Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ш. Загиров, О полиномах с максимальной длиной графика, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 1, 61–69

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1028>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 10:59:14

УДК 517.51

О ПОЛИНОМАХ С МАКСИМАЛЬНОЙ ДЛИНОЙ ГРАФИКА

Н. Ш. Загиров

В работе устанавливается для каких функций g, G ($g < G$) среди всех полиномов заданной степени, графики которых заключены между графиками g и G , наибольшей длиной графика обладает один из пары ужей, порождаемых функциями g и G .

Библиография: 7 названий.

1. Обозначения, постановка задачи. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана пара непрерывных функций g, G таких, что $g(x) < G(x)$ при всех $x \in [a, b]$. Обозначим через P_n множество всех алгебраических полиномов степени не выше чем n ; $P_n(g, G) = \{p \in P_n : g(x) \leq p(x) \leq G(x), x \in [a, b]\}$;

$$J(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad V(f) = \int_a^b |f'(x)| dx$$

– длина графика и вариация функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. В 1939 г. П. Эрдеш [1] высказал гипотезу о том, что среди полиномов множества $P_n(-1, 1)$ (при $a = -1, b = 1$) наибольшей длиной графика обладают полиномы Чебышева. В 1979–1986 гг. в работах [2]–[4] доказана справедливость этой гипотезы. На одной из Саратовских зимних школ Е. П. Долженко высказал следующее обобщение гипотезы Эрдеша.

ГИПОТЕЗА ДОЛЖЕНКО. Если множество $P_n(g, G)$ непустое, то среди всех его полиномов максимальной длиной графика обладает один из двух ужей, порождаемый парой (g, G) .

Напомним [5], что полином $y \in P_n(g, G)$ называется *ужом*, порожденным парой (g, G) , если имеется набор точек $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ отрезка $[a, b]$ такой, что с ростом k от 1 до $n+1$ точки $(x_k, y(x_k))$ попеременно попадают то на график функции g , то на график G .

При $n = 1$ гипотеза Долженко подтверждается (см. ниже теорему 1).

В 1994 г. Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянов [5] при $n = 2$ построили функции g, G такие, что длина графика каждого из двух ужей, порожденных парой (g, G) , составляет менее 0.76 от длины графика некоторой линейной функции из $P_2(g, G)$. Возникли две новые проблемы: можно ли уменьшить число 0.76 и будет ли верной гипотеза Долженко, если канал (g, G) является симметричным, т.е. $g(x) = -G(x)$ ($x \in [a, b]$)?

В работе устанавливается, что минимально возможное значение отношения длины графика ужа к длине графика полинома из некоторого канала (g, G) есть 0.625 ($n = 2$). Что касается второй проблемы, то ниже доказывается справедливость гипотезы при

$n = 2$; при $n \geq 3$ она неверна. Отметим, что обсуждаемая проблема сводится к нахождению максимального значения выпуклой (вниз) функции многих переменных на некотором выпуклом множестве. Как известно, нет более или менее общих методов решения таких задач. При $n = 2$ длину графика функции мы численно заменяем площадью специально подбираемой криволинейной трапеции. При $n \geq 3$ привлекаем дроби Чебышева–Маркова.

2. ТЕОРЕМА 1. *Если множество $P_1(g, G)$ непустое, а $y(x)$ среди всех его элементов обладает наибольшей длиной графика, то y является ужом пары (g, G) .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко заметить, что при $n = 1$ полином с наибольшей длиной графика совпадает с полиномом, имеющим максимальный по модулю старший коэффициент. А последний обязательно является ужом пары (g, G) (см. [6]).

В этом пункте в качестве отрезка $[a, b]$ берем отрезок $[0, 1]$. Очевидно, выполняется двойное неравенство

$$V(f) \leq J(f) \leq 1 + V(f). \quad (1)$$

ЛЕММА 1. *Для любых полиномов y, p и числа $k > 0$ ($p \not\equiv \text{const}$) выполняется неравенство*

$$\frac{V(y)}{1/k + V(p)} \leq \frac{J(ky)}{J(kp)} \leq \frac{1}{kV(p)} + \frac{V(y)}{V(p)}. \quad (2)$$

