Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Баскаков, Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 2, 174–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10285>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 08:30:33

Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве

А. Г. Баскаков

Получены асимптотические представления операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп линейных операторов, действующих в банаховых пространствах. Представления получены в условиях счетности спектра на единичной окружности и на мнимой оси ограниченного оператора и генератора полугруппы соответственно. При исследовании применяются методы абстрактного гармонического анализа и спектральной теории операторов.

Библиография: 25 названий.

DOI: 10.4213/mzm10285

Получено асимптотическое представление $T^n = \sum_{k=1}^m \gamma_k^n A_k(n)$ операторов T^n , $n \geq 1$, из банаховой алгебры $\text{End } \mathcal{X}$ линейных ограниченных операторов, действующих в комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$. Предполагается, что оператор $T \in \text{End } \mathcal{X}$ имеет ограниченные степени и множество

$$\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$$

конечно. Функции $A_k: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$, $1 \leq k \leq m$, обладают следующими свойствами:

- 1) операторы $A_k(n)$, $n \geq 1$, $i \leq k \leq m$, принадлежат наименьшей замкнутой подалгебре из $\text{End } \mathcal{X}$, порожденной оператором T ;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_k(n+1) - A_k(n)\| = 0$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|TA_k(n) - \gamma_k A_k(n)\| = 0$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_k(n)A_p(n)\| = 0$ для $k \neq p$, $1 \leq k, p \leq m$.

Аналогичное представление получено для ограниченных полугрупп операторов класса C_0 .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00378) и Российского научного фонда (грант № 14-21-00066, выполняемый в Воронежском государственном университете).

1. Введение. Пусть $\mathcal{X}$ – комплексное банахово пространство и $\text{End } \mathcal{X}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$. Символ $\mathbb{J}$ используется для обозначения одного из множеств $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$. Через $\ell^1(\mathbb{J})$ обозначается банахово пространство суммируемых на $\mathbb{J}$ последовательностей комплексных чисел с нормой $\|f\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{J}} |f(n)|$, $f \in \ell^1(\mathbb{J})$. Если $\mathbb{J} = \mathbb{Z}$, то $\ell^1(\mathbb{J})$ является банаховой алгеброй со сверткой

$$(f_1 * f_2)(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_1(n - k) f_2(k), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad f_1, f_2 \in \ell^1(\mathbb{Z}),$$

в качестве умножения.

Рассматривается оператор $T \in \text{End } \mathcal{X}$ с ограниченными степенями, т.е. выполнено условие

$$\sup_{n \geq 0} \|T^n\| = \mathcal{M}(T) < \infty. \quad (1)$$

Для его исследования используются методы гармонического анализа в банаховых модулях (см. [1]–[14]) над алгеброй $\ell^1(\mathbb{Z})$. В частности, существенно используется понятие спектра Бёрлинга векторов из банаховых модулей. В качестве банахова $\ell^1(\mathbb{Z})$ -модуля часто выступает факторпространство $\ell^\infty(\mathbb{J}, E)/c_0(\mathbb{J}, E)$, где $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{J}, E)$ – банахово пространство ограниченных последовательностей, определенных на $\mathbb{J}$ со значениями в банаховом пространстве E с нормой $\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{J}} \|x(k)\|$, $x \in \ell^\infty$, и $c_0 = c_0(\mathbb{J}, E)$ – подпространство убывающих на J последовательностей из ℓ^∞ , т.е. $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \|x(k)\| = 0$, $x \in c_0$.

Символом $\mathcal{A}_T$ обозначается наименьшая замкнутая подалгебра из $\text{End } \mathcal{X}$, содержащая исследуемый оператор T . Условие (1) влечет включение $\sigma(T) \subset \mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ для спектра $\sigma(T)$ оператора T . Эквивалентная перенормировка $\|x\|_* = \sup_{n \geq 0} \|T^n x\|$, $x \in \mathcal{X}$, позволяет в дальнейшем без ограничения общности считать, что T является сжатием, т.е. считать, что величина $\mathcal{M}(T) = 1$ в (1).

Одним из основных результатов статьи является

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено условие

$$\sigma(T) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}, \quad (2)$$

где $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ – единичная окружность. Тогда существуют операторнозначные функции $A_k \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, \text{End } \mathcal{X})$, $1 \leq k \leq m$, такие, что имеет место следующее представление степеней оператора T :

$$T^n = \sum_{k=1}^m \gamma_k^n A_k(n), \quad n \geq 1. \quad (3)$$

Функции A_k , $1 \leq k \leq m$, можно выбрать такими, чтобы они обладали следующими свойствами:

- 1) операторы $A_k(n)$, $n \geq 0$, принадлежат алгебре $\mathcal{A}_T$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_k(n+1) - A_k(n)\| = 0$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T A_k(n) - \gamma_k A_k(n)\| = 0$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_k(n) A_j(n)\| = 0$ для $k \neq j$, $1 \leq k, j \leq m$.

В п. 4 приводятся формулы (см. равенства (25) и доказательство теоремы 1) для функций A_k , $i \leq k \leq m$, полученные с использованием интерполяционной формулы Сильвестра для операторов.

Из теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1 (теорема Кацнельсона–Цафрири (см. [15])). *Условие*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{n+1} - T^n\| = 0$$

выполнено тогда и только тогда, если

$$\sigma(T) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}.$$

Последовательность $x \in \ell^\infty(\mathbb{J}, E)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \|x(k+1) - x(k)\| = 0, \quad (4)$$

т.е. $S(1)x - x \in c_0(\mathbb{J}, E)$, где $S(1) \in \text{End } \ell^\infty$ – оператор сдвига: $(S(1)x)(k) = x(k+1)$, $k \in \mathbb{J}$, $x \in \ell^\infty$. Из условия (4) следует, что

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \|x(k+m) - x(k)\| = 0 \quad \text{для любого } m \in \mathbb{N}.$$

Множество медленно меняющихся на бесконечности последовательностей обозначим символом $\ell_{\text{sl}, \infty}^\infty = \ell_{\text{sl}, \infty}^\infty(\mathbb{J}, E)$. Оно образует замкнутое подпространство в пространстве $\ell^\infty(\mathbb{J}, E)$. Отметим, что функции A_k , $1 \leq k \leq m$, из представления (3) теоремы 1 являются медленно меняющимися на бесконечности (принадлежат $\ell_{\text{sl}, \infty}^\infty(\mathbb{Z}_+, \text{End } \mathcal{X})$). В теореме Кацнельсона–Цафрири такой является последовательность $n \mapsto T^n: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$.

Последовательность $x \in \ell^\infty(\mathbb{J}, E)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют последовательности x_k , $1 \leq k \leq m$, из $\ell^\infty(\mathbb{J}, E)$, представимые в виде

$$x_k(n) = \gamma_k^n x_k^0(n), \quad n \in \mathbb{J}, \quad 1 \leq k \leq m,$$

где $x_k^0 \in \ell_{\text{sl}, \infty}^\infty(\mathbb{J}, E)$, $\gamma_k \in \mathbb{T}$, $1 \leq k \leq m$, такие, что

$$\sup_{n \in \mathbb{J}} \left\| x(n) - \sum_{k=1}^m \gamma_k^n x_k^0(n) \right\| < \varepsilon.$$

Множество почти периодических на бесконечности последовательностей $x: \mathbb{J} \rightarrow E$ образует замкнутое подпространство в $\ell^\infty(\mathbb{J}, E)$, обозначаемое через $AP_\infty(\mathbb{J}, E)$. Отметим, что в условиях теоремы 1 почти периодической на бесконечности является последовательность $n \mapsto T^n: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть множество $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ не более чем счетно и в каждой предельной точке γ_0 из этого множества существует $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon R(\varepsilon + \gamma_0, T)x$ для вектора $x \in \mathcal{X}$. Тогда последовательность $n \mapsto T^n x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathcal{X}$ почти периодична на бесконечности.

