Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Шуликина, Итерации резольвент и однородные пространства разделяющих точек, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 2, 288–299

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10287>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 12:30:12

Итерации резольвент и однородные пространства разделяющих точек

М. С. Шуликина

Приведен подход, описывающий пространства итераций резольвент с постоянными отображениями. Его использование позволяет строить (однородные, не алгебраически однородные) пространства разделяющих точек произвольного порядка.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm10287

1. Введение

Резольвенты топологических пространств широко используются для построения примеров и контрпримеров, удовлетворяющих различным топологическим свойствам. Понятие резольвенты было введено Федорчуком в [1] и выражает идею замены каждой точки исходного пространства экземпляром некоторого другого пространства. Использование процесса итерации резольвент позволяет получать пространства, интересные как своими размерностными, так и кардинальнозначными инвариантами. Обзор сведений о резольвентах и примерах их применения можно найти в работах [2], [3].

В настоящей статье показано, что пространства, построенные в [4], являются итерациями резольвент с постоянными отображениями. Используя описание из работы [4], приводится полное решение задачи построения пространств разделяющих точек произвольного порядка. Отметим, что пространства разделяющих точек порядка 3 построены в [5] и [6]; при этом в [6] приведенный пример однороден, и говорится о возможности построения пространств разделяющих точек любого конечного порядка. Построенные нами пространства разделяющих точек произвольного порядка однородны, и отмечено, что пространства разделяющих точек порядка 3 и более не могут быть алгебраически однородными.

Полагаем, что все рассматриваемые в данной статье пространства тихоновские, отображения пространств непрерывные. Используем терминологию и обозначения из [7], через ω обозначим неотрицательные целые числа, и пусть $A \amalg B$ – дизъюнктивная сумма пространств A и B .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-90702 моб-ст), а также при частичной поддержке ФЦН “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (госконтракт № П937 от 20.08.2009).

Точка x связного топологического пространства X называется *разделяющей точкой* [8], если подмножество $X \setminus \{x\}$ несвязно. Если $X \setminus \{x\}$ имеет n , $n \geq 2$, компонент связности, то точка x называется *разделяющей точкой порядка n* . *Пространством разделяющих точек* называется пространство, все точки которого разделяющие.

2. Итерации резольвент

2.1. Определение резольвенты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см., например, [2], [3]). Пусть X – топологическое пространство, каждой точке x которого соответствуют топологическое пространство Y_x и непрерывное отображение $h_x: X \setminus \{x\} \rightarrow Y_x$. Базу топологии на множестве

$$R(X, Y_x, h_x) = \bigcup \{\{x\} \times Y_x : x \in X\}$$

задают множества

$$U \bigotimes_x V = (\{x\} \times V) \cup \bigcup \{\{x'\} \times Y_{x'} : x' \in U \cap h_x^{-1}(V)\},$$

где $x \in X$, U – открытое подмножество X и $x \in U$, V – открытое подмножество Y_x .

Пространство $R(X) = R(X, Y_x, h_x)$ называется *резольвентой X* (в каждой точке x в Y_x посредством отображения h_x). Отображение $\pi: R(X) \rightarrow X$, переводящее пару (x, y) в точку x , называется *отображением резольвенты*.

Процесс построения резольвент можно итерировать. Обозначим

$$R^0 = X, \quad R^1 = R(X),$$

и пусть $\pi_n^{n+1}: R^{n+1} \rightarrow R^n$ – отображения резольвент для $n \in \omega$, $R^{n+1} = R(R^n)$. Предел R^ω обратного спектра $S = \{R^n, \pi_n^{n+1}, n \in \omega\}$ есть ω -итерация резольвент.

2.2. Итерация резольвент с постоянными отображениями. Рассмотрим семейство $\{Y_n : n \in \omega\}$ топологических пространств с отмеченными точками $y_n \in Y_n$ и подпространствами $M_n \subset Y_n$, $n \in \omega$, $y_n \notin M_n$ при $n \geq 1$. Пусть $R^0 = Y_0$ и резольвента R^1 есть пространство $R(Y_0, Y_x, h_x)$, в котором каждой точке $x \in M_0$ поставлено в соответствие пространство $Y_x = Y_1$, а точкам $x \in Y_0 \setminus M_0$ соответствует пространство $Y_x = \{y_1\}$. Отображение $h_x: Y_0 \setminus \{x\} \rightarrow Y_x$ для любого $x \in Y_0$ полагаем равным постоянному отображению в точку y_1 . Пространство R^0 естественным образом отождествим с подпространством $R^0 \times \{y_1\}$ пространства R^1 . Положим

