Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Фарков, Всплесковые разложения на группе Кантора, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 6, 926–938

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10283>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 18:07:39

Всплесковые разложения на группе Кантора

Ю. А. Фарков

Изучаются всплесковые разложения в L^p -пространствах на локально компактной канторовой группе G . Получена точная по порядку оценка всплесковой аппроксимации произвольной функции $f \in L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$, через модуль непрерывности этой функции и доказана теорема типа Джексона–Бернштейна об аппроксимациях всплесками функций класса $\text{Lip}^{(p)}(\alpha; G)$.

Библиография: 22 названия.

DOI: 10.4213/mzm10283

1. Формулировки теорем. Пусть G – локально компактная канторова группа, $\{w_k \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ – система функций Уолша на G , и пусть $\hat{f}$ – преобразование Фурье функции $f \in L^2(G)$ (см. [1], [2] и п. 2). Первые примеры ортогональных всплесков на группе G построены Лэнгом [3]–[5], дальнейшие результаты о всплесках в анализе Уолша отражены в обзорных статьях [6] и [7]. В работах [4] и [8] указаны условия, при которых ортогональные всплески порождают безусловные базисы в пространствах $L^p(G)$, $1 < p < \infty$, и в диадическом пространстве Харди $H^1(G)$. Аналогичные результаты имеют место и для всплесков на положительной полупрямой $\mathbb{R}_+$ с операцией двоичного сложения (о построении ортогональных всплесков на $\mathbb{R}_+$ с помощью лакунарных рядов Уолша см. [9]–[11]). В статье [12] выявлен ряд существенных отличий аппроксимационных свойств диадических всплесков на $\mathbb{R}_+$ от классических всплесков и охарактеризованы оптимальные диадические всплески в задаче об L^2 -аппроксимации функций с компактными носителями на $\mathbb{R}_+$. В настоящей работе для каждого $1 \leq p < \infty$ получена точная по порядку оценка всплесковой аппроксимации произвольной функции $f \in L^p(G)$ через модуль непрерывности этой функции (теорема 1) и доказана теорема типа Джексона–Бернштейна об аппроксимациях всплесками функций класса $\text{Lip}^{(p)}(\alpha; G)$.

Напомним, что группа G состоит из последовательностей вида

$$x = (x_j) = (\dots, 0, 0, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots), \quad x_j \in \{0, 1\},$$

где $x_j = 0$ для $j < k = k(x)$ (нулевым элементом является нулевая последовательность θ). Групповая операция на G обозначается $\oplus$ и определяется как покомпонентное сложение по модулю 2:

$$(z_j) = (x_j) \oplus (y_j) \iff z_j = x_j + y_j \pmod{2} \quad \text{для } j \in \mathbb{Z},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 5.5805.2011).

а топология в G вводится полной системой окрестностей нуля:

$$U_l = \{(x_j) \in G \mid x_j = 0 \text{ для } j \leq l\}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Выделим в G дискретную подгруппу

$$H = \{(x_j) \in G \mid x_j = 0 \text{ для } j > 0\}$$

и определим автоморфизм $A \in \text{Aut } G$ по формуле $(Ax)_j = x_{j+1}$. Определим отображение $\lambda: G \rightarrow \mathbb{R}_+$ равенством

$$\lambda(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j 2^{-j}, \quad x = (x_j) \in G.$$

Образом подгруппы H при отображении λ является множество целых неотрицательных чисел: $\lambda(H) = \mathbb{Z}_+$. Для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ через $h_{[k]}$ обозначим элемент из H такой, что $\lambda(h_{[k]}) = k$; в частности, $h_{[0]} = \theta$. Для произвольного $x \in G$ полагаем $|x| := \lambda(x)$. Последовательность $\omega = (\omega_j)$, у которой $\omega_1 = 1$ и $\omega_j = 0$ для $j \neq 1$, обозначим через δ_1 .

Подгруппа $U = U_0$ группы G изоморфна компактной канторовой группе, называемой иногда *диадической группой* (см., например, [2; § 1.2]). Пространства Лебега $L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$, определяются по мере Хаара μ на группе G , нормированной условием $\mu(U) = 1$ (соответственно $\mu(U_l) = 2^{-l}$). Отображение λ переводит множество U в отрезок $[0, 1]$ и задает изоморфизм пространств с мерой (G, μ) и $(\mathbb{R}_+, \mu_+)$, где μ_+ — мера Лебега на $\mathbb{R}_+$.