В условиях теоремы $R(\lambda, T) = (T - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$, – резольвента оператора T .

СЛЕДСТВИЕ 2. Если в условиях теоремы 2 существует $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon R(\varepsilon + \gamma_0, T)x$ в каждой точке γ_0 из $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$, то вектор x представим в виде $x = x_1 + x_0$, где x_1 принадлежит замыканию линейной оболочки собственных векторов оператора T , отвечающих собственным значениям из множества $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$, а вектор x_0 принадлежит замкнутому подпространству

$$\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_0(T) = \left\{ x \in \mathcal{X} : \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n x_0\| = 0 \right\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть множество $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ не более чем счетно. Условие $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0(T)$ эквивалентно любому из следующих двух условий:

- 1) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon R(\varepsilon + \gamma_0, T)x = 0$ в каждой точке $\gamma_0 \in \sigma(T) \cap \mathbb{T}$ для любого вектора $x \in \mathcal{X}$;
- 2) сопряженный оператор T^* не имеет собственных значений из $\mathbb{T}$.

Результат из следствия 3 о сильной устойчивости оператора T (см. [16; II.2]) был получен в статьях [17], [18]. Его доказательство в [17] проводилось на основе предложенного в статье [19] метода построения по оператору T обратимой изометрии, спектр которой содержится в $\sigma(T)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть подпространство $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_0(T)$ имеет конечную коразмерность m в $\mathcal{X}$. Тогда $\sigma(\hat{T}) \subset \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\} \subset \mathbb{T}$ – конечное множество и каждая последовательность $n \mapsto T^k x$: $\mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathcal{X}$, $x \in \mathcal{X}$, является почти периодической на бесконечности, причем она представима в виде

$$T^n x = \sum_{k=1}^m \gamma_k^n x_k(n), \quad (5)$$

где $x_k: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathcal{X}$, $1 \leq k \leq m$, – медленно меняющиеся на бесконечности последовательности ($x_k \in \ell_{\text{sl}, \infty}^{\infty}(\mathbb{Z}_+, \mathcal{X})$), и $\hat{T} \in \text{End}(\mathcal{X}/\mathcal{X}_0)$ – фактороператор, построенный по T .

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть множество $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ счетно и функция

$$\hat{g}: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{g}(\gamma) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \gamma^k, \quad \gamma \in \mathbb{T}, \quad \sum_{k \geq 0} |\alpha_k| < \infty,$$

обращается в нуль во всех предельных точках этого множества. Тогда функция

$$n \mapsto T^n \hat{g}(T): \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{X},$$

является почти периодической на бесконечности функцией.

В следующих утверждениях рассматривается ограниченная полугруппа $\mathcal{U}: \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ класса C_0 .

ТЕОРЕМА 3. Пусть полугруппа операторов $\mathcal{U}$ непрерывна в равномерной операторной топологии на некотором промежутке $[t_0, \infty)$, где $t_0 > 0$, и спектр ее генератора $A: D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ обладает следующим свойством:

$$\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, i\lambda_2, \dots, i\lambda_m\} \quad (6)$$

является конечным множеством. Тогда полугруппа $\mathcal{U}$ представима в виде

$$\mathcal{U}(t) = \sum_{k=1}^m B_k(t)e^{i\lambda_k t} + B_0(t), \quad t \geq 0, \quad (7)$$

где $B_k: [t_0, \infty) \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$, $0 \leq k \leq m$, – непрерывные в равномерной операторной топологии функции. Они обладают следующими свойствами:

- 1) операторы $B_k(t)$, $t \geq t_0$, $0 \leq k \leq m$, принадлежат наименьшей замкнутой подалгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$, порожденной операторами $\mathcal{U}(t)$, $t \geq t_0$;
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B_0(t)\| = 0$;
- 3) функции B_k , $1 \leq k \leq m$, являются медленно меняющимися на бесконечности функциями, причем могут быть выбраны так, чтобы они допускали расширение на $\mathbb{C}$ до целых функций экспоненциального (сколь угодно малого) типа, причем $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B'_k(t)\| = 0$;
- 4) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathcal{U}(t)B_k(t) - e^{i\lambda_k t}B_k(t)\| = 0$;
- 5) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B_k(t)B_p(t)\| = 0$, $k \neq p$.

Отметим, что числа $i\lambda_k$, $1 \leq k \leq m$, из условия (6) теоремы 3 не обязаны находиться в разных компонентах связности из множества $\sigma(A)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathcal{X}_0(\mathcal{U}) = \{x \in \mathcal{X}: \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{U}(t)x = 0\}$ и $\dim \mathcal{X}/\mathcal{X}_0(\mathcal{U}) < \infty$. Тогда каждая функция $t \mapsto \mathcal{U}(t)x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{X}$, $x \in \mathcal{X}$, представима в виде

$$\mathcal{U}(t)x = \sum_{k=1}^m x_k(t)e^{i\lambda_k t} + x_0(t), \quad (8)$$

где $x_k: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{X}$, $1 \leq k \leq m$, – медленно меняющиеся на бесконечности функции ($x_k \in C_{\text{sl}, \infty}(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$), $x_0 \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$ и $\sigma(\tilde{A}) = \{i\lambda_1, \dots, i\lambda_m\}$ – спектр фактороператора $\tilde{A}: D(\tilde{A}) \subset \mathcal{X}/\mathcal{X}_0(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{X}/\mathcal{X}_0(\mathcal{U})$, построенного по генератору A полугруппы $\mathcal{U}$.

При условии $\dim \mathcal{X}/\mathcal{X}_0(\mathcal{U}) = m < \infty$ полугруппа $\mathcal{U}$ называлась в работах [20], [21] асимптотически конечномерной. Отметим еще, что в условиях теоремы 4 функции x_k , $1 \leq k \leq m$, можно выбрать такими, чтобы они допускали расширение на $\mathbb{C}$ до функций экспоненциального (сколь угодно малого) типа, причем $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x'_k(t)\| = 0$.

Аналоги теорем 3, 4 имеют место и для ограниченных вырожденных полугрупп операторов (см. [4], [22], [23]).

2. Банаховы модули над алгеброй $L^1(G)$ и свойства спектра Бёрлинга. Здесь приводится ряд используемых при доказательстве основных теорем статьи понятий и результатов из спектральной теории банаховых модулей (см. [1]–[14]), над банаховой алгеброй $L^1(G)$ измеримых суммируемых на локально компактной абелевой группе G функций. Умножение в алгебре $L^1(G)$ осуществляется с помощью операции свертки

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(g-s)f_2(s) ds, \quad g \in G, \quad f_1, f_2 \in L^1(G),$$

и полагается $\|f\|_1 = \int_G f(g) dg$ для $f \in L^1(G)$.

Пусть $T: G \rightarrow \text{End } \mathcal{Y}$ – сильно непрерывное изометрическое представление группы G операторами из банаховой алгебры $\text{End } \mathcal{Y}$, где $\mathcal{Y}$ – комплексное банахово пространство. Тогда формулой

$$fx = \int_G f(g)T(-g)x \, dg, \quad f \in L^1(G), \quad x \in \mathcal{Y}, \quad (9)$$

задается на $\mathcal{Y}$ структура банахова $L^1(G)$ -модуля. Учитывая формулу (9), далее модуль $\mathcal{Y}$ будет иногда обозначаться через $(\mathcal{Y}, T)$.