$$T_1 = \bigcup \{\{x\} \times M_1 : x \in M_0\} \subset R^1.$$

Далее, проведем построение резольвент $\{R^n : n \geq 2\}$ по индукции. Для каждого $n \geq 1$ полагаем $R^{n+1} = R(R^n, Y_x, h_x)$, где каждой точке x множества T_n соответствует пространство $Y_x = Y_{n+1}$, а точкам $x \in R^n \setminus T_n$ соответствует пространство $Y_x = \{y_{n+1}\}$; отображение $h_x: R^n \setminus \{x\} \rightarrow Y_x$ для любого $x \in R^n$ является постоянным отображением в точку y_{n+1} . Полагаем

$$T_{n+1} = \bigcup \{\{x\} \times M_{n+1} : x \in T_n\}.$$

Определены отображения резольвент $\pi_n^{n+1}: R^{n+1} \rightarrow R^n$ и вложения $i_{n,n+1}: R^n \rightarrow R^{n+1}$, $n \in \omega$, при которых для каждого $n \in \omega$ пространство R^n отождествляется с подпространством $R^n \times \{y_{n+1}\}$ пространства R^{n+1} .

В пространстве R^{n+1} , $n \in \omega$, топология задается множествами (считаем, что $R^{-1} = \emptyset$ и $T_0 = M_0$):

(а) базу окрестностей точек $z \in T_n$ составляют множества

$$(\{z\} \times V) \cup \bigcup \{ \{z'\} \times Y_{n+1} : z' \in (U \setminus \{z\}) \cap T_n \} \cup \bigcup \{ \{z'\} \times \{y_{n+1}\} : z' \in U \setminus T_n \},$$

где U – открытое подмножество $R^n \setminus R^{n-1}$, $z \in U$, V – открытое подмножество Y_{n+1} , $y_{n+1} \in V$;

(б) базу окрестностей точек $z \in R^n \setminus T_n$ составляют множества вида

$$\bigcup \{ \{z'\} \times Y_{n+1} : z' \in U \cap T_n \} \cup \bigcup \{ \{z'\} \times \{y_{n+1}\} : z' \in U \setminus T_n \},$$

где U – открытое подмножество R^n и $z \in U$;

(в) базу окрестностей точек $z = (x, y) \in R^{n+1} \setminus R^n$, где $x \in T_n$ и $y \in Y_{n+1}$, составляют множества вида

$$\{x\} \times V,$$

где V – открытое подмножество Y_{n+1} , $y_{n+1} \notin V$ и $y \in V$.

Таким образом, определены прямая $\{R^n, i_{n,n+1}, n \in \omega\}$ и обратная $\{R^n, \pi_n^{n+1}, n \in \omega\}$ последовательности и их пределы R_ω и R^ω соответственно.

2.3. Пространства, построенные Соколовской в работе [4]. По семейству

$$\mathfrak{F} = \{(Y_n, M_n, y_n) : n \in \omega\},$$

где Y_n есть пространство, $M_n \subset Y_n$, $n \in \omega$, и точка $y_n \notin M_n$ при $n \geq 1$, определяются семейства последовательностей X_n длины $n + 1$ такие, что $X_0 = \{(t_0) : t_0 \in Y_0\}$ и

$$X_n = \{(t_0, \dots, t_n) : (t_0, \dots, t_n) \in M_0 \times M_1 \times \dots \times M_{n-1} \times (Y_n \setminus \{y_n\})\}$$

для любого $n \geq 1$.

Множество конечных последовательностей обозначается

$$X_{\mathfrak{F}} = \bigcup \{X_n : n \in \omega\}.$$

Для точки $P \in X_{\mathfrak{F}}$ через $|P| \in \omega$ обозначается индекс, для которого $P \in X_{|P|}$.

Множество бесконечных последовательностей обозначается

$$DX_{\mathfrak{F}} = \{(t_0, t_1, \dots) : t_n \in M_n, n \in \omega\}$$

и $bX_{\mathfrak{F}} = X_{\mathfrak{F}} \cup DX_{\mathfrak{F}}$.

Для точки $P = (p_0, \dots, p_n) \in X_n$ и подмножества $U \subset Y_n$, $p_n \in U$, определяется множество

$$B_{P,U}^\dagger = \{(t_0, \dots, t_l) \in bX_{\mathfrak{F}} : n \leq l < \infty, t_i = p_i \text{ при } i < n, t_n \in U\}.$$

(В случае $l = \infty$ последовательность $(t_0, \dots, t_l)$ считается бесконечной последовательностью $(t_0, t_1, \dots)$). При определении топологии на $bX_{\mathfrak{F}}$ множество U предполагается открытым в Y_n , причем, если $n \geq 1$, то $U \subset Y_n \setminus \{y_n\}$.

