Для решения этой задачи мы воспользуемся аппаратом теории дифференциальных инвариантов. Прежде всего введем необходимые обозначения и напомним известные теоретические сведения (подробности см. в [2]).

Пусть $f: J^n\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная гладкая функция. Введем пространство k -джетов таких функций. Чтобы отличать его от пространства $M := J^n\mathbb{R}$ мы обозначим такое пространство через $\mathbf{J}^k(M)$. Координаты в этом пространстве обозначим через $(p_{-1}, p_0, p_1, \dots, p_n, u, u_\sigma)$, где $p_{-1} \equiv x$, $p_0 \equiv y$ и $\sigma = (\sigma_{-1}, \dots, \sigma_n)$ – мультииндекс длины $|\sigma| = \sigma_{-1} + \dots + \sigma_n \leq k$.

Псевдогруппы $\text{Cont}^{(n)}$ и $\text{Point}^{(n)}$ действуют на пространстве 0-джетов $\mathbf{J}^0(M)$. Эти действия канонически продолжается до действия на всех пространствах k -джетов $\mathbf{J}^k(M)$ (см. [2]). Координатное представление соответствующих инфинитезимальных преобразований описывается следующим образом.

Пусть $X \in \text{cont}^{(n)}$ – произвольное контактное векторное поле, рассматриваемое на пространстве 0-джетов $\mathbf{J}^0(M)$. Определим производящую функцию

$$\Phi = (du - u_{1_{-1}} dp_{-1} - u_{1_0} dp_0 - \dots - u_{1_n} dp_n)(X),$$

где $\mathbf{1}_i$ – мультииндекс, в котором $\sigma_i = 1$, а остальные индексы равны 0. Тогда продолжение $X^{(k)}$ этого векторного поля в пространстве k -джетов $\mathbf{J}^k(M)$ задается следующей формулой:

$$X^{(k)} = - \sum_{i=-1}^n \Phi_{u_{\mathbf{1}_i}} \left(\frac{d}{dp_i} \right) \Big|_{\mathbf{J}^k(M)} + \sum_{|\sigma|=0}^k \left(\frac{d^{|\sigma|}}{dp^\sigma} \right) \Big|_{\mathbf{J}^k(M)} (\Phi) \frac{\partial}{\partial u_\sigma},$$

где $d^{|\sigma|}/dp^\sigma$ – композиции операторов *полных производных*

$$\frac{d}{dp_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{|\sigma|=0}^{\infty} u_{\sigma+\mathbf{1}_i} \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial u_\sigma}.$$

Напомним следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. 1) *Дифференциальным инвариантом действия псевдогруппы G порядка $\leq k$ называется рациональная G -инвариантная функция I на пространстве $\mathbb{R}(\mathbf{J}^k(M))$.*

2) *Инвариантным дифференцированием действия псевдогруппы G называется комбинация полных производных, перестановочная с действием псевдогруппы G .*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что любой объект пространства k -джетов $\mathbf{J}^k(M)$, в частности, функция или дифференциальная форма, может рассматриваться и как объект пространства l -джетов $\mathbf{J}^l(M)$ при всех $l > k$.

Положим для удобства

$$u_i := u_{(0,0,\dots,0,i)}.$$

Следующее предложение доказывается прямыми вычислениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1) *Функции $J_1 = u$, $J_2 = (2u_{12} - 3u_2^2)/u_1^4$ на пространстве 3-джетов $\mathbf{J}^3(M)$ являются дифференциальными инвариантами действия псевдогруппы $\text{Cont}^{(2)}$ (здесь $M = J^2\mathbb{R}$). Дифференцирование $\nabla := (1/u_1) \cdot d/dp_2$ является инвариантным.*

2) *Функции $J_1 = u$, $J_2 = u_2/u_1^2$ на пространстве 2-джетов $\mathbf{J}^2(M)$ являются дифференциальными инвариантами действий псевдогрупп $\text{Cont}^{(n)}$ при $n \geq 3$ и $\text{Point}^{(n)}$ при $n \geq 2$. Дифференцирование $\nabla := (1/u_1) \cdot d/dp_n$ является инвариантным.*

Зафиксируем набор из $n+2$ дифференциальных инвариантов $J_1, J_2, J_3 := \nabla J_2, \dots, J_{n+2} := \nabla J_{n+1}$ (здесь J_2 и ∇ соответствуют либо п. 1, либо п. 2 предложения 1 в зависимости от того, действие какой псевдогруппы мы рассматриваем).

Рассмотрим дифференциальную n -форму

$$\Omega := \omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{n-1} \in \Lambda^n(\mathbf{J}^0(M)).$$

Запишем ее в “инвариантом базисе” $\{\widehat{d}J_1, \widehat{d}J_2, \dots, \widehat{d}J_{n+2}\}$:

$$\Omega = \sum_{i < j} \Omega_{ij} \cdot \widehat{d}J_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d}J_i^\circ \wedge \cdots \wedge \widehat{d}J_j^\circ \wedge \cdots \wedge \widehat{d}J_{n+2}$$

(здесь “ $\circ$ ” обозначает пропуск соответствующего множителя, а $\widehat{d}$ обозначает полный дифференциал: $\widehat{d}F = \sum_{i=1}^n (dF/dp_i) dp_i$ для произвольной функции F на пространстве k -джетов $\mathbf{J}^k(M)$).

Дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем функцию $f \in C^\infty(J^n\mathbb{R})$ *регулярной* в окрестности $\mathcal{O} \subset J^n\mathbb{R}$, если ограничения инвариантов $J_1, J_2, \dots, J_{n+2}$ на функцию f независимы во всех точках окрестности $\mathcal{O}$.