Пусть $\widehat{G}$ – двойственная группа непрерывных унитарных характеров группы G . Далее через $\widehat{f}: \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье функции $f \in L^1(G)$:

$$\widehat{f}(\gamma) = \int_G f(g)\gamma(-g) \, dg, \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Если $G = \mathbb{Z}$, то $\widehat{G}$ канонически отождествляется с $\mathbb{T}$ и преобразование Фурье последовательности (функции) $f \in L^1(\mathbb{Z}) = \ell^1(\mathbb{Z})$ имеет вид

$$\widehat{f}(\gamma) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\gamma^{-n}, \quad \gamma \in \mathbb{T}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Спектром Бёрлинга вектора x из банахова $L^1(G)$ -модуля $(\mathcal{Y}, T)$ называется множество $\Lambda(x) = \Lambda(x, T)$ характеров из группы $\widehat{G}$, являющееся дополнением к множеству*

$$\{\gamma \in \widehat{G} : \text{существует } f \in L^1(G) \text{ такая, что } \widehat{f}(\gamma) \neq 0 \text{ и } fx = 0\},$$

или, что эквивалентно,

$$\Lambda(x) = \{\gamma \in \widehat{G} : fx \neq 0 \text{ для любой } f \in L^1(G) \text{ с } \widehat{f}(\gamma) \neq 0\}.$$

Имеют место следующие свойства спектра векторов из банахова $L^1(G)$ -модуля $(\mathcal{Y}, T)$ (см. [2]–[4], [6], [13]).

ЛЕММА 1. *Для любых $f \in L^1(G)$ и $x \in (\mathcal{Y}, T)$ справедливы следующие свойства:*

- 1) $\Lambda(x)$ – замкнутое подмножество из $\widehat{G}$, причем $\Lambda(x) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
- 2) $\Lambda(fx) \subset (\text{supp } \widehat{f}) \cap \Lambda(x)$;
- 3) $\Lambda(Bx) \subset \Lambda(x)$ для любого оператора $B \in \text{End } \mathcal{Y}$, перестановочного с операторами $T(g)$, $g \in G$;
- 4) $fx = 0$, если $(\text{supp } \widehat{f}) \cap \Lambda(x) = \emptyset$ и $fx = x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\widehat{f} = 1$ в некоторой его окрестности;
- 5) $\Lambda(x) = \{\gamma_0\}$ – одноточечное множество из $\widehat{G}$ тогда и только тогда, когда вектор x удовлетворяет равенствам $T(g)x = \gamma_0(g)x$, $g \in G$, и $x \neq 0$ (является собственным вектором представления T , отвечающим характеру γ_0).

В последующем определении почти периодических векторов и их свойствах мы следуем [4; § 3.6] и [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Вектор x из банахова $L^1(G)$ -модуля $(\mathcal{Y}, T)$ называется *почти периодическим вектором*, если его орбита $\{T(g)x, g \in G\}$ предкомпактна в $\mathcal{Y}$.

Множество $AP\mathcal{Y} = AP(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ почти периодических векторов из $\mathcal{Y}$ образует замкнутый подмодуль из $\mathcal{Y}$.

ЛЕММА 2. Среди линейных операторов, действующих в подмодуле $AP(\mathcal{Y}, T)$, существует и единственен оператор среднего значения $\mathcal{J}: AP(\mathcal{Y}, T) \rightarrow AP(\mathcal{Y}, T)$, обладающий следующими свойствами:

- 1) $\mathcal{J}$ – проектор и $\|\mathcal{J}\| = 1$, если $\mathcal{J} \neq 0$;
- 2) $\mathcal{J}(fx) = \widehat{f}(0)\mathcal{J}x$, $T(g)\mathcal{J}x = \mathcal{J}(T(g)x) = \mathcal{J}x$ для всех $f \in L^1(G)$, $g \in G$ и $x \in \mathcal{Y}$;
- 4) $\mathcal{J}x$ лежит в замыкании выпуклой оболочки орбиты вектора x .

Вектор $\mathcal{J}x$ назовем *средним значением* вектора $x \in AP(\mathcal{Y}, T)$. Каждому почти периодическому вектору x поставим в соответствие формальный ряд

$$x \sim \sum_{\gamma \in \widehat{G}} \widehat{x}(\gamma). \quad (10)$$

Ряд (10) называется *рядом Фурье* вектора x . Функция $\widehat{x}: \widehat{G} \rightarrow AP(\mathcal{Y}, T)$ определяется по формуле

$$\widehat{x}(\gamma) = \mathcal{T}_\gamma x, \quad \gamma \in \widehat{G}, \quad (11)$$

где $\mathcal{T}_\gamma x$ – среднее значение вектора x из $L^1(G)$ -модуля $(\mathcal{X}, \mathcal{T}_\gamma)$, $\mathcal{T}_\gamma(g) = T(g)\gamma(-g)$. Ясно, что $x \in AP(\mathcal{Y}, \mathcal{T}_\gamma)$, $\gamma \in \widehat{G}$. Отметим, что $T(g)\widehat{x}(\gamma) = \gamma(g)\widehat{x}(\gamma)$, $g \in G$, $\gamma \in \widehat{G}$.

Множество

$$\sigma_B(x) = \sigma_B(x, T) = \{\gamma \in \widehat{G} : \widehat{x}(\gamma) \neq 0\}$$

не более чем счетно и называется *спектром Бора* вектора x . Отметим единственность ряда Фурье для любого вектора $x \in \mathcal{Y}$. Поскольку каждый вектор fx , где $f \in L^1(G)$ и $x \in \mathcal{X}$, имеет ряд Фурье вида

$$fx \sim \sum_{\gamma \in \sigma_B(x)} \widehat{f}(\gamma)\widehat{x}(\gamma), \quad (12)$$

то $\Lambda(x) = \overline{\sigma_B(x)}$.

3. Почти периодические на бесконечности функции. Пусть $\mathcal{Y} = C_{b,u}(G, E)$ – банахово пространство равномерно непрерывных и ограниченных на группе G функций со значениями в банаховом пространстве E и нормой $\|x\|_\infty = \sup_{g \in G} \|x(g)\|$, $x \in \mathcal{Y}$. В этом пространстве действует и сильно непрерывна группа сдвигов функций

$$S: G \rightarrow \text{End } \mathcal{Y}, \quad (S(g)x)(s) = x(s+g), \quad s, \quad g \in G, \quad x \in \mathcal{Y}.$$

Ряд Фурье почти периодической функции $x \in AP(\mathcal{Y}, S)$ записывается в виде

$$x(g) \sim \sum_{n \geq 1} a_n \gamma_n(g),$$

где $a_k \in E$, $n \geq 1$, $\sigma_B(x) = \{\gamma_n, n \geq 1\} \subset \widehat{G}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функция $x \in C_{b,u}(G, E) = \mathcal{Y}$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если для любого $g \in G$ функция $S(g)x - x$ принадлежит подпространству $C_0(G, E)$ функций из $C_{b,u}(G, E)$, убывающих на бесконечности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+, E)$, где $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если $S(t)x - x \in C_0(\mathbb{R}_+, E)$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Пусть $Z = C_{b,u}(G, E)/C_0(G, E)$. В Z действует сильно непрерывная группа изометрий

$$T(g)\tilde{x} = \widetilde{S(g)x} = S(g)x + C_0(G, E), \quad g \in G.$$

Следовательно, факторпространство Z наделяется структурой банахова $L^1(G)$ -модуля по представлению $T: G \rightarrow \text{End}(C_{b,u}/C_0)$ (см. формулу (9)).

Пусть $\mathcal{Y}_0 = \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, E)/c_0(\mathbb{Z}_+, E)$. Каждую последовательность $x \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, E)$ продолжим до двусторонней последовательности $y \in \ell^\infty(\mathbb{Z}, E)$, положив $y(n) = 0$ для $n < 0$. Отображение $\tilde{x} \mapsto \tilde{y}: \mathcal{Y}_0 \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z}, E)/c_0(\mathbb{Z}, E) = \mathcal{Y}_1$ является изометрическим вложением, причем $\mathcal{Y}_0$ является подмодулем из банахова $\ell^1(\mathbb{Z}) = L^1(\mathbb{Z})$ -модуля $\mathcal{Y}_1$. При этом группа операторов $T(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, корректно определена и на $\mathcal{Y}_0$.