Пусть $y \in P_n(g, G)$ – уж с большей вариацией. Если существует полином $p \in P_n(g, G)$ такой, что $V(p) > V(y)$, то при достаточно больших k для канала (kg, kG) неравенство (2) неверно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть леммы непосредственно следует из неравенств (1). Обозначая через δ разность $V(p) - V(y)$, для $k > 1/\delta$ имеем

$$J(kp) \geq V(kp) = kV(y) + k\delta \geq J(k\delta) - 1 + k\delta > J(ky).$$

Остается отметить, что ky является ужом канала (kg, kG) . Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $n = 2$. Для любого δ ($0 < \delta < 1/8$) на отрезке $[0, 1]$ существует пара (g, G) такая, что длина графика каждого из двух ужей, ею порожденных, составляет менее $0.625 + \delta$ длины графика некоторого полинома $p \in P_2(g, G)$. В этом утверждении 0.625 не может быть заменено меньшим числом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$p(x) = 2x - 1, \quad G(x) = \begin{cases} p(x) & \text{при } x \geq (1 + \delta)/2, \\ \delta & \text{при остальных значениях } x, \end{cases} \quad g(x) = -G(1 - x),$$

$x \in [0, 1]$. Тогда $p \in P_2(g, G)$, пара (g, G) порождает ужи

$$y(x) = \frac{2(1 + \delta)x^2}{1 - \delta} - \frac{(1 + 4\delta - \delta^2)x}{1 - \delta} + \delta \quad \text{и} \quad v(x) = -y(1 - x),$$

так что длины их графиков совпадают. Согласно (2) отношение $J(ky)/J(kp)$ при достаточно большом k сколь угодно близко к отношению вариаций полиномов y и p . Несложно подсчитать, что

$$V(p) = 2, \quad V(y) = 1.25 + \delta + \left(\frac{2}{1 - \delta^2} - \frac{1}{8} \right) \delta^2.$$

Поэтому $V(y)/V(p) < 0.625 + \delta$. Первая часть теоремы доказана.

Доказательство второй части требует много элементарных выкладок. Приведем лишь схему. Считаем, что большей длиной обладает уж $y \in P_2(g, G)$. Достаточно фиксировать три значения y : $y(x_i) = G(x_i)$ ($i = 1, 3$), $y(x_2) = g(x_2)$ ($0 \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq 1$); считаем также, что $g(x) < 0 < G(x)$, $x \in [0, 1]$. Для произвольного полинома $p(x) = ax^2 + bx + c$ достаточно считать, что

$$a > 0, \quad p(x_3) \leq G(x_3), \quad p(x_2) \geq g(x_2), \quad -G(x_1) \leq p(x_1) \leq G(x_1).$$

Тогда при всех наборах x_1, x_2, x_3 и $y(x_i)$ оказывается, что $V(y)/V(p) \geq 0.625$. Так как границы g, G были произвольными, по лемме 1 неравенство обязано сохраняться и для отношения длин графиков.

3. В дальнейшем рассматриваем симметричные каналы на отрезке $[-1, 1]$. Вместо $P_n(-G, G)$ будем писать $P_n(G)$ и говорить об уже, порожденном функцией G , так как в этом случае порождаемые каналомужи различаются только знаком.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n = 2$. Для любой положительной на отрезке $[-1, 1]$ функции G длина графика порожденного ею ужа больше длины графика любого полинома из $P_2(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что для любой линейной функции из $P_2(G)$ существует парабола u из $P_2(G)$ большей длины.

Если p – линейная функция из $P_2(G)$ наибольшей длины, то обязательно существуют точки $x_1 < x_2$ такие, что $p(x_1) = -G(x_1)$, $p(x_2) = G(x_2)$. Следовательно, $p(x)$ обращается в 0 на интервале $(-1, 1)$. Пусть $p(\beta) = 0$, $-1 < \beta < 1$. Обозначим через $u(x)$ параболу, проходящую через точки $(-1, -p(-1))$, $(\beta, 0)$ и $(1, p(1))$.

