Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Тихонов, О скорости приближения сингулярных функций кусочно-постоянными, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 4, 590–604

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10288>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 18:05:46

О скорости приближения сингулярных функций кусочно-постоянными

Ю. В. Тихонов

Рассматриваются приближения монотонной функции на отрезке кусочно-постоянными функциями, имеющими ограниченное число значений: исследуется скорость приближения по норме пространств L_p в зависимости от числа значений. Получен критерий сингулярности функции в терминах скорости приближения. Для самоподобных функций получены точные оценки скорости приближения в терминах параметров самоподобия. Приведена конструкция функций со сколь угодно быстрой и сколь угодно медленной (до теоретического предела) скоростью приближения.

Библиография: 4 названия.

DOI: 10.4213/mzm10288

1. Введение. В работе рассматриваются приближения в $L^p[0; 1]$ неубывающей функции f функциями, принимающими не более N различных значений, и изучается скорость приближения при росте N .

Статья организована следующим образом.

В п. 2 доказывается существование наилучшего приближения монотонной ограниченной функции f кусочно-постоянной функцией для заданного N :

$$C_N^p(f) = \min_{g \in \mathcal{D}_N} \|f - g\|_{L^p}, \quad p \in [1; \infty), \quad N \in \mathbb{N},$$

где $\mathcal{D}_N$ – множество всех монотонных кусочно-постоянных функций на $[0; 1]$ с не более чем N точками разрыва. Также там приводится общая оценка

$$C_N^p(f) \cdot N = O(1), \quad N \rightarrow \infty.$$

В п. 3 доказывается, что условие $C_N^p(f) \cdot N = o(1)$ при $p \in [1; \infty)$ и $N \rightarrow \infty$ является критерием сингулярности функции f . Аналогичный результат получен в [1] – там он сформулирован для $p = 2$, но доказательство можно распространить на $p \in [1; \infty)$. Здесь доказательство проводится другим способом. Также в этом пункте доказывается, что аналогичное условие с $p = \infty$ эквивалентно тому, что f – функция скачков.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00705).

В п. 4 исследуется асимптотика $C_N^p(f)$ при $N \rightarrow \infty$ для монотонной *самоподобной* функции f . Устанавливается, что $C_N^p(f) \asymp N^{-\alpha}$, где α определяется однозначно из коэффициентов самоподобия f .

Наконец, в п. 5 приводится конструкция функций f со сколь угодно быстрым или сколь угодно медленным убыванием величины $C_N^p(f) \cdot N$.

В дальнейшем L^p будет обозначать $L^p[0; 1]$. Для ограниченных монотонных функций из $L^p[0; 1]$ без ограничения общности будем считать, что $f(x) = f(x+0)$ при $x \in [0; 1)$ и $f(1) = f(1-0)$.

2. Существование наилучшего приближения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Символом $\mathcal{D}_N$ будем обозначать множество неубывающих функций на $[0; 1]$, принимающих не более N различных значений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ – неубывающая ограниченная функция. Тогда для любого $p \in [1; +\infty)$ и любого $N \in \mathbb{N}$ найдется функция $g \in \mathcal{D}_N$ такая, что $\|f - g\|_{L^p}$ принимает наименьшее значение среди всех $g \in \mathcal{D}_N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно искать минимум среди таких функций из $\mathcal{D}_N$, значения которых заключены между $\inf f$ и $\sup f$ (остальные функции не минимизируют расстояние в L^p , так как их значения, находящиеся за пределами $[\inf f; \sup f]$, можно уменьшить или увеличить до $\sup f$ или $\inf f$, уменьшив при этом норму разности в L^p). Такое равномерно ограниченное подмножество $\mathcal{D}_N$ – обозначим его $\mathcal{D}'_N$ – параметризуется $2N - 1$ вещественными параметрами ($N - 1$ точек разрыва $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ и N значений на участках постоянства $y_1, y_2, \dots, y_N$), причем такая параметризация непрерывна в L^p , а параметры пробегают замкнутый выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^{2N+1}$, задаваемый неравенствами $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{N-1} \leq 1$ и $\inf f \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_N \leq \sup f$. (Функции, имеющие меньшее число значений, чем N , будут задаваться неоднозначно.) Получаем, что $\mathcal{D}'_N$ является непрерывным образом компакта из $\mathbb{R}^{2N+1}$. Значит, $\mathcal{D}'_N$ само является компактом в L^p . Следовательно, найдется функция $g \in \mathcal{D}'_N$, для которой $\|f - g\|_{L^p}$ принимает наименьшее значение.