Для каждой функции $f \in L^p(G)$, $p \geq 1$, положим

$$\omega_p(f; \delta) := \sup\{\|f(\cdot \oplus x) - f(\cdot)\|_p \mid 0 \leq |x| < \delta\}, \quad \delta > 0.$$

Величина $\omega_p(f; \delta)$ обладает обычными свойствами модуля непрерывности (см. лемму 4). Через $\omega_p^0(f; \delta)$ обозначим аналогичную величину, определяемую для функции $f \in L^p(U)$.

Для произвольного $\alpha > 0$ положим

$$\text{Lip}^{(p)}(\alpha; G) := \{f \in L^p(G) \mid \omega_p(f; \delta) = O(\delta^\alpha) \text{ при } \delta \rightarrow 0\}.$$

Пространство $\text{Lip}^{(p)}(\alpha; U)$ определяется аналогично. Величину наилучшего приближения функции f в метрике $L^p(U)$ полиномами Уолша порядка не выше n обозначим через $E_n(f; L^p(U))$, а n -ую частичную сумму ряда Уолша функции f обозначим через $S_n f$. Хорошо известен (см., например, [2; с. 189]) следующий результат.

ТЕОРЕМА А. Пусть $f \in L^p(U)$, $1 \leq p < \infty$, и $\alpha > 0$. Тогда следующие пять условий эквивалентны:

- $f \in \text{Lip}^{(p)}(\alpha; U)$;
- $\|f - S_{2^n} f\|_p = O(2^{-\alpha n})$ при $n \rightarrow \infty$;
- $E_{2^n}(f; L^p(U)) = O(2^{-\alpha n})$ при $n \rightarrow \infty$;
- $E_n(f; L^p(U)) = O(n^{-\alpha})$ при $n \rightarrow \infty$;
- $\omega_p^0(f; 2^{-n}) = O(2^{-\alpha n})$ при $n \rightarrow \infty$.

Предположим, что функция $\varphi \in L^2(G)$ удовлетворяет условию $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$, является решением масштабирующего уравнения

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k \varphi(Ax \oplus h_{[k]}), \quad x \in G, \quad (1)$$

и порождает кратномасштабный анализ $\{V_j\}$ в $L^2(G)$. Тогда при каждом $j \in \mathbb{Z}$ функции

$$\varphi_{jk}(x) = 2^{j/2} \varphi(A^j x \oplus h_{[k]}), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

образуют ортонормированный базис пространства V_j , объединение подпространств V_j плотно в $L^2(G)$ и $V_j \subset V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Для любого j через W_j обозначается ортогональное дополнение V_j в V_{j+1} . Отметим также, что для произвольной функции $f \in L^2(G)$ через $P_j f$ и $Q_j f$ обозначаются ортогональные проекции функции f на подпространства V_j и W_j соответственно (так что $Q_j f = P_{j+1} f - P_j f$ для всех j).

Из ортонормированности системы $\{\varphi(\cdot \oplus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ следует, что маска

$$m(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k w_k(\omega)$$

удовлетворяет условию

$$|m(\omega)|^2 + |m(\omega \oplus \delta_1)|^2 = 1 \quad \text{для всех } \omega \in G \quad (2)$$

(см. предложение 3.2 в [13]). Кроме того, поскольку φ порождает кратномасштабный анализ в $L^2(G)$, маска m не имеет блокирующих множеств (подробнее об этом свойстве см. в [10] и [14]).

В работе [13] было получено разложение масштабирующей функции φ в лакунарный ряд Уолша (см. формулу (10) ниже). Обозначим через CU_n класс функций φ , для которых ряд в (10) сходится абсолютно и равномерно на U_{1-n} . Достаточные условия принадлежности функции φ классу CU_n приведены в [10; предложение 9]. Всюду в дальнейшем мы предполагаем условие $\varphi \in CU_n$ выполненным.

Для построения ортогонального всплеска ψ , ассоциированного с φ , следует выбрать полином Уолша

$$m_1(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} d_k w_k(\omega)$$

такой, что матрица

$$\begin{pmatrix} m(\omega) & m(\omega \oplus \delta_1) \\ m_1(\omega) & m_1(\omega \oplus \delta_1) \end{pmatrix}$$

унитарна, а затем положить

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} d_k \varphi(Ax \oplus h_{[k]}), \quad x \in G.$$

Тогда при каждом j функции

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(A^j x \oplus h_{[k]}), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

образуют ортонормированный базис в W_j , а система $\{\psi_{jk} \mid j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_+\}$ является ортонормированным базисом пространства $L^2(G)$ (см. [4], [15]).