Таким же образом (это было сделано в [12]) структурой банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля наделяется факторпространство $C_{b,u}(\mathbb{R}_+, E)/C_0(\mathbb{R}_+, E)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Функция $x \in C_{b,u}(G, E)$ называется *почти периодической на бесконечности* (на ∞), если класс $\tilde{x}$ принадлежит $AP(\mathcal{Y}, T)$, где $\mathcal{Y} = C_{b,u}(G, E)/C_0(G, E)$. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+, E)$ (последовательность $x \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, E)$) называется *почти периодической на бесконечности*, если класс $\tilde{x}$ принадлежит $AP(\mathcal{Y}, T)$, где $\mathcal{Y} = C_{b,u}(\mathbb{R}_+, E)/C_0(\mathbb{R}_+, E)$ (соответственно $\mathcal{Y} = \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, E)/c_0(\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, E))$).

Множество функций из $C_{b,u}(G, E)$ (из пространств $C_{b,u}(\mathbb{R}_+, E)$, $\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, E)$) и почти периодических на бесконечности обозначим символом $AP_\infty(G, E)$ (соответственно $AP_\infty(\mathbb{R}_+, E)$, $AP_\infty(\mathbb{Z}_+, E)$). Они образуют замкнутые подпространства из соответствующих пространств.

Далее символом $\mathcal{Y}$ обозначается одно из следующих факторпространств:

$$C_{b,u}(G, E)/C_0(G, E), \quad C_{b,u}(\mathbb{R}_+, E)/C_0(\mathbb{R}_+, E), \quad \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, E)/c_0(\mathbb{Z}_+, E)$$

и через $AP_\infty\mathcal{Y}$ – соответствующее пространство почти периодических на бесконечности функций: $AP_\infty(G, E)$, $AP_\infty(\mathbb{R}_+, E)$, $AP_\infty(\mathbb{Z}_+, E)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $x \in AP_\infty\mathcal{Y}$ и

$$\tilde{x} \sim \sum_{n \geq 1} y_n, \sigma_B(\tilde{x}) = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}, \quad \Lambda(y_k) = \{\gamma_n\},$$

– ряд Фурье класса $\tilde{x}$ (из соответствующего факторпространства почти периодических векторов). Ряд

$$x \sim \sum_{n \geq 1} x_n, \tag{13}$$

где x_n – некоторый представитель класса y_n , называется *рядом Фурье* функции x .

Отметим неединственность ряда Фурье (13) любой функции $x \in AP_\infty\mathcal{Y}$.

Определение почти периодической на бесконечности функции было дано в [12] для функций из $C_b(\mathbb{R}_+, E)$ и использовалось для описания асимптотического поведения ограниченных полугрупп операторов класса C_0 . Следуя Г. Бору можно дать другое (эквивалентное) определение почти периодической на бесконечности функции, используя понятие ε -периода (на бесконечности). Элемент g_0 из группы G

называется ε -периодом ($\varepsilon > 0$) на бесконечности функции $x \in C_{b,u}(G, E)$, если существует компакт $K = K_\varepsilon \subset G$ такой, что $\sup_{g \in G \setminus K} \|x(g + g_0) - x(g)\| < \varepsilon$. Множество ε -периодов на бесконечности функции x обозначим символом $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$. Функцию $x \in C_{b,u}(G, E)$ назовем *почти периодической на бесконечности*, если множество $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$ относительно плотно в G , т.е. существует компактная окрестность $V = V_\varepsilon$ нуля группы G такая, что $(g + V_\varepsilon) \cap \Omega_\infty(\varepsilon, x) \neq \emptyset$ для любого $g \in G$.

Аналогичное определение дается и для функций, определенных на локально компактной полугруппе (в частности, на $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{Z}_+$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $\gamma_0 \in \widehat{G}$. Ограниченная направленность функций (f_α) из алгебры $L^1(G)$ (α пробегает некоторое направленное множество Ω) называется γ_0 -направленностью, если выполнены следующие условия:

- 1) $\widehat{f_\alpha}(\gamma_0) = 1$ для любого $\alpha \in \Omega$;
- 2) $\lim f_\alpha * f = 0$ для любой $f \in L^1(G)$ с $\widehat{f}(\gamma_0) = 0$.

Примерами γ_0 -направленностей в алгебре $\ell^1(\mathbb{Z})$ являются направленности $g_\alpha(n) = f_\alpha(n)\gamma_0^n$, $\psi_k(n) = \varphi_k(n)\gamma_0^n$, где 1-направленности (f_α) и (φ_k) определены формулами

$$\begin{aligned} f_\alpha(n) &= \begin{cases} \alpha(1 + \alpha)^{-n}, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad \alpha \in \Omega_1 = (0, \infty), \\ \varphi_k(n) &= \begin{cases} k^{-1}, & 0 \leq n \leq k - 1, \\ 0, & n \geq k, \end{cases} \quad k \in \Omega_2 = \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом множество Ω_1 направлено по убыванию чисел, а Ω_2 – по возрастанию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Характер γ_0 из спектра Бёрлинга вектора x_0 из банахова $L^1(G)$ -модуля $(\mathcal{Y}, T)$ называется *эргодической точкой спектра вектора x_0* , если для некоторой γ_0 -направленности f_α из алгебры $L^1(G)$ существует $\lim f_\alpha x_0$.

Отметим, что из эргодических теорем (см. [4], [8], [9], [24]) следует, что если γ_0 – эргодическая точка из $\Lambda(x_0)$, то предел в определении 8 не зависит от выбора γ_0 -направленности (f_α) . Множество эргодических точек вектора x_0 обозначим символом $\Lambda_{\text{erg}}(x_0)$. Отметим еще, что если $x \in AP(\mathcal{Y}, T)$ (x – почти периодический вектор), то $\Lambda_{\text{erg}}(x) = \Lambda(x)$ и $\widehat{x}(\gamma) = \lim f_\alpha x \neq 0$ для любого $\gamma \in \sigma_B(x)$ (см. (9), (10) и (11)) и любой γ -направленности (f_α) из алгебры $L^1(G)$.

Если $\mathcal{Y}_0$ – замкнутый подмодуль из $L^1(G)$ -модуля $(\mathcal{Y}, T)$, инвариантный относительно всех операторов $T(g)$, $g \in G$, то факторпространство $\mathcal{Y}/\mathcal{Y}_0$ также наделяется структурой банахова $L^1(G)$ -модуля по фактор-представлению

$$\widehat{T}: G \rightarrow \text{End } \mathcal{Y}/\mathcal{Y}_0, \quad \widehat{T}(g)\widetilde{x} = \widetilde{T(g)x} = T(g)x + \mathcal{Y}_0,$$

т.е. $f\widetilde{x} = \widetilde{fx} = fx + \mathcal{Y}_0$ для любого $x \in \mathcal{Y}$ и любой $f \in L^1(G)$. Спектр Бёрлинга $\Lambda(\widetilde{x}) = \Lambda(\widetilde{x}) = \Lambda(\widetilde{x}, \widehat{T})$ класса (эквивалентности) $\widetilde{x} = x + \mathcal{Y}_0$, содержащего вектор x , обозначим символом $\Lambda(x, \mathcal{Y}_0)$ и назовем *множеством непринадлежности* вектора x подмодулю $\mathcal{Y}_0$. В частности, если $\mathcal{Y}_0 = AP(\mathcal{Y}, T)$ – подмодуль почти периодических векторов, то множество $\Lambda(x, \mathcal{Y}_0)$ назовем *множеством не почти периодичности* вектора $x \in \mathcal{Y}$. Приводимые понятия использовались в статьях [10], [6], [8], [4]. Здесь существенно используется (см. [6], [8])

ТЕОРЕМА 5. Пусть для вектора x из $L^1(G)$ -модуля $(\mathcal{Y}, T)$ множество не почти периодичности $\Lambda(x, AP\mathcal{Y})$ не более чем счетно. Для его почти периодичности необходимо и достаточно, чтобы любая предельная точка множества $\Lambda(x, AP\mathcal{Y})$ была эргодической для вектора x . В частности, если множество $\Lambda(x, AP\mathcal{Y})$ не имеет предельных точек, то $x \in AP(\mathcal{Y}, T)$.