Для точки $Q = (q_0, \dots, q_n) \in X_n$, где $q_n \in M_n$, и подмножества $V \subset Y_{n+1}$, содержащего точку y_{n+1} , определяется множество

$$B_{Q,V}^\downarrow = bX_{\mathfrak{F}} \setminus B_{Q',F}^\uparrow,$$

где $F = Y_{n+1} \setminus V$ и $q'_{n+1} \in F$ для точки $Q' = (q_0, \dots, q_n, q'_{n+1})$. Если $V = Y_{n+1}$ (т.е. $F = \emptyset$) или $q_n \notin M_n$, то

$$B_{Q,V}^\downarrow = bX_{\mathfrak{F}}.$$

Топология пространства $bX_{\mathfrak{F}}$ задается предбазой, состоящей из множеств

$$B = \{B_{P,U}^\uparrow, B_{Q,V}^\downarrow\},$$

где P и Q – точки пространства $X_{\mathfrak{F}}$, множества U и V открыты в $Y_{|P|}$ или $Y_{|Q|+1}$ соответственно.

Пространства $X_{\mathfrak{F}}$ и $X_{\mathfrak{F}}^n = \bigcup_{k=0}^n X_k$, $n \in \omega$, рассматриваются как подпространства $bX_{\mathfrak{F}}$.

Отметим, что при определении пространства $bX_{\mathfrak{F}}$ к семейству $\mathfrak{F}$ нами предъявлено требование $y_n \notin M_n$, $n \geq 1$, отличное от оригинального в работе [4]. Однако, таким образом введенная формализация равносильна исходной и упрощает изложение.

2.4. Гомеоморфизм пространств $bX_{\mathfrak{F}}$ и R^ω . Определим биекцию ω -итерации резольвент R^ω (предела обратной последовательности $\{R^n, \pi_n^{n+1}, n \in \omega\}$) на пространство $bX_{\mathfrak{F}}$.

Точка

$$z = (z_0, z_1, z_2, \dots) \in R^\omega \subset \prod \{R^n : n \in \omega\}$$

в том и только том случае, если $z_{k+1} = (z_k, t_{k+1}) \in R^{k+1}$. При этом, если $t_{k+1} = y_{k+1}$, то $t_m = y_m$ при $m \geq k+1$. Таким образом, каждой точке $z = (z_0, z_1, z_2, \dots) \in R^\omega$ можно поставить в соответствие последовательность $(z_0, t_1, \dots, t_n, \dots)$ и определить биекцию g предела R^ω на $bX_{\mathfrak{F}}$, полагая $g(z) = (z_0, t_1, \dots, t_n(z))$, если для z существует число $n(z) \geq 1$ такое, что

$$t_{n(z)+1} = y_{n+1}, \quad t_{n(z)} \neq y_{n(z)},$$

$$g(z) = \begin{cases} (z_0) & \text{при } n(z) = 0, \\ (z_0, t_1, \dots, t_n, \dots) & \text{иначе.} \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 1. *Отображение g – гомеоморфизм R^ω на $bX_{\mathfrak{F}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $\pi_n: R^\omega \rightarrow R^n$, $n \in \omega$, обозначим предельные проекции. Базу топологии на R^ω образуют множества $\pi_n^{-1}O$, где O – открытые базисные подмножества пространства R^n , $n \in \omega$.

Прообраз при отображении g открытого множества $B_{P,U}^\uparrow$, определяемого точкой $P = (z_0, \dots, t_n) \in X_n$, $n \geq 1$, и открытым подмножеством $U \subset Y_n$, $t_n \in U$, $y_n \notin U$, является множеством точек в R^ω вида

$$(z_0, z_1 = (z_0, t_1), z_2 = (z_1, t_2), \dots, z_{n-1} = (z_{n-2}, t_{n-1}), z'_n = (z_{n-1}, t'_n), \dots),$$

где $t'_n \in U$. Оно совпадает с множеством $\pi_n^{-1}(\{z_{n-1}\} \times U)$, где $\{z_{n-1}\} \times U$ – открытое подмножество R^n . Случай $n = 0$ очевиден.

Прообраз при отображении g открытого множества $B_{Q,V}^\perp$, определяемого точкой $Q = (z_0, \dots, t_n) \in X_n$, $t_n \in M_n$, и открытым подмножеством $V \subset Y_{n+1}$, $y_{n+1} \in V$, является дополнением до множества точек в R^ω вида

$$(z_0, z_1 = (z_0, t_1), z_2 = (z_1, t_2), \dots, z_n = (z_{n-1}, t_n), z'_{n+1} = (z_n, t'_{n+1}), \dots),$$

где $t'_{n+1} \in Y_{n+1} \setminus V$. Оно совпадает с дополнением до множества

$$\pi_{n+1}^{-1}(\{z_n\} \times (Y_{n+1} \setminus V)),$$

где $\{z_n\} \times (Y_{n+1} \setminus V)$ – замкнутое подмножество R^n .

Так как прообразы множеств, образующих предбазу $bX_{\mathfrak{F}}$, открыты, то отображение g непрерывно.

Индукцией по $n \in \omega$ докажем, что образы открытых базисных множеств пространства R^ω открыты в $bX_{\mathfrak{F}}$.