ЗАМЕЧАНИЕ. Это утверждение делает корректным определение

$$C_N^p(f) = \min_{g \in \mathcal{D}_N} \|f - g\|_{L^p}, \quad p \in [1; \infty), \quad N \in \mathbb{N}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ – неубывающая ограниченная функция. Тогда для любого $p \in [1; +\infty)$ и любого натурального N выполнено

$$C_N^p(f) \cdot N \leq \frac{\text{osc } f}{2},$$

где $\text{osc } f = \sup f - \inf f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно для произвольного $N \in \mathbb{N}$ построить функцию $g \in \mathcal{D}_N$ такую, что $\|f - g\|_{L^p} \leq (\text{osc } f)/(2N)$. Сначала выберем множество из N значений, которые будет принимать g , а потом зададим функцию g в каждой точке одним из этих значений.

Множество из N значений функции g выберем на отрезке $[\inf f; \sup f]$ равномерно, а именно так, чтобы любая точка этого отрезка была удалена не более чем на

$(\text{osc } f)/(2N)$ от одного из выбранных значений (таким образом, выбранные значения будут образовывать арифметическую прогрессию с разностью $(\text{osc } f)/N$).

Далее, для каждой точки $x \in [0; 1]$ выберем значение $g(x)$, ближайшее к $f(x)$ (меньшее из двух в случае неоднозначности). Из монотонности f будет следовать монотонность так определенной g . При этом, очевидно, $|f(x) - g(x)| \leq (\text{osc } f)/(2N)$ для всех x , откуда следует $\|f - g\|_{L^p} \leq (\text{osc } f)/(2N)$.

3. Скорость приближения произвольных сингулярных функций. Пусть $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — неубывающая ограниченная функция.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть для некоторого $p \in [1; +\infty)$ и последовательности чисел $N(n)$ существует последовательность функций $f_n \in \mathcal{D}_{N(n)}$ такая, что

$$\|f - f_n\|_{L^p} \cdot N(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда f — сингулярная функция (т.е. ее производная равна нулю почти всюду).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $p = 1$.

Обозначим

$$D(n) = \sqrt[3]{\|f - f_n\|_{L^1} \cdot N(n)}, \quad D(n) \rightarrow 0.$$

Можно считать, что $D(n) < 1/2$ для всех n и $\sum_n D(n) < \infty$ (выберем подпоследовательность f_n так, чтобы это выполнялось).

Зафиксируем n . Пусть $a_1, \dots, a_k$ — интервалы постоянства f_n .

Выберем из них те, на которых среднее отклонение f_n от f не превышает значения $\|f - f_n\|_{L^1}/D(n)$:

$$\int_{a_i} |f - f_n| dx \leq \frac{|a_i|}{D(n)} \int_0^1 |f - f_n| dx, \quad (3.1)$$

где $|a_i|$ — длина отрезка a_i . Обозначим выбранные интервалы $b_1, \dots, b_m$. Суммарная длина этих интервалов не меньше $1 - D(n)$. Действительно, предположим обратное. Обозначим остальные интервалы через $c_1, \dots, c_l$. Тогда

$$\int_0^1 |f - f_n| dx \geq \sum_{i=1}^l \int_{c_i} |f - f_n| dx > \frac{1}{D(n)} \int_0^1 |f - f_n| dx \sum_{i=1}^l |c_i| > \int_0^1 |f - f_n| dx.$$

Противоречие.