Покажем, что u принадлежит $P_2(G)$. Обозначим через α второй нуль u : $-1 < \alpha < \beta$. Рассмотрим три ситуации: $\beta \leq x \leq 1$, $\alpha \leq x \leq \beta$, $-1 \leq x \leq \alpha$. Соответственно получаем очевидные оценки:

$$\begin{aligned} -G(x) \leq 0 \leq u(x) \leq p(x) \leq G(x), \quad -G(x) \leq p(x) \leq u(x) \leq 0 \leq G(x), \\ -G(x) \leq 0 \leq u(x) \leq -p(x) \leq G(x). \end{aligned}$$

Из этих неравенств следует, что u принадлежит $P_2(G)$. Кроме того, на отрезке $[\beta, 1]$ длина графика p меньше длины графика u , а на отрезке $[-1, \beta]$ длина u больше длины графика функции $-p$. Так как $J(-p) = J(p)$, на отрезке $[-1, 1]$ график u длиннее графика p .

Пусть теперь $p \in P_2(G)$ – произвольная парабола, которая не является ужом. Докажем, что тогда существует другая парабола u , принадлежащая $P_2(G)$, длина графика которой больше длины графика p . Мы можем считать, что старший коэффициент p больше 0, существуют точки $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ такие, что $p(x_1) = -G(x_1)$, $p(x_2) = G(x_2)$. Следовательно, $p(x) < G(x)$, если $x \in [-1, x_1]$. Пусть $\alpha < \beta$ – нули p . Тогда $x_1 < \beta < x_2$, $p(x) < G(x)$, если $x \in [-1, \beta]$ и $p(x) = k(x - \alpha)(x - \beta)$, $k > 0$.

Рассмотрим полином

$$u(x) = \left(k + \frac{E}{2\beta + 2}\right)x^2 - \left(k\alpha + k\beta + \frac{E}{2}\right)x + k\alpha\beta + \frac{\beta E}{2\beta + 2},$$

где $E > 0$ достаточно малое, когда $p(-1) \geq 0$, и $E = -2p(-1)$, когда $p(-1) < 0$. Полином u принадлежит $P_2(G)$, т.е. для любого x имеем $-G(x) \leq u(x) \leq G(x)$. Установим это. Полином u проходит через точки $(1, p(1))$, $(\beta, 0)$. Поэтому если $p(-1) \geq 0$, то

- 1) $-G(x) < 0 \leq u(x) \leq p(x) \leq G(x)$ для $x \in [\beta, 1]$;
- 2) $-G(x) \leq p(x) \leq u(x)$ для $x \in [-1, \beta]$.

Остается показать, что $u(x) \leq G(x)$, если $x \in [-1, \beta]$. Для достаточно малых $E > 0$ выполнение этого неравенства на $[x_1, \beta]$ очевидно; если же $x \in [-1, x_1]$, то из неравенства $p(x) < G(x)$ следует, что при достаточно малых $E > 0$ выполнено $u(x) < G(x)$.

Пусть теперь $p(-1) < 0$. Тогда $E = -2p(-1) > 0$ и $u(x) = -\alpha k(x - 1/\alpha)(x - \beta)$, $\alpha < -1$.

Если $1/\alpha \leq \beta$, то для $x \in [\beta, 1]$ рассуждаем так же, как и при $p(-1) \geq 0$, а для $x \in [-1, \beta]$ воспользуемся тем, что $-p \in P_2(G)$:

$$-G(x) \leq p(x) \leq u(x) \leq -p(x) \leq G(x).$$

Если $1/\alpha > \beta$, то для x из $[-1, \beta]$ рассуждаем, как в предыдущем абзаце, случай же $x \in [1/\alpha, 1]$ очевиден. Остается $x \in (\beta, 1/\alpha)$. Здесь $u(x) < 0 < G(x)$ и легко проверить, что $u(x) \geq -p(x) \geq -G(x)$. Итак, при каждом выборе $E > 0$ полином u принадлежит $P_2(G)$. Докажем, что график u длиннее графика p . Пусть сначала $p(-1) \geq 0$. В этом случае достаточно показать, что если $\varphi(E) = l(u)$, то $\varphi'(0) > 0$. Из определения $\varphi(E)$ следует, что

$$\varphi'(0) = \int_{-1}^1 \frac{(2kx - kx - k\beta)(x/(1+\beta) - 0.5)}{\sqrt{1 + (2kx - k\alpha - k\beta)^2}} dx.$$

После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \frac{(1/(1+\beta) - 0.5)\sqrt{1 + (2k - k\alpha - k\beta)^2}}{2k} \\ &+ \frac{(1/(1+\beta) + 0.5)\sqrt{1 + (2k + k\alpha + k\beta)^2}}{2k} - \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 + (2kx - k\alpha - k\beta)^2} dx}{2k(1+\beta)}. \end{aligned}$$