В случае $n = 0$ образ множества $\pi_0^{-1}(O)$, где O – открытое подмножество R^0 , есть открытое в $bX_{\mathfrak{F}}$ множество $B_{P,O}^\uparrow$ для некоторой точки $P = (z_0) \in O$.

Пусть для $k < n$ образ множества $\pi_k^{-1}(O)$, где O – открытое подмножество R^k , открыт в $bX_{\mathfrak{F}}$.

Рассмотрим множество $\pi_n^{-1}(O)$, где O – открытое базисное подмножество в R^n . Точка

$$z = (z_0, z_1 = (z_0, t_1), z_2 = (z_1, t_2), \dots) \in \pi_n^{-1}O,$$

если $z_n \in O$.

Пусть $O = (\{z_{n-1}\} \times V)$, где V – открытое подмножество Y_n и $y_n \notin V$. Тогда множество $g(\pi_n^{-1}(O))$ содержит точки $(z_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t'_n, \dots)$, где $t'_n \in V$. Значит,

$$g(\pi_n^{-1}(O)) = B_{P,V}^\uparrow,$$

где $P = (z_0, t_1, \dots, t_n)$, $t_n \in V$, – открытое в $bX_{\mathfrak{F}}$ множество.

Пусть

$$O = (\{z_{n-1}\} \times V) \cup \bigcup \{\{z'\} \times Y_n : z' \in (U \setminus \{z_{n-1}\}) \cap T_{n-1}\} \\ \cup \bigcup \{\{z'\} \times \{y_n\} : z' \in U \setminus T_{n-1}\},$$

где V – открытое подмножество Y_n , $y_n \in V$, U – открытое подмножество R^{n-1} , $z_{n-1} \in U$ и $z_{n-1} \in T_{n-1}$, или

$$O = \bigcup \{\{z'\} \times Y_n : z' \in U \cap T_{n-1}\} \cup \bigcup \{\{z'\} \times \{y_n\} : z' \in U \setminus T_{n-1}\},$$

где U – открытое подмножество R^{n-1} , $z_{n-1} \in U$ и $z_{n-1} \in R^{n-1} \setminus T_{n-1}$. Тогда множество $g(\pi_n^{-1}(O))$ содержит все точки вида $(z_{n-2}, t'_{n-1}, \dots) \in U$, за исключением точек $(z_{n-1}, t'_n, \dots)$, где $t'_n \notin V$, если $z_{n-1} \in T_{n-1}$. Следовательно,

$$g(\pi_n^{-1}(O)) = g(\pi_{n-1}^{-1}(U)) \cap B_{Q,V}^\perp,$$

где $Q = (z_0, t_1, \dots, t_{n-1}, y_n)$ (если $z_{n-1} \in R^{n-1} \setminus T_{n-1}$, то $B_{Q,V}^\perp = bX_{\mathcal{F}}$). По предположению индукции множество $g(\pi_{n-1}^{-1}(U))$ открыто в $bX_{\mathfrak{F}}$. Значит, и множество $g(\pi_n^{-1}(O))$ открыто в $bX_{\mathfrak{F}}$.

Доказано, что отображение g открыто, а значит, является гомеоморфизмом.

Обозначим $R_{\text{fin}}^\omega \subset R^\omega$ – множество точек $z = (z_0, z_1, z_2, \dots) \in R^\omega$, для которых существует номер $n(z) \in \mathbb{N}$ такой, что

$$z_{n(z)+1} = (z_{n(z)}, y_{n(z)+1}).$$

Положим $R_{\text{inf}}^\omega = R^\omega \setminus R_{\text{fin}}^\omega$.

Из определения гомеоморфизма g вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Имеем*

(а) $g(R^n) = X_{\mathfrak{F}}^n$; *здесь R^n отождествляется с подмножеством*

$$\{(z_0, z_1, z_2, \dots) \in R^\omega : z_{k+1} = (z_k, y_{k+1}), k \geq n\}$$

в R^ω ;

(b) $g(R_{\text{fin}}^\omega) = X_{\mathfrak{F}}^\omega$;

(c) $g(R_{\text{inf}}^\omega) = DX_{\mathfrak{F}}^\omega$.

ТЕОРЕМА 2. *Прямой предел R_ω последовательности $\{R^n, i_{n,n+1}, n \in \omega\}$ уплотняется на пространство $X_{\mathfrak{F}}^\omega$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямым пределом R_ω последовательности резольвент $\{R^n : n \in \omega\}$ с вложениями $i_{n,n+1} : R^n \rightarrow R^{n+1}$ является фактор-пространство

$$\coprod \{R^n : n \in \omega\} / \sim$$

по отношению эквивалентности $x \sim y$, $x \in R^n$, $y \in R^m$, $n < m$, тогда и только тогда, когда $i_{n,m}(x) = (i_{m-1,m} \circ \dots \circ i_{n,n+1})(x) = y$ [9].