Рассмотрим интервал $b_i = (r; s)$. Пусть φ — значение f_n на b_i . Обозначим

$$r' = r + |b_i|D(n), \quad s' = s - |b_i|D(n).$$

В силу выбора $D(n)$ выполнено $r' < s'$. Тогда

$$\int_{b_i} |f - f_n| dx \geq \int_r^{r'} (f_n - f) dx \geq |r - r'| \cdot (\varphi - f(r')).$$

Последнее неравенство следует из неубывания f и постоянства f_n . Воспользовавшись также (3.1) и $|r - r'| = |b_i|D(n)$, получаем

$$f(r') - \varphi \geq -\frac{\|f - f_n\|_{L^1}}{D^2(n)}.$$

Аналогично, рассмотрев интеграл на промежутке $(s'; s)$, получаем

$$f(s') - \varphi \leq \frac{\|f - f_n\|_{L^1}}{D^2(n)}.$$

Обозначим $d_i = (r'; s')$. Получаем

$$|f(t) - \varphi| \leq \frac{\|f - f_n\|_{L^1}}{D^2(n)} \quad \text{при } t \in d_i.$$

Пусть μ – мера Лебега–Стилтьеса, порожденная функцией f , а Λ – обычная мера Лебега на $[0; 1]$. Тогда $\mu(d_i) \leq 2\|f - f_n\|_{L^1}/D^2(n)$. С другой стороны, $|d_i| = |b_i|(1 - 2D(n))$.

Рассмотрим множество $A_n = \bigcup_i d_i$. Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda(A_n) &\geq (1 - D(n))(1 - 2D(n)) \geq 1 - 3D(n), \\ \mu(A_n) &\leq \frac{2\|f - f_n\|_{L^1}}{D^2(n)} \cdot N(n) = 2D(n). \end{aligned}$$

Наконец, рассмотрим множество

$$A = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n.$$

Из условия $\sum_n D(n) < \infty$ получаем $\Lambda(A) = 1$; с другой стороны, из $\mu(A_n) \rightarrow 0$ получаем $\mu(A) = 0$. Это доказывает сингулярность меры μ , т.е. сингулярность функции f .

Осталось рассмотреть случай $p \in (1; +\infty)$. Он сводится к рассмотренному случаю с помощью неравенства Гёльдера

$$\|f - f_n\|_{L^1} \leq \|f - f_n\|_{L^p} \cdot \|1\|_{L^q}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцией скачков f на $[0; 1]$ будем называть неубывающую функцию, которая для некоторого не более чем счетного набора точек $x_k \in (0; 1)$ и положительных чисел m_k представляется в виде

$$f(x) = f(0) + \sum_{k: x_k \leq x} m_k,$$

где ряд из всех m_k сходится.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть для некоторой последовательности чисел $N(n)$ существует последовательность функций $f_n \in \mathcal{D}_{N(n)}$ такая, что

$$\|f - f_n\|_{L^\infty} \cdot N(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда f – функция скачков.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A_n – объединение всех интервалов постоянства f_n (т.е. весь $(0; 1)$ кроме точек разрыва); μ – мера Лебега–Стилтьеса, порожденная функцией f . Тогда

$$\mu(A_n) \leq 2N(n) \cdot \|f - f_n\|_{L^\infty} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Пусть $A = \bigcap_n A_n$. Тогда $\mu(A) = \lim \mu(A_n) = 0$. С другой стороны, дополнение к A – это не более чем счетное множество. Следовательно, мера μ имеет не более чем счетный носитель, откуда f – функция скачков.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть f является сингулярной функцией. Тогда для любого $p \in [1; +\infty)$ найдется последовательность функций $f_N \in \mathcal{D}_N$ такая, что

$$\|f - f_N\|_{L^p} \cdot N \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Сначала докажем следующую лемму.

ЛЕММА 6. В условиях утверждения 5 для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечный набор непересекающихся полуинтервалов $I_k = (\alpha_k, \beta_k]$, $k = 1, \dots, m$, такой, что

- (1) на промежутках, дополняющих эти полуинтервалы до $(0; 1]$, f постоянна (таких промежутков может не оказаться);
- (2) выполнена оценка

$$\sum_{k=1}^m M_k < \varepsilon, \quad M_k = {}^{p+1}\sqrt{(\beta_k - \alpha_k)(f(\beta_k) - f(\alpha_k))^p},$$

причем $M_k > 0$ для всех k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Пусть μ – мера Лебега–Стилтьеса, порожденная функцией f . Она сингулярна, следовательно, существует счетный набор непересекающихся полуинтервалов $J_k = (\alpha_k, \beta_k]$, $k = 1, \dots$, такой, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |J_k| \leq \varepsilon, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \supset \text{supp } \mu.$$

Выберем среди них первые m полуинтервалов так, чтобы

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^m J_k\right) \geq \mu[0, 1] - \varepsilon.$$