Положим для краткости $\Phi(x) = (1 + (2kx - k\alpha - k\beta)^2)^{1/2}$. Тогда требуемое неравенство эквивалентно неравенству

$$\int_{-1}^1 \Phi(x) dx < \frac{1-\beta}{2}\Phi(1) + \frac{3+\beta}{2}\Phi(-1). \quad (3)$$

Установим (3). Так как $p(-1) \geq 0$, то $\alpha \geq -1$. Заметим, что функция $\Phi(x)$ является выпуклой вниз. Если $\alpha + \beta \geq 0$, то $\Phi(-1) \geq \Phi(+1)$ и $\Phi(x) \leq \Phi(-1)$ при любом $x \in [-1, 1]$. Поэтому

$$\int_{-1}^1 \Phi(x) dx < 2\Phi(-1) \leq 2\Phi(-1) + \frac{\beta}{2}(\Phi(-1) - \Phi(1)),$$

что совпадает с неравенством (3). Если же $\alpha + \beta < 0$, то

$$\int_{-1}^1 \Phi(x) dx$$

оцениваем сверху как сумму площадей трех трапеций:

$$\int_{-1}^1 \Phi(x) dx < \frac{\Phi(-1) - \Phi((\alpha + \beta)/2)}{2} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + 1 \right) + \frac{(\Phi((\alpha + \beta)/2) + \Phi(1 + \alpha + \beta))(1 + (\alpha + \beta))}{2} + \frac{(\Phi(1 + \alpha + \beta) + \Phi(1))(-\alpha - \beta)}{2}.$$

Поскольку $\Phi(x)$ достигает свой минимум равный 1 в точке $x = (\alpha + \beta)/2$ и $\Phi(-1) = \Phi(1 + \alpha + \beta)$, то

$$\int_{-1}^1 \Phi(x) dx < 1 + \frac{\alpha + \beta}{2} + \Phi(-1) - \frac{(\alpha + \beta)\Phi(1)}{2}.$$

Правая часть этого неравенства при $\alpha \geq -1$ не превосходит правой части неравенства (3).

Пусть $p(-1) < 0$, тогда $E = -2p(-1)$, $u(x) = -\alpha kx^2 + (1 + \alpha\beta)kx - \beta k$,

$$J(p) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + k^2(2x - \alpha - \beta)^2} dx, \quad J(u) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + k^2(2\alpha x + 1 + \alpha\beta)^2} dx.$$

Неравенство $J(u) > J(p)$ доказываем с помощью двух лемм.

ЛЕММА 2. Для любых $k > 0$, $\alpha < -1$, $-1 < \beta < 1$ выполняется неравенство

$$J(u) - J(p) > \int_{-1}^1 \sqrt{1 + k^2(-2\alpha x + 1 - \alpha)^2} dx - \int_{-1}^1 \sqrt{1 + k^2(2x + 1 - \alpha)^2} dx.$$

ЛЕММА 3. Для любых $k > 0$, $\alpha < -1$ выполняется неравенство

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 + k^2(-2\alpha x + 1 - \alpha)^2} dx > \int_{-1}^1 \sqrt{1 + k^2(2x + 1 - \alpha)^2} dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. При фиксированных $\alpha < -1$, $k > 0$ положим

$$f(\beta) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + k^2(-2\alpha x + 1 + \alpha\beta)^2} dx, \quad g(\beta) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + k^2(2x - \alpha - \beta)^2} dx.$$

После элементарных вычислений получаем, что

$$g'(\beta) = \frac{\sqrt{1 + k^2(2 + \alpha + \beta)^2} - \sqrt{1 + k^2(2 - \alpha - \beta)^2}}{2},$$

$$f'(\beta) = \frac{\sqrt{1 + k^2(2\alpha + 1 + \alpha\beta)^2} - \sqrt{1 + k^2(-2\alpha + 1 + \alpha\beta)^2}}{2}.$$

Необходимо доказать, что для $-k\beta < 1$ $f(\beta) - g(\beta) > f(-1) - g(-1)$. Для этого достаточно установить, что $f'(\beta) > g'(\beta)$. Легко проверить, что $g'(\beta) < 0$ для любого $\beta \in [-1, 1]$; $f'(\beta) \geq 0$, если $\beta \in [-1/\alpha, 1]$. Поэтому считаем, что $\beta \in [-1, -1/2]$ и доказываем неравенство $-f'(\beta) < -g'(\beta)$, т.е.