Реккурентно зададим непрерывные отображения $f_n : R^n \rightarrow R_{\text{fin}}^\omega$. Для точки $z_n = (z_{n-1}, t_n)$ полагаем

$$f_n(z_n) = (z_0, \dots, z_{n-1}, z_n, z_{n+1} = (z_n, y_{n+1}), \dots),$$

где первые n координат совпадают с координатами точки $f_{n-1}(z_{n-1})$, $n \geq 1$ (при $n = 0$ и $z_0 \in Y_0$ полагаем $f_0(z_0) = (z_0, z_1 = (z_0, y_1), \dots)$). Через $f : \coprod \{R^n : n \in \omega\} \rightarrow R_{\text{fin}}^\omega$ обозначим комбинацию отображений f_n , $n \in \omega$. Образы эквивалентных точек при отображении f совпадают. Поэтому корректно определено непрерывное отображение R_ω на пространство R_{fin}^ω , гомеоморфное $X_{\mathfrak{F}}^\omega$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Уплотнение в теореме 2 не обязано быть гомеоморфизмом. Действительно, пусть

$$\mathfrak{F} = \{(Y_n = [0, 1], M_n = (0, 1], y_n = \{0\}) : n \in \omega\}.$$

Занумеруем рациональные числа $\mathbb{Q} = \{r_k : k \in \mathbb{N}\}$ интервала $(0, 1)$ и рассмотрим множество

$$F = \bigcup \left\{ \pi_k^{-1} \left(g^{-1}(t_0(=r_k), \dots, t_{k-1}(=r_k)) \times \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right) : k \in \omega \setminus \{0\} \right\} \subset R^\omega.$$

Легко видеть, что $f(R^n) \cap F$ замкнуто для любого $n \in \omega$ (лишь первые n элементов объединения пересекаются с $f(R^n)$). Тем самым, $f^{-1}(R_{\text{fin}}^\omega \setminus F)$ есть открытое подмножество прямого предела R_ω . Однако $R^0 \subset R^\omega \setminus F$, но само пространство $R^\omega \setminus F$ не является окрестностью в R^ω никакой точки из R^0 (в силу плотности $\mathbb{Q}$ в $[0, 1]$).

3. Разделяющие точки пространства $X_{\mathfrak{F}}$

Пространства Y_n , $n \in \omega$, семейства $\mathfrak{F} = \{(Y_n, M_n, y_n) : n \in \omega\}$ с фиксированными точками $y_n \in Y_n$ и подпространствами $M_n \subset Y_n$, $n \in \omega$, где $y_n \notin M_n$ при $n \geq 1$, всюду ниже считаем связными. Следуем понятиям, введенным в [4]. По точке $P = (p_0, p_1, \dots, p_n) \in X_{\mathfrak{F}}$, где $p_n \in M_n$, определим слой

$$C_P = \{(p_0, p_1, \dots, p_n, t) : t \in Y_{n+1} \setminus \{y_{n+1}\}\} \cup \{P\}.$$

Отметим, что каждый слой C_P гомеоморфен соответствующему пространству Y_{n+1} (см. [4]). Полагаем

$$C_{\emptyset} = \{(t) : t \in Y_0\}.$$

Слой $C_{\emptyset}$ гомеоморфен Y_0 .

Пусть $P, Q \in X_{\mathfrak{F}}$, тогда

- $P < Q$, если $Q \in C_P$ и $P \neq Q$ (слои C_P и C_Q пересекаются, если слой C_Q определен);
- $P \ll Q$, если существует такая конечная последовательность $P_1, \dots, P_n$ точек $X_{\mathfrak{F}}$, что $P = P_1 < P_2 < \dots < P_n = Q$ (существует последовательность попарно пересекающихся слоев $C_P = C_{P_1}$ и C_{P_2} , C_{P_2} и C_{P_3} , $\dots$, $C_{P_{n-1}}$ и $C_{P_n} = C_Q$, если слой C_Q определен).

ЛЕММА 1. Для точки $P = (p_0, p_1, \dots, p_n) \in X_{\mathfrak{F}}$ имеем

- (а) если $E \subset Y_n \setminus \{y_n\}$ – связное подмножество, содержащее точку p_n , то множество $B_{P,E}^{\uparrow}$ – связное подмножество $X_{\mathfrak{F}}$;
- (б) если $E \subset Y_{n+1}$ – связное подмножество, содержащее точку y_{n+1} , и $p_n \in M_n$, то множество $B_{P,E}^{\downarrow}$ – связное подмножество $X_{\mathfrak{F}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть

$$P' = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1}) \subset C_{P'} \quad \text{и} \quad E' = \{(p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, t) : t \in Y_n \cap E\}.$$

Тогда

$$B_{P,E}^{\uparrow} = E' \cup \bigcup \{C_Q : P'' \ll Q, P'' \in E' \text{ и слой } C_Q \text{ определен}\}.$$

Множество E' связно, и для каждого слоя $C_Q \in B_{P,E}^{\uparrow}$ существует последовательность попарно пересекающихся связных слоев $C_{P_1}, C_{P_2}, C_{P_3}, \dots, C_{P_{n-1}}, C_{P_n} = C_Q$ множества $B_{P,E}^{\uparrow}$, $C_{P_1} \cap E' \neq \emptyset$. Тем самым, $B_{P,E}^{\uparrow}$ связно.