Далее, среди всех полуинтервалов, дополняющих $\{J_k\}_{k=1}^m$ до $(0; 1]$, выберем те, на которых μ не равна нулю. Обозначим их через $J'_k = (\alpha'_k, \beta'_k]$, $k = 1, \dots, m'$. Введем

$$\begin{aligned} M_k &= {}^{p+1}\sqrt{(\alpha_k - \beta_k)(f(\alpha_k) - f(\beta_k))^p}, & k = 1, \dots, m, \\ M'_k &= {}^{p+1}\sqrt{(\alpha'_k - \beta'_k)(f(\alpha'_k) - f(\beta'_k))^p}, & k = 1, \dots, m'. \end{aligned}$$

Используя неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m M_k &\leq {}^{p+1}\sqrt{\sum_{k=1}^m (\alpha_k - \beta_k)} \cdot {}^{\frac{p+1}{p}}\sqrt{\sum_{k=1}^m (f(\alpha_k) - f(\beta_k))} \leq {}^{p+1}\sqrt{\varepsilon} \cdot {}^{\frac{p+1}{p}}\sqrt{\mu[0; 1]}, \\ \sum_{k=1}^{m'} M'_k &\leq {}^{p+1}\sqrt{\sum_{k=1}^{m'} (\alpha'_k - \beta'_k)} \cdot {}^{\frac{p+1}{p}}\sqrt{\sum_{k=1}^{m'} (f(\alpha'_k) - f(\beta'_k))} \leq 1 \cdot {}^{\frac{p+1}{p}}\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Следовательно, в качестве набора I_k можно взять $\{J_k\} \cup \{J'_k\}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^m M_k + \sum_{k=1}^{m'} M'_k \leq {}^{p+1}\sqrt{\varepsilon} {}^{\frac{p+1}{p}}\sqrt{\mu[0; 1]} + {}^{\frac{p+1}{p}}\sqrt{\varepsilon},$$

что в силу произвольности ε дает требуемое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ. Для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмем I_k и M_k , $k = 1, \dots, m$, определенные в лемме 6. Обозначим

$$S = \sum_{k=1}^m M_k < \varepsilon.$$

Построим функцию f_N , которая принимает не более N различных значений. Выберем N , исходя из следующих условий:

$$N = N' + 1, \quad N' \geq \frac{S}{\min_k M_k}.$$

Заметим, что эти условия выполнены для всех достаточно больших N .

Сначала выберем множество из N значений, которые будет принимать f_N , а потом зададим функцию f_N в каждой точке одним из этих значений. Положим $m + 1$ значений равными $f(0), f(\beta_1), \dots, f(\beta_m)$. Отметим, что эти значения совпадают соответственно с $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \dots, f(1)$. Остальные $N' - m$ значений сопоставим промежуткам I_k так, чтобы I_k соответствовало $N_k - 1$ значений, где

$$N_k \geq \left\lceil \frac{M_k \cdot N'}{S} \right\rceil \geq 1.$$

В частности, $2N_k \geq M_k \cdot N'/S$.

Распределим $N_k - 1$ значений, соответствующих промежутку I_k , равномерно на отрезке $[f(\alpha_k); f(\beta_k)]$ так, чтобы эти значения образовывали арифметическую прогрессию вместе с концами отрезка (т.е. этот отрезок будет разбит на N_k равных частей).

Выбрав возможные значения функции f_N , зададим саму функцию. Для каждой точки x выберем значение $f_N(x)$, ближайшее к $f(x)$ (меньшее из двух в случае неоднозначности). Из монотонности f будет следовать монотонность так определенной f_N . При этом

$$|f(x) - f_N(x)| \leq \frac{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}{2N_k}, \quad x \in I_k,$$

и $f(x) = f_N(x)$ при $x \notin \bigcup_k I_k$. Далее, оценим $\|f - f_N\|_{L^p}$:

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|_{L^p}^p &\leq \sum_{k=1}^m (\beta_k - \alpha_k) \left(\frac{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}{2N_k} \right)^p \\ &\leq \frac{S^p}{N'^p} \cdot \sum_{k=1}^m \frac{(\beta_k - \alpha_k)(f(\beta_k) - f(\alpha_k))^p}{M_k^p} = \frac{2^p S^p}{N^p} \cdot \sum_{k=1}^m M_k = \frac{2^p S^{p+1}}{N^p}. \end{aligned}$$