В пространствах $L^p(G)$ подпространства V_j и W_j определяются соответственно как замкнутые линейные оболочки систем $\{\varphi_{jk} \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ и $\{\psi_{jk} \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$. Оператор проектирования $P_j: L^p(G) \rightarrow V_j$ при любом $p \geq 1$ может быть задан (см. п. 3) по формуле

$$P_j f(t) = 2^j \int_G \Phi(A^j t, A^j x) f(x) d\mu(x), \quad f \in L^p(G), \quad t \in G, \quad (3)$$

где

$$\Phi(t, x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi(t \oplus h_{[k]}) \overline{\varphi(x \oplus h_{[k]})}, \quad t, x \in G. \quad (4)$$

Подобным образом для проектора $Q_j: L^p(G) \rightarrow W_j$ имеем

$$Q_j f(t) = 2^j \int_G \Psi(A^j t, A^j x) f(x) d\mu(x), \quad f \in L^p(G), \quad t \in G,$$

где

$$\Psi(t, x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \psi(t \oplus h_{[k]}) \overline{\psi(x \oplus h_{[k]})}, \quad t, x \in G.$$

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $1 \leq p < \infty$ существует положительная константа C_p такая, что неравенство*

$$\|f - P_j f\|_p \leq C_p \omega_p(f; 2^{-j})$$

выполнено для всех $f \in L^p(G)$.

СЛЕДСТВИЕ. *Если $f \in L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$, то*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f - P_j f\|_p = 0. \quad (5)$$

Отметим, что в случае $p = 2$ равенство (5) следует из того, что подпространства V_j образуют кратномасштабный анализ в $L^2(G)$.

ТЕОРЕМА 2. *Если $f \in L^p(G)$, $1 < p < \infty$, то сумма $\sum_{j=-m}^k Q_j f$ сходится к f в $L^p(G)$ при $m, k \rightarrow \infty$.*

В связи с теоремой 2 отметим, что в хааровском случае (см. пример 2 в [3]) система $\{\psi_{jk}\}$ не является базисом в $L^1(G)$.

Из теоремы 1 следует “теорема Джексона”:

$$\text{если } f \in \text{Lip}^{(p)}(\alpha; G), \quad \text{то } \|f - P_j f\|_p = O(2^{-j\alpha}) \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

В обратном направлении имеет место следующий аналог теоремы Бернштейна.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $f \in L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$, и $0 < \alpha < 1$. Предположим, что масштабирующая функция φ удовлетворяет условию Липшица*

$$|\varphi(x \oplus h) - \varphi(x)| \leq C|h|, \quad x, h \in G,$$

и справедлива оценка

$$\|f - P_j f\|_p \leq C 2^{-j\alpha}, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда $f \in \text{Lip}^{(p)}(\alpha; G)$.

Здесь и в дальнейшем через C обозначаются различные положительные константы. Аналоги теорем 1–3 для всплесковых разложений на прямой $\mathbb{R}$ доказаны в § 6.6 книги [16] (см. также [17; § 10.3], [18], [19; § 5.3]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Сопоставляя теорему А с теоремами 1 и 3, можно высказать гипотезу, что теорема 3 остается справедливой для всех $\alpha > 0$.

2. Предварительные сведения. Напомним, что ненулевая непрерывная функция $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}$ такая, что

$$\chi(x \oplus y) = \chi(x)\chi(y) \quad \text{для всех } x, y \in G,$$

называется *характером* группы G . Каждый характер канторовой группы G может быть задан по формуле

$$\chi(x, \omega) = \exp\left(\pi i \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j \omega_{1-j}\right), \quad x \in G,$$

для некоторого $\omega \in G$ (см., например, [2; с. 414]). Для любой $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ преобразование Фурье $\hat{f}$, определенное по формуле

$$\hat{f}(\omega) = \int_G f(x) \chi(x, \omega) d\mu(x), \quad \omega \in G,$$

принадлежит пространству $L^2(G)$. Оператор Фурье

$$\mathcal{F}: L^1(G) \cap L^2(G) \rightarrow L^2(G), \quad \mathcal{F}f = \hat{f},$$

стандартным образом продолжается на $L^2(G)$ и отображает это пространство на себя линейно, непрерывно и взаимно однозначно (см. [20; § 31]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $f \in L^1(G)$, $g \in L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$, то для свертки

$$(f * g)(x) := \int_G f(t)g(t \oplus x) d\mu(t), \quad x \in G,$$

выполнено неравенство $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

Будет применяться также следующее *неравенство Минковского*:

$$\left(\int_G \left|\int_G F(x, t) d\mu(t)\right|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leq \int_G \left(\int_G |F(x, t)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} d\mu(t), \quad (6)$$

где $1 \leq p < \infty$. Предложение 1 и неравенство (6) доказываются как в классическом случае (см., например, [21; с. 144], [22; (6.13.9)]).