В следующей лемме символ $\mathcal{Y}$ используется для обозначения одного из пространств $\ell^\infty(\mathbb{J}, E)$, $C_{b,u}(\mathbb{R}_+, E)$, $C_{b,u}(G, E)$, $\mathbb{J} \in \{\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}\}$.

ЛЕММА 3. Функция $x \in \mathcal{Y}$ является медленно меняющейся на ∞ тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих эквивалентных условий:

- 1) $\Lambda(\tilde{x}) \subset \{0\}$;
- 2) $f\tilde{x} = \hat{f}(0)\tilde{x}$ для любой функции $f \in L^1(G)$,

где $\tilde{x}$ – класс из $L^1(G)$ -модуля $\mathcal{Y}/\mathcal{Y}_0$, $\mathcal{Y}_0$ – подмодуль из $\mathcal{Y}$ убывающих на бесконечности функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x – медленно меняющаяся на бесконечности функция из $\mathcal{Y}$. Если $\mathcal{Y} = \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, E)$, то ввиду описанного выше вложения фактор-пространства $\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, E)/c_0(\mathbb{Z}_+, E)$ в $\ell^\infty(\mathbb{Z}, E)/c_0(\mathbb{Z}, E)$ без ограничения общности можно считать, что $x \in \ell^\infty(\mathbb{Z}, E)$. Аналогичное замечание можно сделать в случае, если $\mathcal{Y} = C_{b,u}(\mathbb{R}_+, E)$. Таким образом, ограничимся рассмотрением пространства $\mathcal{Y} = C_{b,u}(G, E)$.

Поскольку $S(\tau)x - x \in C_0(G, E)$, то для любой $f \in L^1(G)$ с $\hat{f}(0) = 1$ функция $f * x - x = \int_G f(g)(S(-g)x - x) dg$ принадлежит $C_0(G, E)$, и поэтому $\Lambda(\tilde{x}) \subset \{0\}$. Из свойства 5) леммы 1 и формулы (11) получаем, что $f\tilde{x} = \hat{f}(0)\tilde{x}$.

Пусть теперь выполнено одно из эквивалентных свойств 1), 2). Тогда в силу свойства 5) леммы 1 получаем, что $\tilde{S}(g)\tilde{x} = \tilde{x}$, т.е. $S(g)x - x \in C_0(G, E)$ для любого $g \in G$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $x \in \mathcal{Y} \in \{C_{b,u}(G, E), \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, E), C_{b,u}(\mathbb{R}_+, E)\}$. Следующие свойства эквивалентны:

- 1) $\Lambda(\tilde{x}) = \{\gamma_0\}$ – одноточечное множество из $\hat{G}$ (если $\mathcal{Y} = \ell^\infty$, то $\hat{G} = \mathbb{T}$, и если $\mathcal{Y} = C_{b,u}(\mathbb{R}_+, E)$, то $\hat{G} = \mathbb{R}$);
- 2) функция $y = \gamma_0^{-1}x$ является медленно меняющейся на бесконечности;
- 3) $f\tilde{x} = \hat{f}(\gamma_0)\tilde{x}$ для любой функции f из алгебры $L^1(G)$.

Далее символом $\Lambda_\infty(x)$, где $x \in \mathcal{Y}$, обозначается спектр Бёрлинга $\Lambda(\tilde{x})$ класса $\tilde{x} = x + \mathcal{Y}_0$.

Из леммы 3, ее следствия 6 следует, что каждая функция x_n из ряда Фурье (13) представима в виде

$$x_n = x_n^0 \gamma_n, \quad n \geq 1, \quad (15)$$

где x_n^0 – медленно меняющаяся на бесконечности функция из $\mathcal{Y}$.

Следовательно, имеет место (используется [4; теорема 3.67])

ТЕОРЕМА 6. Для того, чтобы функция x , принадлежащая банахову пространству Z , совпадающему с одним из следующих пространств: $C_{b,u}(G, E)$, $C_{b,u}(\mathbb{R}_+, E)$, $\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, E)$, была почти периодической на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали функции $x_1, \dots, x_n$ из соответствующего

пространства, представимые в виде $x_k = x_k^0 \gamma_k$, где γ_k – характер из соответствующей группы и x_k^0 – медленно меняющаяся на бесконечности функция такие, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n x_k \right\|_Z < \varepsilon.$$

При этом характеры γ_k , $1 \leq k \leq t$, могут быть взяты из множества $\Lambda_\infty(x)$.

В следующей теореме символ $\mathcal{Y}$ используется для обозначения одного из пространств $C_{b,u}(G, E)$, $C_{b,u}(\mathbb{R}_+, E)$, $\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, E)$. Через $\mathcal{Y}_0$ обозначается подпространство функций из $\mathcal{Y}$, убывающих на бесконечности. Символом $AP\mathcal{Y}$ обозначим подпространство почти периодических функций из $\mathcal{Y}$. Для $\mathcal{Y} \in \{C_{b,u}(\mathbb{R}_+, E), \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, E)\}$ оно состоит из функций, допускающих (единственное) продолжение на $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$ до функций из $AP(\mathbb{R}, E)$ и $AP(\mathbb{Z}, E)$ соответственно. Таким образом, $AP\mathcal{Y}$ является замыканием в $\mathcal{Y}$ подпространства тригонометрических многочленов.

ТЕОРЕМА 7. Для того, чтобы функция $x \in AP_\infty(\mathcal{Y})$ была представима в виде $x = y + x_0$, где $x_0 \in \mathcal{Y}_0$ и $y \in AP\mathcal{Y}$, необходимо и достаточно, чтобы каждая точка из $\Lambda_\infty(x) = \Lambda(\tilde{x}) = \Lambda(x + \mathcal{Y}_0)$ была эргодической точкой функции x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку каждая точка из $\Lambda_\infty(x)$ для x является эргодической для y и x_0 из представления x , то необходимость условия теоремы очевидна. Достаточность условий следует из определения эргодической точки, теорем 5, 6. При этом используется свойство 4) из леммы 2.

4. Доказательство основных результатов. При доказательстве основных результатов статьи существенно используется следующая лемма, в которой рассматривается разностное уравнение

$$x(n+1) = Bx(n) + y_0(n), \quad n \in \mathbb{J}, \quad (16)$$

в банаховом пространстве $\ell^\infty(\mathbb{J}, E)$, где $\mathbb{J} \in \{\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}\}$ и $y_0 \in \ell^\infty(\mathbb{J}, E)$.