(б) Пусть

$$P'_0 = (p_0), \quad P'_1 = (p_0, p_1), \quad \dots, \quad P'_{n-1} = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1}), \\ E' = \{(p_0, p_1, \dots, p_n, t) : t \in Y_{n+1} \cap E\}.$$

Тогда

$$B_{P,E}^{\downarrow} = \bigcup \{C_Q : P_0 \ll Q, P_0 = (t) \in C_{\emptyset}, t \neq p_0, \text{ и слой } C_Q \text{ определен}\} \cup C_{\emptyset} \\ \cup \bigcup \{C_Q : P_1 \ll Q, P_1 = (p_0, t) \in C_{P'_0}, t \neq p_1, \text{ и слой } C_Q \text{ определен}\} \\ \cup C_{P'_0} \cup \dots$$

$$\begin{aligned} & \cup \bigcup \{C_Q : P_n \ll Q, P_n = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, t) \in C_{P'_{n-1}}, t \neq p_n, \\ & \quad \text{и слой } C_Q \text{ определен}\} \cup C_{P'_{n-1}} \\ & \cup \bigcup \{C_Q : P'' \ll Q, P'' \in E', \text{ и слой } C_Q \text{ определен}\} \cup E'. \end{aligned}$$

Согласно рассуждениям в случае (а) каждое из множеств вида

$$\bigcup \{C_Q\} \bigcup C_{P'_k}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

а также множество $\bigcup \{C_Q\} \cup E'$ связны. При этом последовательность $C_\emptyset, C_{P'_0}, \dots, C_{P'_{n-1}}$ слоев из данных множеств и множество E' пересекаются. Тем самым, множество $B_{P,E}^\perp$ связно.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пространство $X_{\mathfrak{F}}$ является связным.*

ТЕОРЕМА 3. *Если для некоторого $n \in \omega$ и точки $p_n \in M_n$ подпространство $Y_n \setminus \{p_n\}$ имеет k компонент связности, а подпространство $Y_{n+1} \setminus \{y_{n+1}\}$ имеет m компонент связности, то точка*

$$P = (p_0, \dots, p_{n-1}, p_n),$$

где $p_0 \in Y_0, \dots, p_{n-1} \in Y_{n-1}$ – любые допустимые точки, является разделяющей точкой пространства $X_{\mathfrak{F}}$ порядка $k + m$.

Другими словами, если точка p_n – разделяющая точка пространства Y_n порядка $k \geq 2$, а точка y_{n+1} – разделяющая точка пространства Y_{n+1} порядка $m \geq 2$, то точка

$$P = (p_0, \dots, p_{n-1}, p_n),$$

где $p_0 \in Y_0, \dots, p_{n-1} \in Y_{n-1}$ – любые допустимые точки, является разделяющей точкой пространства $X_{\mathfrak{F}}$ порядка $k + m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию теоремы множество $Y_n \setminus \{p_n\}$ имеет k компонент связности $Y_{n,j}$, $j = 1, 2, \dots, k$, где без ограничения общности рассуждений считаем, что $y_n \in Y_{n,1}$; а множество $Y_{n+1} \setminus \{y_{n+1}\}$ имеет m компонент связности $Y_{n+1,l}$, $l = 1, 2, \dots, m$.

Тогда подмножество $X_{\mathfrak{F}} \setminus \{P\}$ можно представить в виде

$$X_{\mathfrak{F}} \setminus \{P\} = \prod_{j=2}^k B_{Q_{n,j}, Y_{n,j}}^\uparrow \cup \prod_{l=1}^m B_{Q_{n+1,l}, Y_{n+1,l}}^\uparrow \cup B_{P', Y_{n,1}}^\perp,$$

где

$$\begin{aligned} P' &= (p_0, \dots, p_{n-1}), \quad Q_{n,j} = (p_0, \dots, p_{n-1}, y_{n,j}), \quad y_{n,j} \in Y_{n,j}, \quad j = 2, \dots, k, \\ Q_{n+1,l} &= (p_0, \dots, p_n, y_{n+1,l}), \quad y_{n+1,l} \in Y_{n+1,l}, \quad l = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Все слагаемые суммы открытые, попарно дизъюнктные и связные (по лемме 1) множества.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 3 остается справедливой и для неразделяющих точек связного пространства (считая их разделяющими порядка 1).