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + k^2(-2\alpha + 1 + \alpha\beta)^2} - \sqrt{1 + k^2(2\alpha + 1 + \alpha\beta)^2} \\ & < \sqrt{1 + k^2(2 - \alpha - \beta)^2} - \sqrt{1 + k^2(2 + \alpha + \beta)^2}. \end{aligned}$$

Оно получается из двух легко проверяемых неравенств:

$$(-2\alpha + 1 + \alpha\beta)^2 < (2 - \alpha - \beta)^2, \quad (2\alpha + 1 + \alpha\beta)^2 > (2 + \alpha + \beta)^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Обозначим $(1 - \alpha)/2$ через γ , $4k^2\gamma^2$ через m и докажем, что

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 + m((2 - 1/\gamma)x + 1)^2} dx > \int_{-1}^1 \sqrt{1 + m(x/\gamma + 1)^2} dx$$

для $\gamma > 1$ и $m > 0$. Пусть $f_1(x) = \sqrt{1 + m((2 - 1/\gamma)x + 1)^2}$, $f_2(x) = \sqrt{1 + m(x/\gamma + 1)^2}$. Легко проверить, что f_1, f_2 являются выпуклыми функциями, причем f_2 монотонно возрастает на отрезке $[-1, 1]$, а f_1 монотонно убывает на отрезке $[-1, x_0]$ и возрастает при $x > x_0$ ($x_0 = \gamma/(2\gamma - 1)$). Кроме того, $f_1(-1) = f_2(-1)$, $f_1(0) = f_2(0)$; $f_1(x) < f_2(x)$ при $x \in (-1, 0)$ и $f_1(x) > f_2(x)$ при $x > 0$. Далее,

$$\int_{-1}^1 f_1(x) dx = \int_0^1 (f_1(-x) + f_1(x)) dx, \quad \int_{-1}^1 f_2(x) dx = \int_0^1 (f_2(-x) + f_2(x)) dx.$$

Поэтому требуемое неравенство будет установлено, если мы докажем, что

$$\int_0^1 (f_1(x) - f_2(x) - (f_2(-x) - f_1(-x))) dx > 0.$$

Докажем, что при любом $x \in [0, 1]$ выполнено $f_1(x) - f_2(x) \geq f_2(-x) - f_1(x)$. В силу свойств функций f_1, f_2 достаточно проверить это неравенство для $x \in [0, x_0]$. Считая $x = tx_0$, $0 \leq t \leq 1$, запишем его в виде

$$\sqrt{1 + m(1 + t)^2} - \sqrt{1 + m\left(1 + \frac{t}{2\gamma - 1}\right)^2} \geq \sqrt{1 + m\left(1 - \frac{t}{2\gamma - 1}\right)^2} + \sqrt{1 + m(1 - t)^2}.$$

Это неравенство проверяется элементарно.

4. При $n \geq 3$ аналог теоремы 3 неверен. В основе нашего доказательства лежит лемма 1 (применительно к отрезку $[-1, 1]$).

ТЕОРЕМА 4. Для любого $n \geq 3$ на отрезке $[-1, 1]$ существует положительная функция G такая, что порожденный ею уж класса $P_n(G)$ имеет меньшую длину графика, чем график некоторого полинома этого канала.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Для натурального числа $m = 4l + j$ ($l \geq 0$ – целое, $j = 0, 1, 2, 3$) положим

$$p_1(x) = p_1(x; \varepsilon) = \begin{cases} -T_m(x) + 1 + \varepsilon & \text{при } j = 2, \\ T_m(x) + 1 + \varepsilon & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В качестве границы канала берем функцию

$$G_1(x) = G_1(x; \varepsilon) = \frac{p_1(x; \varepsilon)}{p_1(0; \varepsilon)}.$$

Пусть $Q(x) = Q(x, \varepsilon)$ будет ужом канала $P_n(G_1)$. Предварительно докажем две леммы.