Для каждого натурального m через $\mathcal{E}_m(G)$ обозначается множество функций $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, постоянных на множествах

$$U_{m,s} = A^{-m}(h_{[s]}) \oplus A^{-m}(U), \quad s \in \mathbb{Z}_+$$

(иногда функции из $\mathcal{E}_m(G)$ называют *двоично-целыми* функциями порядка m). Множество $\mathcal{E}(G)$ двоично-целых функций на G определяется как объединение всех множеств $\mathcal{E}_m(G)$. Обозначим через $\mathcal{E}_c(G)$ множество двоично-целых функций на G , имеющих компактные носители.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Множества $\mathcal{E}(G)$ и $\mathcal{E}_c(G)$ плотны в пространствах $L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$.

Это свойство хорошо известно (см., например, [1; § 10.5], [2; § 5.1], [20; § 12]).

В последнем произведении индексы каждого множителя, начиная со второго, получаются “сдвигом” индексов предыдущего множителя на одну позицию вправо и добавлением на освободившееся первое место одной новой цифры из двоичного разложения числа l .

3. Доказательства теорем. Сначала докажем два вспомогательных утверждения, связанных с разложением (10) и формулой (3). Как видно из (10), $U_{1-n} = A^{n-1}(U)$ и $\varphi(x) = 0$ для всех $x \in G \setminus U_{1-n}$.

ЛЕММА 1. Для суммы ряда (10) верна оценка

$$|\varphi(x)| \leq 2^{-n+1} A_\varphi, \quad x \in G, \quad (11)$$

где

$$A_\varphi := 1 + \sum_{l \in \mathbb{N}(n)} |a_l[\varphi]|.$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} |\varphi(x \oplus h_{[k]})| \leq 2A_\varphi, \quad x \in G. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (11) имеет место, поскольку $\varphi \in CU_n$ и $|w_l(x)| = w_l(0) = 1$. Неравенство (12) следует из (11), так как $\text{supp } \varphi \subset U_{1-n}$ и при любом x количество ненулевых слагаемых в левой части (11) не превосходит 2^n . Лемма 1 доказана.

Пусть $K = K_\varphi$ — убывающая на $\mathbb{R}_+$ функция такая, что

$$|\varphi(x)| \leq K(|x|) \leq 4 \cdot 2^{-n} A_\varphi \quad \text{для всех } x \in U_{1-n},$$

и $K(|x|) = 0$ для всех $x \in G \setminus U_{-n}$. Отметим, что любого $p \geq 1$

$$\int_G [K(|A^{-m}t|)]^p d\mu(t) = 2^m \int_0^\infty [K(\tau)]^p d\tau, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \quad (13)$$

В следующей лемме приведены используемые ниже свойства функции $\Phi(t, x)$, заданной по формуле (4).

ЛЕММА 2. Функция $\Phi(t, x)$ обладает следующими свойствами:

- (i) $|\Phi(t, x)| \leq 4A_\varphi^2$ для всех $t, x \in G$;
- (ii) $\int_G |\Phi(t, x)| dx \leq 2A_\varphi \|\varphi\|_1$ для всех $t \in G$;
- (iii) $\int_G \Phi(t, x) dx = 1$ для н.в. $t \in G$;
- (iv) $|\Phi(t, x)| \leq 16A_\varphi K(|t \oplus x|/2)$ для всех $t, x \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство (i) следует из (12) и неравенства

$$|\Phi(t, x)| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} |\varphi(t \oplus h_{[k]})| \cdot \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} |\varphi(x \oplus h_{[l]})|.$$

Далее, согласно (11) и (12)

$$\int_G |\Phi(t, x)| d\mu(x) \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} |\varphi(t \oplus h_{[k]})| \int_G |\varphi(x \oplus h_{[k]})| d\mu(x) \leq 2A_\varphi \|\varphi\|_1,$$

где использовано свойство инвариантности меры Хаара относительно сдвигов. Для вывода (iii) воспользуемся свойством разбиения единицы [14; теорема 1]:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi(t \oplus h_{[k]}) = 1 \quad \text{для п.в. } t \in G,$$

и в результате получим

$$\int_G \Phi(t, x) d\mu(x) = \int_G \overline{\varphi(x)} d\mu(x) \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi(t \oplus h_{[k]}) = \overline{\widehat{\varphi}(\theta)} = 1.$$

Поскольку носитель функции $K(|x|)$ содержится в U_{-n} , аналогично (12) имеем оценку