Далее, ограничим коэффициенты Ω_{ij} формы Ω на регулярную функцию $f \in C^\infty(J^n\mathbb{R})$ и выразим их через ограничения инвариантов $J_1, \dots, J_{n+2}$. А именно, существуют такие гладкие функции $A_{ij,f} \in C^\infty(\mathcal{O})$, что

$$\Omega_{ij}(f) = A_{ij,f}(J_1(f), J_2(f), \dots, J_{n+2}(f)).$$

Построим теперь *функцию зависимостей*

$$\mathcal{A}_f: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1)(n+2)/2}, \quad \mathcal{A}_f(\theta) = (A_{12,f}(\theta) : A_{13,f}(\theta) : \cdots : A_{n-1,n,f}(\theta)),$$

где $\theta \in \mathcal{O}$ – произвольный джет.

Наконец, мы готовы сформулировать критерий контактной эквивалентности двух гладких функций на пространстве $J^n\mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 1. *Две регулярные функции $f, \tilde{f} \in C^\infty(J^n\mathbb{R})$ локально контактно эквивалентны, если и только если соответствующие им функции зависимостей совпадают: $\mathcal{A}_f = \mathcal{A}_{\tilde{f}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как n -форма Ω при контактном преобразовании умножается на гладкую функцию из $C^\infty(\mathbf{J}^0(M))$, то функция зависимостей инвариантна относительно контактных преобразований. Поэтому если функции f и $\tilde{f}$ контактно эквивалентны, то соответствующие им функции зависимостей $\mathcal{A}_f$ и $\mathcal{A}_{\tilde{f}}$ совпадают.

Докажем обратное утверждение. Рассмотрим две “инвариантные” системы координат $(J_1(f), J_2(f), \dots, J_{n+2}(f))$ и $(J_1(\tilde{f}), J_2(\tilde{f}), \dots, J_{n+2}(\tilde{f}))$ в пространстве $J^n\mathbb{R}$. Пусть $\varphi: J^n\mathbb{R} \rightarrow J^n\mathbb{R}$ – диффеоморфизм, переводящий первую систему координат во вторую. Так как $J_1(f) = f$ и $J_1(\tilde{f}) = \tilde{f}$, то $\varphi \circ f = \tilde{f}$.

Докажем, что диффеоморфизм φ является контактным. Для этого достаточно доказать, что диффеоморфизм φ сохраняет нули дифференциальной n -формы Ω (так как отсюда будет следовать сохранение распределения Картана). Но в двух наших системах координат ограничения компонент Ω_{ij} формы Ω на функции f и $\tilde{f}$ выражаются через $J_1, J_2, \dots, J_{n+2}$ одинаково с точностью до умножения на ненулевую функций из $C^\infty(\mathbf{J}^0(M))$ (это следует из условия $\mathcal{A}_f = \mathcal{A}_{\tilde{f}}$). Поэтому координатное представление нулей n -формы Ω в “инвариантных” системах координат одинаково.

Таким образом, диффеоморфизм φ является контактным и $\varphi \circ f = \tilde{f}$, что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что схожие идеи были использованы ранее в работе [3] для классификации управляемых гамильтоновых систем.

Теперь сформулируем аналогичный критерий для точечной эквивалентности гладких функций. Для этого наряду с формой Ω рассмотрим дифференциальную 2-форму $\Theta := dx \wedge dy \in \Lambda^2(\mathbf{J}^0(M))$. Проведем для нее те же рассуждения, что и для n -формы Ω . Запишем ее в “инвариантном базисе” $\{\hat{d}J_1, \hat{d}J_2, \dots, \hat{d}J_{n+2}\}$:

$$\Theta = \sum_{i < j} \Theta_{ij} \cdot \hat{d}J_i \wedge \hat{d}J_j.$$

Далее, для регулярной функции $f \in C^\infty(J^n\mathbb{R})$ существуют такие гладкие функции $B_{ij,f} \in C^\infty(\mathcal{O})$, что

$$\Theta_{ij}(f) = B_{ij,f}(J_1(f), J_2(f), \dots, J_{n+2}(f)).$$

Построим теперь *вторую функцию зависимостей*

$$\mathcal{B}_f: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1)(n+2)/2}, \quad \mathcal{B}_f(\theta) = (B_{12,f}(\theta) : B_{13,f}(\theta) : \dots : B_{n-1,n,f}(\theta)),$$

где $\theta \in \mathcal{O}$ – произвольный джет.

ТЕОРЕМА 2. *Две регулярные функции $f, \tilde{f} \in C^\infty(J^n\mathbb{R})$ локально точно эквивалентны, если и только если соответствующие им пары функций зависимостей совпадают: $(\mathcal{A}_f, \mathcal{B}_f) = (\mathcal{A}_{\tilde{f}}, \mathcal{B}_{\tilde{f}})$.*

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] П. В. Бибилов, “О точечной эквивалентности функций на пространстве 1-джетов $J^1\mathbb{R}$ ”, *Функц. анализ и его прил.* (в печати). [2] Д. В. Алексеевский, А. М. Виноградов, В. В. Лычагин, *Геометрия – 1*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **28**, ВИНТИ, М., 1988, 5–289. [3] A. G. Kushner, V. V. Lychagin, *Glob. Stoch. Anal.*, **2**:1 (2012), 89–100.

П. В. Бибилов

Институт проблем управления
им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва
E-mail: tsdtp4u@proc.ru

Поступило

01.02.2013

Исправленный вариант

02.04.2014