ЛЕММА 4. Пусть $c = \pm 1$; m_0, m – натуральные числа, причем $m_0 < 0.45m$. Если $f_0(x) = T_m(x) + c$, $g(x) = T_{m_0}(x)f_0(x)$ ($x \in [-1, 1]$), то $V(g) < V(f_0)$.

Для доказательства этого утверждения достаточно убедиться, что на отрезке $[0, \pi]$ вариация функции $f_1(t) = \cos m_0 t \cdot (\cos mt + c)$ меньше вариации функции $f_2(t) = \cos mt + c$ (которая, очевидно, равна $2m$). Находим вариацию функции $f_1(t)$:

$$f_1'(t) = -\frac{m+m_0}{2} \sin(m+m_0)t - \frac{m-m_0}{2} \sin(m-m_0)t - m_0 c \sin m_0 t.$$

Далее, используя неравенство Гёльдера, получаем

$$\int_0^\pi |f_1'(t)| dt \leq \sqrt{\pi} \sqrt{\int_0^\pi (f_1'(t))^2 dt} = \frac{\pi}{2} \sqrt{m^2 + 3m_0^2}.$$

Последнее число при $m < 0.45m_0$ оказывается меньше $2m$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $m = 4l + 2$, то непосредственным вычислением можно убедиться, что

$$\int_0^\pi |f_1'(t)| dt = 2m \frac{4}{3\sqrt{3}},$$

т.е. в этом случае вариация функции $f_1(t)$ примерно в $4/5$ раза меньше вариации функции $f_2(t)$ ($c = -1$). Отметим также, что при $m = 4l$, $m_0 = 2l$ и $c = 1$ вариации двух соответствующих функций совпадают.

ЛЕММА 5. Если $\varepsilon \rightarrow 0$, то $Q(x; \varepsilon) \rightarrow y(x)$, $y(x) = T_{m_0}p(x)$, $p(x) = p_1(x; 0)$ ($x \in [-1, 1]$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала находим выражение для $Q(x; \varepsilon)$. Ограничимся (для сокращения записей) только случаем $m = 4l + 2$. Очевидно, $g_1(x; \varepsilon) > 0$ ($x \in [-1, 1]$) и $G_1(0; \varepsilon) = 1$. Поэтому $G_1(x) = (1 + a_1x) \cdots (1 + a_mx)$, где

$$a_j = -\frac{1}{z_j}, \quad z_j = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos jt + i \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin jt, \\ t = \frac{2\pi}{m}, \quad \rho = \sqrt[n]{1 + \varepsilon + \sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2}} \quad j = 1, \dots, m.$$

Следуя А. А. Маркову [7], положим

$$\cos \varphi_j(x) = \frac{x + a_j}{1 + a_j x}, \quad \sin \varphi_j(x) = \frac{\sqrt{1 - a_j} \sqrt{1 + a_j} \sqrt{1 - x^2}}{1 + a_j x}, \quad j = 1, \dots, m, \\ \cos \psi(x) = x, \quad \sin \psi(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

В этих формулах вещественная часть квадратных корней неотрицательна, аргументы всех чисел принадлежат интервалу $[0, 2\pi)$. При этих соглашениях мы получаем однозначно определенную (по $x \in [-1, 1]$) непрерывную функцию

$$s(x) = m_0 \psi(x) + \varphi_1(x) + \cdots + \varphi_m(x),$$

которая в некоторых точках x_i ($-1 = x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$) принимает значения $s(x_i) = (-1)^{n+1-i}$ ($i = 1, \dots, n+1$). Функция $\cos s(x)$ называется *дробью Чебышева-Маркова* [7].

Для $\cos s(x)$ мы последовательно имеем

$$\begin{aligned} \cos s(x) + i \sin s(x) &= (x + i\sqrt{1-x^2})^{m_0} \prod_{j=1}^m (\cos \varphi_j(x) + i \sin \varphi_j(x)), \\ \prod_{j=1}^m (\cos \varphi_j(x) + i \sin \varphi_j(x)) &= \frac{v(x)f(x)}{G_1(x)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + a_m + i\sqrt{1-a_m^2}\sqrt{1-x^2})(x + a_{m/2} + i\sqrt{1-a_{m/2}^2}\sqrt{1-x^2}), \\ v(x) &= \prod_{j=1}^{2l} (|x + a_j|^2 - |a_j^2 - 1|(1-x^2) + 2iB_j(x)\sqrt{1-x^2}), \\ B_j(x) &= \operatorname{Re}(\sqrt{1-a_j}\sqrt{1+a_j}(x + \bar{a}_j)), \end{aligned}$$

$\bar{a}_j$ – сопряженное к a_j число ($j = 1, \dots, 2l$).