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}_+} K(|x \oplus h_{[l]}|) \leq 8A_\varphi, \quad x \in G. \quad (14)$$

Далее, для произвольных фиксированных $t, x \in G$ положим

$$\Lambda_1 := \left\{ l \in \mathbb{Z}_+ \mid |h_{[l]} \oplus t| \geq \frac{|t \oplus x|}{2} \right\}, \quad \Lambda_2 := \left\{ l \in \mathbb{Z}_+ \mid |h_{[l]} \oplus x| \geq \frac{|t \oplus x|}{2} \right\}.$$

Учитывая, что $t \oplus x = (h_{[l]} \oplus t) \oplus (h_{[l]} \oplus x)$, в силу монотонности и ограниченности функции $K(\cdot)$ на $\mathbb{R}_+$ получаем

$$\begin{aligned} |\Phi(t, x)| &\leq \left(\sum_{l \in \Lambda_1} + \sum_{l \in \Lambda_2} \right) K(|t \oplus h_{[l]}|) K(|x \oplus h_{[l]}|) \\ &\leq K\left(\frac{|t \oplus x|}{2}\right) \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} K(|x \oplus h_{[l]}|) + K\left(\frac{|t \oplus x|}{2}\right) \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} K(|t \oplus h_{[l]}|). \end{aligned}$$

Отсюда ввиду (14) следует (iv). Лемма 2 доказана.

Проекция произвольной функции $f \in L^2(G)$ на подпространство V_j определяется по формуле

$$P_j f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (f, \varphi_{jk}) \varphi_{jk}(t), \quad t \in G, \quad (15)$$

где (f, φ_{jk}) – коэффициенты Фурье функции f по системе φ_{jk} . Подставляя в (15) явное выражение (f, φ_{jk}) и меняя порядок суммирования и интегрирования (что обосновывается с помощью свойства (iv) из леммы 2, как в [19; с. 239]), получим формулу (3). Заметим, что $P_j f(t) = P_0 f_{-j}(A^j t)$, где $f_{-j}(x) := f(A^{-j}x)$. Из следующей леммы вытекает, что оператор P_j при любом $1 \leq p < \infty$ может быть продолжен с подпространства $L^2(G) \cap L^p(G)$ на все пространство $L^p(G)$.

ЛЕММА 3. Для каждого $1 \leq p < \infty$ существует константа C такая, что для всех $j \in \mathbb{Z}_+$ и всех $f \in L^2(G) \cap L^p(G)$ верно неравенство

$$\|P_j f\|_p \leq C \|f\|_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 2, из формулы (3) имеем

$$|P_0 f(t)| \leq C \int_G K(|x \oplus t|/2) |f(x)| d\mu(x)$$

и, следовательно, по предложению 1

$$\|P_0 f\|_p \leq C \|f\|_p \int_G K(|x|) d\mu(x) \leq C \|f\|_p.$$

Для $j \neq 0$ положим $g = f_{-j}$. Тогда по доказанному $\|P_0 g\|_p \leq C \|g\|_p = C 2^{j/p} \|f\|_p$ и $\|P_j f\|_p = 2^{-j/p} \|P_0 g\|_p$. Отсюда следует требуемое. Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $f \in L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$. Тогда

- (i) $\omega_p(f; \delta_1) \leq \omega_p(f; \delta_2)$ для $\delta_1 < \delta_2$;
- (ii) $\omega_p(f; \delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$;
- (iii) $\omega_p(f; \delta_1 + \delta_2) \leq \omega_p(f; \delta_1) + \omega_p(f; \delta_2)$;
- (iv) $\omega_p(f; \tau \delta) \leq (1 + \tau) \omega_p(f; \delta)$ для любого $\tau \geq 1$;
- (v) $\omega_p(f_r; \delta) = 2^{-r/p} \omega_p(f; 2^r \delta)$ для $f_r(t) = f(A^r t)$, $r \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство монотонности (i) следует непосредственно из определения. Свойство (ii) тривиально выполняется для двоично-целых функций с компактными носителями на G , а множество $\mathcal{E}_c(G)$ таких функций плотно в $L^p(G)$ (предложение 2). Свойство (iii) следует из неравенства треугольника для нормы $\|\cdot\|_p$. Если $m = [\tau]$ – целая часть числа τ , то в силу (i) и (iii) имеем

$$\omega_p(f; \tau \delta) \leq \omega_p(f; (m+1)\delta) \leq (m+1) \omega_p(f; \delta) \leq (\tau+1) \omega_p(f; \delta),$$