ПРИМЕР 1. Для любой последовательности

$$K = \{n_1, n_2, \dots\}, \quad n_i \in \omega \cup \{\infty\}, \quad n_i \geq 2, \quad i \in \mathbb{N},$$

существует пространство разделяющих точек, порядки которых принимают значения из последовательности K и только их.

Обозначим через $\bigvee_i$ букет i окружностей S^1 с общей точкой

$$b_i, \quad i \in \omega \cup \{\infty\}, \quad i \geq 1.$$

В случае конечного числа i топология на V_i естественная. Базу топологии в точке b_∞ пространства $\bigvee_\infty$ составляют множества, содержащие все окружности, кроме их конечного числа, и пересекающие каждую окружность по открытому множеству. База топологии в остальных точках совпадает с топологией окружности. Очевидно, что единственной разделяющей точкой пространства $\bigvee_i$ является точка b_i порядка i при $i \geq 2$. При $i = 1$ у пространства $\bigvee_1 = S^1$ разделяющих точек нет. Искомым будет пространство $X_{\mathfrak{F}}$, построенное по семейству $\mathfrak{F} = \{(Y_i, M_i, y_i) : i \in \omega\}$ с фиксированными точками $y_i \in Y_i$ и подпространствами $M_i \subset Y_i$, где

$$Y_0 = M_0 = S^1,$$

y_0 – произвольная точка окружности,

$$Y_i = \bigvee_{n_i-1}, \quad y_i = b_{n_i-1}, \quad M_i = Y_i \setminus \{y_i\}, \quad i \geq 1.$$

В [6] построен пример однородного пространства разделяющих точек порядка 3 и утверждается, что предложенным способом можно построить пространство разделяющих точек порядка n для любого натурального $n \geq 3$. Покажем, что использование итераций резольвент позволяет решить это вопрос.

ТЕОРЕМА 4. *Для любого натурального числа $n \geq 2$ существует однородное пространство $X_{\mathfrak{F}_n}$ разделяющих точек порядка n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по $n \geq 2$.

База индукции. При $n = 2$ полагаем

$$\mathfrak{F}_2 = \{(Y_i = S^1, M_i, y_i) : i \in \omega\},$$

y_i – произвольная точка S^1 , $i \in \omega$,

$$M_0 = S^1, \quad M_i = S^1 \setminus \{y_i\}, \quad i \geq 1.$$

Тогда $X_{\mathfrak{F}_2}$ – пространство разделяющих точек порядка 2 по теореме 3 и однородное по лемме 10 из [4].

Предположение индукции. Допустим, что для всех $k \leq n$ существует однородное пространство разделяющих точек порядка k .

Шаг индукции. Пусть $k = n$. Определим семейство

$$\mathfrak{F}_n = \{(Y_i, M_i, y_i) : i \in \omega\}$$

с фиксированными точками $y_i \in Y_i$ и подпространствами $M_i \subset Y_i$ следующим образом. Для каждого $i \in \omega$ полагаем

$$Y_{2i+1} = X_{\mathfrak{F}_{n-1}}, \quad Y_{2i} = S^1.$$

Точки $y_i \in Y_i$, $i \in \omega$, выбираем произвольным образом,

$$M_0 = Y_0, \quad M_i = Y_i \setminus \{y_i\}, \quad i \geq 1.$$

По теореме 3 пространство $X_{\mathfrak{F}_n}$ является пространством разделяющих точек порядка n . Оно однородно по лемме 10 из [4].

Приведем пример пространства разделяющих точек порядка 2, не являющегося однородным. В качестве первого пространства Y_1 возьмем двумерный открытый диск (он не имеет разделяющих точек), все пространства Y_i , $i > 1$, – окружности, $M_i = Y_i$, точки y_i фиксируем произвольным образом. Применим счетное число итераций. В этом случае точку $P = (p_0)$ нельзя отобразить ни в одну из точек, например $Q = (q_0, q_1)$, так как любая окрестность точки P содержит подмножество гомеоморфное диску, т.е. подмножеству без разделяющих точек, которому принадлежит P . При этом у точки Q есть окрестность, любое связное подмножество которой, содержащее точку Q , содержит разделяющие точки. Поэтому не существует гомеоморфизма, отображающего P в Q .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В [8; гл. 5, § 46, IX, теорема 1] доказано, что если X – сепарабельное метрическое пространство, то число разделяющих точек порядка ≥ 3 не более чем счетно. Следовательно, в приведенных выше примерах пространства не являются сепарабельными метрическими. Резольвента

$$R(S^1) = R(S^1, Y_x = S^1, h_x: S^1 \setminus \{x\} \rightarrow \{\star\}),$$

переводящая окружности в каждой точке в окружность посредством постоянного отображения есть несепарабельный бикомпакт [2], вложимый в пространства, построенные в теореме 4 и примере 1. Таким образом, пространства $X_{\mathfrak{F}_n}$ и $X_{\mathfrak{F}}$ неметризуемы. Пространства $X_{\mathfrak{F}_n}$ и $X_{\mathfrak{F}}$, в случае $n_i \in \omega$, $i \in \mathbb{N}$, являются счетным объединением подмножеств:

$$R^0, \quad R^1 \setminus R^0, \quad \dots, \quad R^{n+1} \setminus R^n, \quad \dots,$$

каждое из которых является счетным объединением метризуемых подмножеств.