Получаем

$$\|f - f_N\|_{L^p} \cdot N \leq 2S^{(p+1)/p} \leq 2\varepsilon^{(p+1)/p}.$$

Заметим, что для произвольного ε мы можем строить f_N для любого достаточно большого N . Пользуясь этим, мы можем построить последовательность f_N , для которой $\|f - f_N\|_{L^p} \cdot N \rightarrow 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Пусть f является функцией скачков. Тогда найдется последовательность функций $f_N \in \mathcal{D}_N$ такая, что

$$\|f - f_N\|_{L^\infty} \cdot N \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Пользуясь тем, что f — функция скачков, выберем такой конечный набор точек $\alpha_k \in (0; 1)$, что

$$\mu([0; 1] \setminus \{\alpha_k\}_k) < \varepsilon,$$

где μ — мера Лебега–Стилтьеса, порожденная функцией f .

Среди интервалов $(\alpha_k; \beta_k)$, образованных разбиением $(0; 1)$ точками α_k , обозначим I_k , $k = 1, \dots, m$, такие, что $M_k = f(\beta_k - 0) - f(\alpha_k) > 0$; остальные интервалы обозначим J_k , $k = 1, \dots, n$. (Таким образом, на интервалах J_k функция f постоянна, а на I_k — нет.) При этом $S = \sum_k M_k < \varepsilon$.

Построим функцию f_N , которая принимает не более N различных значений. Выберем N исходя из следующих условий:

$$N = N' + n \quad N' \geq \frac{S}{\min_k M_k} \quad N' \geq n.$$

При этом $N' \geq N/2$. Заметим, что эти условия выполнены для всех достаточно больших N .

Далее, n из значений f_N сделаем равными $f(J_k)$, $k = 1, \dots, n$. Остальные N' сопоставим промежуткам I_k так, чтобы I_k соответствовало N_k значений, где

$$N_k \geq \left\lceil \frac{M_k \cdot N'}{S} \right\rceil \geq 1.$$

В частности, $2N_k \geq M_k \cdot N'/S$.

Распределим N_k значений, соответствующих интервалу $I_k = (\alpha_k; \beta_k)$, равномерно на отрезке $[f(\alpha_k); f(\beta_k - 0)]$ так, чтобы каждая точка этого отрезка находилась на расстоянии не более чем на $M_k/(2N_k)$ от одного из значений (таким образом, выбранные значения будут образовывать арифметическую прогрессию с разностью M_k/N_k).

Выбрав возможные значения функции f_N , зададим саму функцию. Для каждой точки x выберем значение $f_N(x)$, ближайшее к $f(x)$ (меньшее из двух в случае неоднозначности). Из монотонности f будет следовать монотонность так определенной f_N . При этом

$$|f(x) - f_N(x)| \leq \frac{M_k}{2N_k}, \quad x \in I_k,$$

$f(x) = f_N(x)$ при $x \in J_k$. Далее, оценим $\|f - f_N\|_{L^\infty}$:

$$\|f - f_N\|_{L^\infty} \leq \max_{k=1, \dots, m} \frac{M_k}{2N_k} \leq \max_{k=1, \dots, m} \frac{S}{N'} \leq \frac{2S}{N}.$$

Получаем

$$\|f - f_N\|_{L^\infty} \cdot N \leq 2S \leq 2\varepsilon.$$

Заметим, что для произвольного ε мы можем строить f_N для любого достаточно большого N . Пользуясь этим, мы можем построить последовательность f_N , для которой $\|f - f_N\|_{L^\infty} \cdot N \rightarrow 0$.

Предыдущие четыре утверждения можно суммировать в следующих теоремах.