т.е. верно (iv). Для вывода (v) достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} \|f_r(\cdot) - f_r(\cdot \oplus h)\|_p^p &= \int_G |f(A^r t) - f(A^r(t \oplus h))|^p d\mu(t) \\ &= 2^{-r} \int_G |f(u) - f(u \oplus A^r h)|^p d\mu(u) = 2^{-r} \|f(\cdot) - f(\cdot \oplus A^r h)\|_p^p \end{aligned}$$

для всех $h \in G$, $r \in \mathbb{Z}$. Лемма 4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Покажем сначала, что неравенство

$$\|f - P_j f\|_p \leq C_p \omega_p(f; 2^{-j}) \quad (16)$$

верно для $j = 0$. Пользуясь леммой 2 и формулой (3), имеем

$$\begin{aligned} |f(t) - P_0 f(t)| &\leq \int_G |f(t) - f(x)| \Phi(t, x) d\mu(x) \leq C \int_G |f(t) - f(x)| K\left(\frac{|t \oplus x|}{2}\right) d\mu(x) \\ &\leq C \int_G |f(t) - f(u \oplus t)| K\left(\frac{|u|}{2}\right) d\mu(u). \end{aligned}$$

Применяя неравенство Минковского (6), отсюда получаем

$$\begin{aligned} \|f - P_j f\|_p &\leq C \left(\int_G \left(\int_G |f(t) - f(u \oplus t)| K(|u|/2) d\mu(u) \right)^p d\mu(t) \right)^{1/p} \\ &\leq C \int_G \left(\int_G |f(t) - f(u \oplus t)|^p dt \right)^{1/p} K\left(\frac{|u|}{2}\right) d\mu(u) \\ &\leq C \int_G \omega_p(f; |u|) K\left(\frac{|u|}{2}\right) d\mu(u). \end{aligned} \quad (17)$$

Согласно лемме 4 если $0 < |u| < 1$, то $\omega_p(f; |u|) \leq \omega_p(f; 1)$, а если $|u| > 1$, то $\omega_p(f; |u|) \leq 2|u|\omega_p(f; 1)$. Поскольку функция $K(\cdot)$ монотонна и имеет компактный носитель на $\mathbb{R}_+$, из (17) получаем (16) для $j = 0$.

Для любого $j \in \mathbb{N}$ по свойству (v) из леммы 4 имеем

$$\omega_p(f_j; 1) = 2^{j/p} \omega_p(f; 2^{-j}).$$

Видно также, что

$$f(t) - P_j f(t) = f_{-j}(A^j t) - P_0 f_{-j}(A^j t),$$

так как

$$P_j f(A^{-j} t) = 2^j \int_G f(x) \Phi(t, A^j x) d\mu(x) = \int_G f(x) \Phi(t, A^j x) d\mu(A^j x) = P_0 f_{-j}(t).$$

Поэтому для любого j

$$\|f - P_j f\|_p = 2^{-j/p} \|f_{-j} - P_0 f_{-j}\|_p \leq C \cdot 2^{-j/p} \omega_p(f_j; 1) = C \omega_p(f; 2^{-j}).$$

Теорема 1 доказана.

ЛЕММА 5. Для любой функции $f \in L^p(G)$, $1 < p < \infty$, справедливо равенство

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \|P_j f\|_p = 0. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 2 и леммы 3 можем предполагать, что $f \in \mathcal{E}_c(G)$ и $\text{supp } f \subset U_l$ для некоторого целого l . Тогда для $t \in U_l$ мы имеем

$$\begin{aligned} |P_{-m} f(t)| &\leq 2^{-m} \int_{U_l} |f(x)| |\Phi(A^{-m} t, A^{-m} x)| d\mu(x) \\ &\leq 2^{-m} 16 A_\varphi \int_{U_l} |f(x)| K(|A^{-m-1}(t \oplus x)|) d\mu(x) \\ &\leq 2^{-m} 16 A_\varphi 2^{-l} \|f\|_\infty K(0) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow 0, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{U_l} |P_{-m} f(t)|^p d\mu(t) = 0. \quad (19)$$

В случае $t \in G \setminus U_l$ после подстановки $v = A^{-m-1}(t \oplus x)$ получим

$$\begin{aligned} |P_{-m} f(t)| &\leq 32 A_\varphi \|f\|_\infty \int_{A^{-m-1}(t \oplus U_l)} K(|v|) d\mu(v) \\ &\leq 2^{-m} 16 A_\varphi \|f\|_\infty 2^{-l} K(|A^{-m-1} t|) \end{aligned}$$

и, соответственно, в силу (13)

$$\begin{aligned} \int_{G \setminus U_l} |P_{-m} f(t)|^p dt &\leq C \cdot 2^{-mp} \|f\|_\infty^p \int_{G \setminus U_l} [K(|A^{-m-1} t|)]^p d\mu(t) \\ &\leq C \cdot 2^{-m(p-1)} \|f\|_\infty^p \int_0^\infty [K(\tau)]^p d\tau \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

что вместе с (19) доказывает (18). Лемма 5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для данной функции f имеем

$$\left\| f - \sum_{j=-m}^k Q_j f \right\|_p \leq \|P_{-m} f\|_p + \|f - P_k f\|_p.$$

Поэтому теорема 2 следует из формулы (5) и леммы 5. Теорема 2 доказана.