В [10] для произвольного топологического пространства показано, что пространство разделяющих точек не может быть бикомпактным. Пространства в примере 1 являются σ -бикомпактными (резольвенты $R^0, R^1, \dots, R^n, \dots$ бикомпактны).

Пространство, являющееся пространством левых смежных классов топологической группы, называется *алгебраически однородным*.

ТЕОРЕМА 5. *Однородное пространство X_n разделяющих точек порядка $n \geq 3$ не является алгебраически однородным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из замечания 2 [11] следует, что пространство алгебраически однородно, если на нем возможно транзитивное и *открытое действие* ($x \in \text{int}(Ox)$, где $Ox = \bigcup \{g(x) : g \in O\}$, для любой окрестности единицы O , действующей группы).

Для $x \in X_3$ возьмем в каждой компоненте связности множества $X_3 \setminus \{x\} = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ по точке $y_i \in Y_i$, $i = 1, 2, 3$. Тогда при любой топологизации непрерывно действующей на X_3 группы ее окрестностью единицы будет множество

$$O = \{h : h(y_i) \in Y_i, i = 1, 2, 3\}.$$

Для любого $h \in O$ имеем $h(x) = x$. Действительно множества $Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2$, $Y_2 \cup \{x\} \cup Y_3$ и $Y_1 \cup \{x\} \cup Y_3$ связны;

$$h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2) \cap Y_1 \neq \emptyset, \quad h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2) \cap Y_2 \neq \emptyset,$$

и $h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2)$ связно. Значит,

$$x \in h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2)$$

(иначе множество $h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2)$ будет несвязно). Аналогично

$$x \in h(Y_2 \cup \{x\} \cup Y_3), \quad x \in h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_3).$$

Тем самым,

$$h(x) = x \quad \text{для любого } h \in O$$

и действие не открыто.

Для $x \in X_n$, $n \geq 4$, возьмем в каждой компоненте связности множества $X_n \setminus \{x\} = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$ по точке $y_i \in Y_i$, $i = 1, \dots, n$. Тогда при любой топологизации непрерывно действующей на X_n группы ее окрестностью единицы будет множество

$$O = \{h : h(y_i) \in Y_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Для любого $h \in O$ имеем $h(x) = x$. Действительно, множества $Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2$ и $Y_3 \cup \{x\} \cup Y_4$ связны;

$$h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2) \cap Y_1 \neq \emptyset, \quad h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2) \cap Y_2 \neq \emptyset,$$

и $h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2)$ связно. Значит,

$$x \in h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2)$$

(иначе множество $h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2)$ будет несвязно). Аналогично

$$x \in h(Y_3 \cup \{x\} \cup Y_4).$$

Тем самым, $h(x) = x$ для любого $h \in O$ и действие не открыто.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В.В. Федорчук, “О бикомпактах с несовпадающими размерностями”, *Докл. АН СССР*, **182:2** (1968), 275–277.
- [2] В.В. Федорчук, “Вполне замкнутые отображения и их приложения”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **9:4** (2003), 105–235.
- [3] S. Watson, “The construction of topological spaces. Planks and resolutions”, *Recent Progress in General Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1992, 673–757.

- [4] А. М. Соколовская, “Один метод построения полурешеток бикомпактных G -расширений”, *Матем. заметки*, **82**:6 (2007), 916–925.
- [5] D. Daniel, W. S. Mahavier, “Concerning cut point spaces of order three”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2007, Art. ID 10679.
- [6] L. R. Ford, Jr., “Homeomorphism groups and coset spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **77** (1954), 490–497.
- [7] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986.
- [8] К. Куратовский, *Топология*, Т. 2, Мир, М., 1969.
- [9] C. Bessaga, A. Pełczyński, *Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology*, Monografie Matematyczne, **58**, PWN, Warszawa, 1975.
- [10] B. Honari, Y. Bahrampour, “Cut-point spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **127**:9 (1999), 2797–2803.
- [11] К. Л. Козлов, В. А. Чатырко, “Топологические группы преобразований и бикомпакты Дугунджи”, *Матем. сб.*, **201**:1 (2010), 103–128.

М. С. Шуликина

Национальный исследовательский Томский
политехнический университет
E-mail: shulikinams@tpu.ru

Поступило

29.03.2013

Исправленный вариант

23.07.2014