ЛЕММА 4. Пусть $y_0 \in AP_\infty(\mathbb{J}, E)$ и $x_0: \mathbb{J} \rightarrow E$ – ограниченное решение уравнения (16). Тогда

$$\Lambda(x_0, AP_\infty(\mathbb{J}, E)) \subset \sigma(B) \cap \mathbb{T}. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим факторпространство $\mathcal{Y} = \ell^\infty(\mathbb{J}, E)/AP_\infty(\mathbb{J}, E)$. Вначале предположим, что $\mathbb{J} = \mathbb{Z}$. Поскольку $S(1)x_0 - Bx_0 = y_0$, то

$$\tilde{S}(1)\tilde{x}_0 - B\tilde{x}_0 = \tilde{y}_0 = y_0 + AP_\infty(\mathbb{J}, E) = \tilde{0}, \quad (18)$$

где $\tilde{S}(1)\tilde{x} = \widetilde{S(1)x}$, $x \in \ell^\infty$, $x = \widetilde{x + AP_\infty(\mathbb{J}, E)}$ – фактороператор, построенный по оператору сдвига $S(1)$. Докажем включение (17), т.е. включение $\Lambda(\tilde{x}_0) \subset \sigma(B) \cap \mathbb{T}$. Пусть $\gamma_0 \in \mathbb{T} \setminus \sigma(B)$. Рассмотрим последовательность $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$ такую, что $\widehat{\widetilde{f(\gamma_0)}} \neq 0$ и $\widehat{f} = 0$ в некоторой окрестности множества $\mathbb{T} \cap \sigma(B)$. Покажем, что $f\tilde{x}_0 = \widetilde{f * x_0} = 0$. Из (18) получаем

$$f(\tilde{S}(1)\tilde{x}_0 - B\tilde{x}_0) = \widetilde{f_1 * x_0} - \widetilde{B(f * x_0)} = \tilde{0},$$

где $f_1 = S(1)f \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Следовательно,

$$(f_1 - Bf) * x_0 \in AP_\infty(\mathbb{Z}, E).$$

Рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию $\widehat{\varphi}: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ такую, что выполнено $\widehat{\varphi}(\gamma_0) \neq 0$ и $(\text{supp } \widehat{\varphi}) \cap \sigma(B) = \emptyset$. Функция $\widehat{\varphi}$ является преобразованием Фурье некоторой последовательности $\varphi \in \ell^1(\mathbb{Z})$, а функция

$$\widehat{F}(\gamma) = \begin{cases} \widehat{\varphi}(\gamma)(\gamma I - B)^{-1}, & \gamma \notin \sigma(B), \\ 0, & \gamma \in \text{supp } \widehat{\varphi}, \gamma \in \mathbb{T}, \end{cases}$$

является преобразованием Фурье некоторой последовательности $F \in \ell^1(\mathbb{Z}, \text{End } E)$.

Из равенств

$$\widehat{F * (f_1 - Bf)}(\gamma) = \widehat{F}(\gamma)(\gamma \widehat{f}(\gamma)I - B\widehat{f}(\gamma)) = \widehat{\varphi}(\gamma)\widehat{f}(\gamma)I, \quad \gamma \in \mathbb{T},$$

следует, что $F * (f_1 - Bf) * x_0 = (\varphi * f) * x_0 \in AP_\infty(\mathbb{Z}, E)$.

Поскольку $\widehat{\varphi * f}(\gamma_0) = \widehat{\varphi}(\gamma_0)\widehat{f}(\gamma_0) \neq 0$, то $\gamma_0 \notin \Lambda(x_0, AP_\infty(\mathbb{Z}, E))$. Таким образом, установлено включение (17) в случае, если $\mathbb{J} = \mathbb{Z}$.

Если $\mathbb{J} = \mathbb{Z}_+$, то рассмотрим последовательность $x_1: \mathbb{Z} \rightarrow E$, совпадающую с x_0 на $\mathbb{Z}_+$ и $x_1(k) = 0$ для $k < 0$. Такая последовательность удовлетворяет уравнению

$$x(n+1) = Bx(n) + z_0(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (19)$$

рассматриваемому в $\ell^\infty(\mathbb{Z}, E)$. В нем последовательность $z_0 \in \ell^\infty(\mathbb{Z}, E)$ совпадает с y_0 для $n \geq 0$, $z_0(-1) = x_0(0)$ и $z_0(n) = 0$ для $n \leq -2$. Непосредственно из определения 5 почти периодической на бесконечности последовательности из $\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, E)$ следует, что $\Lambda(z_0, AP_\infty(\mathbb{Z}, E)) = \Lambda(y_0, AP_\infty(\mathbb{Z}_+, E))$ и такое же равенство верно для последовательностей x_0 и x_1 . Следовательно, по доказанному включение (17) установлено и для случая $\mathbb{J} = \mathbb{Z}_+$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $y_0 \in c_0(\mathbb{J}, E)$, $x_0: \mathbb{J} \rightarrow E$ — ограниченное решение уравнения (16). Тогда имеет место включение

$$\Lambda(\widetilde{x}_0) = \Lambda(x_0, c_0(\mathbb{J}, E)) \subset \sigma(B) \cap \mathbb{T} \quad (20)$$

для класса эквивалентности $\widetilde{x}_0 = x_0 + c_0(\mathbb{J}, E)$ из $\ell^\infty(\mathbb{J}, E)/c_0(\mathbb{J}, E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале рассматривается случай $\mathbb{J} = \mathbb{Z}$ и точно так же, как и при доказательстве леммы 4, устанавливается включение (20). В данном случае рассматривается $\ell^1(\mathbb{Z})$ -модуль $\ell^1(\mathbb{Z}, E)/c_0(\mathbb{Z}, E)$. При рассмотрении случая $\mathbb{J} = \mathbb{Z}_+$ последовательность x_0 доопределяем (как и в лемме 4) до последовательности $x_1 \in \ell^1(\mathbb{Z}, E)$, полагая $x_1(n) = 0$ для $n < 0$. Тогда x_1 есть решение уравнения (19) с $z_0 \in \ell^1(\mathbb{Z}, E)$, определенной в лемме 4. Благодаря равенствам

$$\Lambda(x_0, c_0(\mathbb{Z}_+, E)) = \Lambda(x_1, c_0(\mathbb{Z}, E)), \quad \Lambda(y_0, c_0(\mathbb{Z}_+, E)) = \Lambda(z_0, c_0(\mathbb{Z}_+, E)),$$

случай $\mathbb{J} = \mathbb{Z}_+$ свелся к рассмотренному, когда $\mathbb{J} = \mathbb{Z}$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В банаховом пространстве $\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, \mathcal{A}_T)$ рассмотрим однородное уравнение

$$X(n+1) = TX(n), \quad n \geq 0. \quad (21)$$

Решением этого уравнения является ограниченная последовательность

$$X_0(n) = T^n, \quad n \geq 0,$$

принадлежащая пространству $\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, \mathcal{A}_T)$. Согласно лемме 5 множество $\Lambda(X_0, c_0(\mathbb{Z}_+, \mathcal{A}_T))$ конечно и оно содержится в множестве $\sigma(T) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ (см. условие (2)). Поскольку оно не содержит предельных точек, то из теоремы 5 следует почти периодичность на бесконечности последовательности X_0 , причем $\Lambda(\tilde{X}_0) = \Lambda(X_0 + c_0(\mathbb{Z}_+, \mathcal{A}_T))$ содержится в множестве $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$. Поэтому X_0 принадлежит подпространству $AP_\infty(\mathbb{Z}_+, \mathcal{A}_T)$. Рассмотрим ряд Фурье

$$\tilde{X}_0 = \sum_{k=1}^m \tilde{B}_k \quad (22)$$

класса $\tilde{X}_0 \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, \mathcal{A}_T)/c_0(\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, \mathcal{A}_T))$, где $B_k \in (\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, \mathcal{A}_T))$, $1 \leq k \leq m$. Классы $\tilde{B}_k$, $1 \leq k \leq m$, согласно приводимым из пп. 2, 3 результатам о почти периодических векторах обладают следующим свойством (см. равенства (15), следствие 6 и лемму 1):

$$\widetilde{TB_k} = \widetilde{S(1)B_k} = \gamma_k \tilde{B}_k, \quad 1 \leq k \leq m. \quad (23)$$

При этом использовались равенства

$$\widetilde{TX_0} = \widetilde{S(1)X_0} = \tilde{S}(1)\tilde{X}_0.$$

Рассмотрим последовательность $A_k(n) = \gamma_k^{-n} B_k(n)$, $n \geq 0$, из коммутативной банаховой $\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, \mathcal{A}_T)$ (с поточечным умножением). Поскольку $\Lambda(\tilde{A}_k) \subset \{1\}$, то из следствия 6 получаем, что $A_k \in \ell_{sl,\infty}^\infty(\mathbb{Z}_+, \mathcal{A}_T)$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_k(n+1) - A_n(n)\| = 0, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Из равенств (23) следует, что $TA_k - \gamma_k A_k \in c_0(\mathbb{Z}_+, \mathcal{A}_T)$, $1 \leq k \leq m$. Таким образом, установлено свойство 3) из теоремы 1.