Заметим, что если масштабирующая функция φ удовлетворяет условию Липшица

$$|\varphi(x \oplus h) - \varphi(x)| \leq C|h|, \quad x, h \in G, \quad (20)$$

то согласно лемме 2 имеем

$$|\Phi(t \oplus h, x) - \Phi(t, x)| = \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} (\varphi(t \oplus h \oplus l) - \varphi(t \oplus l)) \overline{\varphi(x \oplus l)} \right| \leq C|h|K \left(\frac{|t \oplus x|}{2} \right). \quad (21)$$

ЛЕММА 6. Пусть масштабирующая функция φ удовлетворяет условию (20). Тогда для любого $1 \leq p < \infty$ существует константа C_p такая, что неравенство

$$\omega_p(f; \delta) \leq C_p \min(2^j \delta, 1) \|f\|_p, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad \delta > 0, \quad (22)$$

выполнено для всех $f \in V_j \cap L^p(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $j = 0$ имеем $f = P_0 f \in V_0$ и в силу (21)

$$\begin{aligned} |f(t \oplus h) - f(t)| &\leq \int_G |\Phi(t \oplus h, x) - \Phi(t, x)| |f(x)| d\mu(x) \\ &\leq C|h| \int_G K \left(\frac{|t \oplus x|}{2} \right) |f(x)| d\mu(x). \end{aligned}$$

Для $0 < |h| \leq 1$ по предложению 1 отсюда получаем

$$\|f(\cdot \oplus h) - f(\cdot)\|_p \leq C|h| \|K\|_1 \|f\|_p \leq C \|f\|_p.$$

Если же $|h| > 1$, то $\omega_p(f; |h|) \leq 2\|f\|_p$, что завершает доказательство в случае $j = 0$. Пусть $f \in V_j \cap L^p(G)$, где $j \neq 0$. Поскольку $f_{-j} \in V_0$, то по лемме 4 имеем

$$\omega_p(f; \delta) = 2^{-j/p} \omega_p(f_{-j}; 2^j \delta) \leq C 2^{-j/p} \min(2^j \delta, 1) \|f_{-j}\|_p = C_p \min(2^j \delta, 1) \|f\|_p,$$

т.е. верно неравенство (22). Лемма 6 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. По условию масштабирующая функция φ удовлетворяет условию (20) и верна оценка

$$\|f - P_j f\|_p \leq C 2^{-j\alpha}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad (23)$$

где $0 < \alpha < 1$. Применяя неравенство треугольника, из оценки (23) для $Q_j f = P_{j+1}f - P_j f$ получаем $\|Q_j f\|_p \leq C 2^{-j\alpha}$. Фиксируем $h \neq \theta$ и выберем целое m такое, что $2^{m-1} \leq 1/|h| < 2^m$. В силу теоремы 2 имеем $f = P_0 f + \sum_{j=0}^{\infty} Q_j f$ со сходимостью в $L_p(G)$. Оценим нормы слагаемых в правой части равенства

$$\begin{aligned} f(t \oplus h) - f(t) &= P_0 f(t \oplus h) - P_0 f(t) + \sum_{j=0}^{m-1} [Q_j f(t \oplus h) - Q_j f(t)] + \sum_{j=m}^{\infty} [Q_j f(t \oplus h) - Q_j f(t)]. \end{aligned}$$

Во-первых, согласно (21)

$$\begin{aligned} |P_0 f(t \oplus h) - P_0 f(t)| &\leq \int_G |\Phi(t \oplus h, x) - \Phi(t, x)| |f(x)| d\mu(x) \\ &\leq C|h| \int_G K\left(\frac{|t \oplus x|}{2}\right) |f(x)| d\mu(x). \end{aligned}$$