Следовательно,

$$\cos s(x) = \frac{Q(x; \varepsilon)}{G_1(x)}, \quad Q(x; \varepsilon) = \operatorname{Re}((x + i\sqrt{1-x^2})^{m_0} v(x) f(x)),$$

$Q(x) = Q(x; \varepsilon)$ является многочленом степени n . Так как $|Q(x)| \leq G_1(x)$ ($x \in [-1, 1]$) и $Q(x_i) = G_1(x_i) \cos s(x_i) = (-1)^{n+1-i} G_1(x_i)$ ($i = 1, \dots, n+1$), то $Q(x)$ является порожденным функцией G_1 ужом.

Если теперь $\varepsilon \rightarrow 0$, то $z_j \rightarrow \cos jt$, $a_j \rightarrow b_j = -1/\cos jt$ ($j = 1, \dots, m$); $f(x) \rightarrow x^2 - 1$, $B_j(x) \rightarrow 0$ ($j = 1, \dots, 2l$),

$$v(x) \rightarrow \prod_{j=1}^{2l} ((x + b_j)^2 - (b_j^2 - 1)(1 - x^2)) = \prod_{j=1}^{2l} (1 + b_j x^2).$$

Кроме того, $\operatorname{Re}(x + i\sqrt{1-x^2})^{m_0} = T_{m_0}(x)$. Поэтому

$$y(x) = -(1-x^2) \prod_{j=1}^{2l} (1 + b_j x^2) T_{m_0}(x) = \frac{1}{2} T_{m_0}(x) (T_m(x) - 1),$$

т.е. $y(x) = T_{m_0}(x) p_1(x; 0)$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Сравним вариацию $Q(x; \varepsilon)$ с вариацией полинома $p(x)$, который при любых $\varepsilon \geq 0$ лежит между функциями $-G_1(x; \varepsilon)$ и $G_1(x; \varepsilon)$. Ввиду непрерывной зависимости вариации многочлена от его коэффициентов достаточно сравнить $V(y)$ и $V(p)$. Но в лемме 4 уже доказано, что для $m_0 < 0.45m$ и для $m_0 = m/2$, если $m = 4l + 2$, выполняется неравенство $V(y) < V(p)$. Отсюда следует, что для $\varepsilon > 0$ достаточно малых $V(Q) < V(p_1)$. В соответствии с леммой 1 в качестве функции G можно взять $kG_1(x)$ с достаточно большим k .

Остается добавить, что перебором чисел $m \geq 2$, $1 \leq m_0 < 0.45m$ можно охватить все натуральные числа $n \geq 4$ (если же $n = 3$, то берем $m = 4l + 2$ с $l = 0$ и $m_0 = m/2$). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Erdős P. An extremum problem concerning trigonometric polynomials // Acta Sci. Math. (Szeged). 1939. V. 9. P. 113–115.
- [2] Kristiansen G. K. Some inequalities for algebraic and trigonometric polynomials // J. London Math. Soc. (2). 1979. V. 20. № 2. P. 300–315.
- [3] Bojanov B. D. Proof of a conjecture of Erdős about the longest of polynomial // Proc. Amer. Math. Soc. 1982. V. 84. № 1. P. 99–103.
- [4] Бакан А. Г. Некоторые вопросы выпуклого анализа и их приложения в теории функций. Дисс. ... к.ф.-м.н. Киев, 1986.
- [5] Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Об определении чебышевских ужей // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1994. № 3. С. 49–58.
- [6] Zagirov N. Sh. Polynomials with extremal coefficients and snakes // East J. Approx. 1995. V. 1. № 2. P. 231–248.
- [7] Марков А. А. Лекции о функциях, наименее уклоняющихся от нуля // Собр. сочинений. М.–Л.: Гостехиздат, 1948. С. 244–291.

Дагестанский государственный университет, г. Махачкала

Поступило

14.05.96

Исправленный вариант

28.05.97