Из (12) следует, что имеет место равенство

$$f\tilde{X}_0 = \sum_{k=1}^m \widehat{f}(\gamma_k) \tilde{B}_k \quad (24)$$

для любой $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Из равенства (24) получаем, что можно положить

$$B_k(n) = T^n \widehat{f}_k(T), \quad A_k(n) = \gamma_k^{-n} T^n \widehat{f}_k(T), \quad n \geq 0, \quad (25)$$

где $\widehat{f}_k: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$, $1 \leq k \leq m$, — многочлены, определенные равенствами

$$\widehat{f}_k(\gamma) = p_k(\gamma) \rho_k(\gamma_k)^{-1}, \quad p_k(\gamma) = \prod_{j=1, j \neq k}^m (\gamma - \gamma_j), \quad \gamma \in \mathbb{T}.$$

Эти многочлены являются преобразованиями Фурье некоторых последовательностей f_k , $1 \leq k \leq m$, из алгебры $\ell^1(\mathbb{Z})$. Таким образом, из (24) следует, что верны равенства

$$\tilde{B}_k = f_k \tilde{X}_0, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Пусть $k \neq j$, $1 \leq k, j \leq m$. Тогда

$$A_k(n)A_j(n) = \gamma_k^{-n} \gamma_j^{-n} T^{2n} \hat{f}_k(T) \hat{f}_j(T), \quad n \geq 0.$$

Класс эквивалентности, содержащий последовательность $T^n \hat{f}_k(T) \hat{f}_j(T)$, $n \geq 0$, совпадает с классом $f_{kj} \tilde{X}_0$, где $f_{kj} = f_k * f_j$. Поскольку функции $\hat{f}_{kj} = \widehat{f_k * f_j}$, $k \neq j$, обращаются в нуль на множестве $\Delta = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ при $k \neq j$, то $f_{kj} \tilde{X}_0 = \tilde{0}$ в силу равенства (24). Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n \hat{f}_k(T) \hat{f}_j(T)\| = 0$, и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_k(n)A_j(n)\| = 0 \quad \text{для } k \neq j,$$

т.е. имеет место свойство 4) из доказываемой теоремы 1.

Из (25) следует, что

$$B(n) = \sum_{k=1}^m B_k(n) = \sum_{k=1}^m \gamma_k A_k(n) = T^n \left(\sum_{k=1}^m \hat{f}_k(T) \right) = T^n \hat{f}(T), \quad n \geq 0,$$

где $f = \sum_{k=1}^m f_k$, и поэтому $\hat{f}(\gamma_k) = 1$, $1 \leq k \leq m$. Из (24) получаем, что $\tilde{X}_0 = \tilde{B}$, т.е. $A_0 = X_0 - B \in C_0(\mathbb{Z}_+, A_T)$. Для завершения доказательства представления (3) рассмотрим последовательность операторов

$$A_1^1(n) = A_1(n) + \gamma_1^{-n} A_0(n) = \gamma_1^{-n} (T^n \hat{f}_1(T) + A_0(n)), \quad n \geq 0.$$

Замена последовательности A_1 последовательностью A_1^1 с последующим использованием ее обозначения символом A_1 приводит к равенству $X_0 = B$, т.е. получено представление (3). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть γ_0 – предельная точка множества $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$. Рассмотрим γ_0 -направленность

$$g_\varepsilon(n) = f_\varepsilon(n) \gamma_0^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \varepsilon \in \Omega_1 = (0, \infty),$$

где 1-направленность (f_ε) определена равенствами (14). В факторпространстве $\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, \mathcal{X})/c_0(\mathbb{Z}_+, \mathcal{X})$ существует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \widetilde{g_\varepsilon X_0 x} = \widetilde{X_0 x_0},$$

где $x_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} R(\varepsilon + \gamma_0, T)x$. Поэтому из теоремы 5 получаем $X_0 x \in AP_\infty(\mathbb{Z}_+, \mathcal{X})$. Теорема доказана.

Отметим, что утверждение следствия 2 вытекает из доказанной теоремы и теоремы 7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 4. Ввиду конечномерности пространства $\mathcal{X}/\mathcal{X}_0$ легко видеть, что $\sigma(\hat{T}) \subset \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\} \subset \mathbb{T}$. Из-за ограниченности степеней оператора T ограниченные степени будут иметь и фактороператор $\hat{T}$. Следовательно, он имеет простую структуру, и пусть

$$\hat{T} = \sum_{k=1}^m \gamma_k P_k, \quad \hat{T}P_k = \gamma_k P_k, \quad 1 \leq k \leq m,$$

– его спектральное разложение. Рассмотрим соответствующее разложение $\mathcal{X}/\mathcal{X}_0 = \tilde{\mathcal{X}}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{\mathcal{X}}_m$ факторпространства $\mathcal{X}/\mathcal{X}_0$, где $\tilde{X}_k = \text{Im } P_k$ – образ проектора $P_k \in \text{End}(\mathcal{X}/\mathcal{X}_0)$ и $\mathcal{X}_k = \{x \in \mathcal{X} : \tilde{x} = x + \mathcal{X}_0 \in \text{Im } P_k\}$. Следовательно, $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + \dots + \mathcal{X}_m$. Пусть $x \in \mathcal{X}$ и $x = y_1 + \dots + y_m$, где $y_k \in \mathcal{X}_k$, $1 \leq k \leq m$. Поскольку $\hat{T}\tilde{y}_k = \gamma_k \tilde{y}_k$, $1 \leq k \leq m$, то $Ty_k - \gamma_k y_k = y_k^0 \in \mathcal{X}_0$. Рассмотрим последовательности

$$x_k(n) = \gamma_k^{-n} T^n y_k, \quad n \geq 0, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Тогда имеют место равенства (5), а из равенств

$$x_{k+1}(n) - x_k(n) = \gamma_k^{-n-1} T^{n+1} y_k - \gamma_k^{-n} T^n y_k = \gamma_k^{-n-1} T^n y_k^0, \quad n \geq 0,$$

следует, что $x_k \in \ell_{\text{sl}, \infty}^\infty(\mathbb{Z}_+, \mathcal{X})$, $1 \leq k \leq m$. Следствие доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 5. Рассмотрим последовательность

$$X_g \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, \mathcal{A}_T), \quad X_g(n) = T^n \hat{g}(T).$$