Отсюда с помощью неравенства Минковского (6) получаем

$$\begin{aligned} \|P_0 f(\cdot \oplus h) - P_0 f(\cdot)\|_p &\leq C|h| \left(\int_G \left(\int_G K\left(\frac{|t \oplus x|}{2}\right) |f(x)| d\mu(x) \right)^p d\mu(t) \right)^{1/p} \\ &\leq C|h| \int_G \left(\int_G |f(u \oplus t)|^p d\mu(t) \right)^{1/p} K\left(\frac{|u|}{2}\right) d\mu(u) \leq C|h| \|f\|_p. \end{aligned}$$

Во-вторых, применяя лемму 6 и учитывая выбор числа m , имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} \|Q_j f(\cdot \oplus h) - Q_j f(\cdot)\|_p &\leq C \sum_{j=0}^{m-1} 2^j |h| \|Q_j f\|_p \leq C|h| \sum_{j=0}^{m-1} 2^j \cdot 2^{-j\alpha} \leq C|h| \cdot 2^{m(1-\alpha)} \leq C|h|^\alpha. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^{\infty} \|Q_j f(\cdot \oplus h) - Q_j f(\cdot)\|_p &\leq 2 \sum_{j=m}^{\infty} \|Q_j f\|_p \leq C \sum_{j=m}^{\infty} 2^{-j\alpha} \leq C \cdot 2^{-m\alpha} \leq C|h|^\alpha. \end{aligned}$$

Поэтому $f \in \text{Lip}^{(p)}(\alpha; G)$. Теорема 3 доказана.

Автор выражает благодарность Е. А. Лебедевой за обсуждение работы и рецензенту за ряд ценных замечаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Изд-во ЛКИ, М., 2008.

- [2] F. Schipp, W.R. Wade, P. Simon, *Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Adam Hilger, Bristol, 1990.
- [3] W. C. Lang, “Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group”, *SIAM J. Math. Anal.*, **27**:1 (1996), 305–312.
- [4] W. C. Lang, “Wavelet analysis on the Cantor dyadic group”, *Houston J. Math.*, **24**:3 (1998), 533–544.
- [5] W. C. Lang, “Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group”, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **21**:2 (1998), 307–314.
- [6] Yu. A. Farkov, “Wavelets and frames in Walsh analysis”, *Wavelets: Classification, Theory and Applications*, Chapter 11, Nova Sci. Publ., New York, 2012, 267–304.
- [7] Yu. A. Farkov, “Periodic wavelets in Walsh analysis”, *Commun. Math. Appl.*, **3**:3 (2012), 223–242.
- [8] Yu. A. Farkov, U. Goginava, T. Kopaliani, “Unconditional convergence of wavelet expansion on the Cantor dyadic group”, *Jaen J. Approx.*, **3**:1 (2011), 117–133.
- [9] Yu. A. Farkov, “Orthogonal p -wavelets on $\mathbb{R}_+$ ”, *Wavelets and Splines* (St. Petersburg, Russia, July 3–8, 2003), St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 2005, 4–26.
- [10] В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков, “Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой”, *Матем. сб.*, **197**:10 (2006), 129–160.
- [11] Yu. A. Farkov, “On wavelets related to the Walsh series”, *J. Approx. Theory*, **161**:1 (2009), 259–279.
- [12] В. Ю. Протасов, “Аппроксимация диадическими всплесками”, *Матем. сб.*, **198**:11 (2007), 135–152.
- [13] Ю. А. Фарков, “Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 193–220.
- [14] Ю. А. Фарков, “Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп”, *Матем. заметки*, **82**:6 (2007), 934–952.
- [15] Yu. A. Farkov, E. A. Rodionov, “Algorithms for wavelet construction on Vilenkin groups”, *p -Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **3**:3 (2011), 181–195.
- [16] M. A. Pinsky, *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets*, Brooks/Cole Ser. Adv. Math., Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 2002.
- [17] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.
- [18] R. Q. Jia, “A Bernstein-type inequality associated with wavelet decomposition”, *Constr. Approx.*, **9**:2 (1993), 299–318.
- [19] E. Hernández, G. Weiss, *A First Course on Wavelets*, Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [20] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*. Т. 1. *Структура топологических групп. Теория интегрирования. Представления групп*, Наука, М., 1975; Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*. Т. 2. *Структура и анализ компактных групп. Анализ на локально компактных абелевых группах*, Мир, М., 1975.
- [21] S. Igari, *Real Analysis – With an Introduction to Wavelet Theory*, Transl. Math. Monogr., **177**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [22] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Полия, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.

Ю. А. Фарков

Российский государственный геологоразведочный
университет, г. Москва

Российская академия народного хозяйства и
государственной службы при Президенте РФ,
г. Москва

E-mail: farkov@list.ru

Поступило

28.03.2013

Исправленный вариант

17.10.2013