Класс $\tilde{X}_g \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, \mathcal{A}_T)/c_0(\mathbb{Z}_+, \mathcal{A}_T)$ совпадает с классом gX_0 , где $g \in \ell^1(\mathbb{Z})$, а ее преобразование Фурье совпадает с функцией $\hat{g}$. Если $\gamma_0 \in \mathbb{T}$ и $\hat{g}(\gamma_0) = 0$, то имеем $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} g_\alpha * g = 0$ для γ_0 -направленности $g_\alpha = f_\alpha \gamma_0$, $\alpha > 0$, где (f_α) определена равенствами (14). Следовательно, для класса $\tilde{X}_g$, спектр Бёрлинга которого содержится в множестве $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ (в силу леммы 4), применима теорема 2. Поэтому последовательность X_g является почти периодической на бесконечности. Следствие доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Поскольку рассматриваемая полугруппа операторов $\mathcal{U}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ ограничена, то оператор $T = \mathcal{U}(1)$ имеет ограниченные степени, т.е. последовательность $X_0(n) = T^n$, $n \geq 0$, ограничена. Поскольку полугруппа $\mathcal{U}$ непрерывна в равномерной операторной топологии, то для нее имеет место теорема об отображении спектра (см. [25; IV. 3.10]). Следовательно, имеет место равенство (2), где $\gamma_k = \exp i\lambda_k$, $1 \leq k \leq m$, и поэтому к оператору $T = \mathcal{U}(1)$ применима теорема 1. Используя операторы $\hat{f}_k(T)$, $1 \leq k \leq m$, $\hat{f}(T)$, из ее доказательства положим

$$\begin{aligned} B_k(t) &= e^{-i\lambda_k t} T(t) \hat{f}_k(T), & t \geq 0, & \quad 1 \leq k \leq m, \\ B_0(t) &= T(t) - T(t) \hat{f}(T), & t \geq 0. \end{aligned}$$

Тогда имеет место представление полугруппы операторов $\mathcal{U}$ в виде (7), причем функции $B_k: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{A}_U$, $0 \leq k \leq m$, будут обладать отмеченными в теореме 3 свойствами. Выбор функции B_k , $1 \leq k \leq m$, целыми функциями осуществляется следующим образом. Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим функцию $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ такую, $\hat{\varphi}(0) = 1$ и $\text{supp } \hat{\varphi} \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ и функции $C_k \in C_{b,u}(\mathbb{R}, \mathcal{A}_U)$, $1 \leq k \leq m$, со следующими свойствами:

- 1) $C_k(t) = B_k(t)$, $t \geq t_0$,
- 2) $C_k(t) = 0$, $t \leq -1$.

Эти функции являются медленно меняющимися на бесконечности, т.е. принадлежат пространству $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{A}_U)$. Функции $\varphi * C_k$, $1 \leq k \leq m$, допускают расширение на $\mathbb{C}$ до целых функций экспоненциально типа не выше ε , а из леммы 3 следует, что $\varphi * C_k - B_k \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathcal{A}_U)$, $1 \leq k \leq m$. Поэтому в полученном представлении (7) функции B_k , $1 \leq k \leq m$, могут быть заменены функциями $\varphi * C_k$, $1 \leq k \leq m$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Из конечномерности факторпространства $\mathcal{X}/\mathcal{X}_0(\mathcal{U})$ и из инвариантности подпространства $\mathcal{X}_0(\mathcal{U})$ относительно операторов $\mathcal{U}(t)$, $t \geq 0$, следует, что для оператора $T = \mathcal{U}(1)$ выполнены условия следствия 4. Обращаясь к его доказательству и используя введенные там обозначения, рассмотрим представление $x = y_1 + \dots + y_k$, где $y_k \in \mathcal{X}_k$, $1 \leq k \leq m$. Пусть $x_k(t) = e^{-i\lambda_k t} U(t)y_k$, $t \geq 0$. Отсюда получаем представление (8), где $x_0 \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*. Т. 2. Структура и анализ компактных групп. Анализ на локально компактных абелевых группах, Мир, М., 1975.
- [2] А. Г. Баскаков, *Гармонический анализ линейных операторов*, Изд-во Воронежск. гос. ун-та, Воронеж, 1987.
- [3] А. Г. Баскаков, “О спектральном синтезе в банаховых модулях над коммутативными банаховыми алгебрами”, *Матем. заметки*, **34**:4 (1983), 573–585.
- [4] А. Г. Баскаков, “Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов”, *Функциональный анализ, СМФН*, **9**, МАИ, М., 2004, 3–151.
- [5] А. Г. Баскаков, “Некоторые критерии почти периодичности ограниченных функций”, *Тр. НИИ матем. ВГУ*, **11**, Изд-во Воронежск. гос. ун-та, Воронеж, 1973, 10–16.
- [6] А. Г. Баскаков, “Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений”, *Матем. заметки*, **24**:2 (1978), 195–206.
- [7] А. Г. Баскаков, “Неравенства бернштейновского типа в абстрактном гармоническом анализе”, *Сиб. матем. журн.*, **20**:5 (1979), 942–952.
- [8] А. Г. Баскаков, “Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторных функций”, *Матем. сб.*, **124**:1 (1984), 68–95.
- [9] А. Г. Баскаков, “Об общих эргодических теоремах в банаховых модулях”, *Функци. анализ и его прил.*, **14**:3 (1980), 63–64.
- [10] А. Г. Баскаков, “О спектральном анализе представлений коммутативных банаховых алгебр”, *Тр. НИИ матем. ВГУ*, Изд-во Воронежск. гос. ун-та, Воронеж, 1974, 1–6.
- [11] А. Г. Баскаков, Н. С. Калужина, “Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений”, *Матем. заметки*, **92**:5 (2012), 643–661.
- [12] А. Г. Баскаков, “Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений”, *УМН*, **68**:1 (2013), 77–128.
- [13] А. Г. Баскаков, К. А. Синтяева, “О неравенствах Бора–Фавара для операторов”, *Изв. вузов. Матем.*, 2009, № 12, 14–21.
- [14] А. Г. Баскаков, Н. С. Калужина, Д. М. Поляков, “Медленно меняющиеся на бесконечности полугруппы операторов”, *Изв. вузов. Матем.*, 2014, № 7, 3–14.

- [15] Y. Katznelson, L. Tzafriri, “On power bounded operators”, *J. Funct. Anal.*, **68**:3 (1986), 313–328.
- [16] T. Eisner, *Stability of Operators and Operator Semigroups*, Oper. Theory Adv. Appl., **209**, Basel, Birkhäuser Verlag, 2010.
- [17] Yu. I. Lyubich, Vũ Quốc Phóng, “Asymptotic stability of linear differential equations in Banach spaces”, *Studia Math.*, **88**:1 (1988), 37–42.
- [18] W. Arendt, C. J. K. Batty, “Tauberian theorems and stability of one-parameter semi-groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **306**:2 (1988), 837–852.
- [19] Г. М. Складар, В. Я. Ширман, “Асимптотическая устойчивость линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве”, *Теория функций, функциональный анализ и приложения*, **37** (1982), 127–132.
- [20] E. Yu. Emel'yanov, *Non-Spectral Asymptotic Analysis of One-parameter Operator Semigroups*, Oper. Theory Adv. Appl., **173**, Basel, Birkhäuser Verlag, 2007.
- [21] Е. Ю. Емельянов, “Условия асимптотической конечномерности C_0 -полугруппы”, *Сиб. матем. журн.*, **44**:5 (2003), 1015–1020.
- [22] А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов, “Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов”, *Матем. сб.*, **193**:11 (2002), 3–42.
- [23] А. Г. Баскаков, “Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов”, *Матем. заметки*, **84**:2 (2008), 175–192.
- [24] А. Г. Баскаков, “Операторные эргодические теоремы и дополняемость подпространств банаховых пространств”, *Изв. вузов. Матем.*, 1988, № 11, 3–11.
- [25] K.-J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Grad. Texts in Math., **194**, Springer-Verlag, New York, 2000.

А. Г. Баскаков

Воронежский государственный университет

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Поступило

19.03.2013

Исправленный вариант

08.06.2013