ТЕОРЕМА 1. Пусть f – ограниченная неубывающая функция на $[0; 1]$. Следующие условия эквивалентны:

- (1) f сингулярна;
- (2) для некоторого $p \in [1; +\infty)$ и последовательности чисел $N(n)$ найдется последовательность функций $f_n \in \mathcal{D}_{N(n)}$ такая, что

$$\|f - f_n\|_{L^p} \cdot N(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty;$$

- (3) для любого $p \in [1; +\infty)$

$$C_N^p(f) \cdot N \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

$$\text{где } C_N^p(f) = \min_{g \in \mathcal{D}_N} \|f - g\|_{L^p}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть f – ограниченная неубывающая функция на $[0; 1]$. Следующие условия эквивалентны:

- (1) f – функция скачков;
- (2) для некоторой последовательности чисел $N(n)$ найдется последовательность функций $f_n \in \mathcal{D}_{N(n)}$ такая, что

$$\|f - f_n\|_{L^\infty} \cdot N(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty;$$

- (3) найдется последовательность $f_N \in \mathcal{D}_N$ такая, что

$$\|f - f_N\|_{L^\infty} \cdot N \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

4. Скорость приближения самоподобных функций. Пусть f – монотонная самоподобная функция $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$, т.е. f является неподвижной точкой сжимающего отображения G в $L^p[0, 1]$:

$$Gf(t) = \beta_k + d_k \cdot f\left(\frac{t - \alpha_k}{a_k}\right), \quad t \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}], \quad k = 1, \dots, n,$$

$$0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n+1} = 1,$$

$$0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_{n+1} = 1,$$

$$a_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k, \quad 0 \leq d_k \leq \beta_{k+1} - \beta_k, \quad d_k < 1.$$

Подробнее об общей конструкции самоподобных функций см. [2].

Будем рассматривать только самоподобные функции, для которых хотя бы два из коэффициентов d_k больше нуля. Заметим, что тогда из неравенства $d_k \leq \beta_{k+1} - \beta_k$ следует, что хотя бы одно $\beta_k \neq 0$. Такие самоподобные функции называются *самоподобными функциями положительного спектрального порядка* (см. [3]).

4.1. Существование и монотонность самоподобной функции. В [2] показано, что для сжимаемости G (и, следовательно, существования f) в L^p достаточно $\sum_k a_k d_k^p < 1$.

1. Действительно, для нашей конструкции получаем

$$\sum_k a_k d_k^p < \sum_k a_k = 1.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Функция f – ограниченная неубывающая почти всюду функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тем, что

$$\|G^n h - f\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \text{для любого } h \in L^p[0; 1].$$

Заметим, что если h – неубывающая функция со значениями в $[0, 1]$, то и Gh обладает тем же свойством. Если начать с $h(x) = x$, f можно представить как предел почти всюду неубывающих функций $G^n h$ со значениями в $[0, 1]$. Отсюда следует, что и функция f неубывающая почти всюду со значениями в $[0, 1]$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Самоподобная функция f не является кусочно-постоянной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда f принимает некоторое значение $C \in [0; 1]$ на множестве положительной меры. Среди всех k , для которых $d_k > 0$ (а таких хотя бы два), выберем такое, для которого $C \neq \beta_k + C d_k$. В силу самоподобия f принимает также значения $C_1 = \beta_k + C d_k$, $C_2 = \beta_k + C_1 d_k$, $\dots$, причем все эти значения различны. Следовательно, f принимает счетное число значений на множествах положительной меры. Противоречие.

4.2. Скорость приближения. Число $p \in [1; \infty)$ и монотонная самоподобная функция f далее полагаются фиксированными.

ТЕОРЕМА 3. Существуют константы m и M такие, что для любого $N \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$m \cdot N^{-\alpha} \leq C_N^p(f) \leq M \cdot N^{-\alpha},$$

где $\alpha \geq 1$ определяется однозначно из уравнения

$$\sum_{k=1}^n (a_k d_k^p)^{1/(1+\alpha p)} = 1. \quad (4.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Существование решения $\alpha \geq 1$ в уравнении (4.1) следует из неравенства Гёльдера

$$\sum_{k=1}^n (a_k d_k^p)^{1/(1+p)} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^{1/(1+p)} \cdot \left(\sum_{k=1}^n d_k \right)^{p/(1+p)} \leq 1 \cdot 1.$$

Доказательство теоремы разбивается на два утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. Существуют положительные константы R и C , при которых для любого $N \in \mathbb{N}$ найдется функция $f_N \in \mathcal{D}_N$ такая, что

$$\|f - f_N\|_{L^p}^p \leq C \cdot (N + R)^{-\alpha p}. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $r_k = (a_k d_k^p)^{1/(1+\alpha p)}$. Выберем R исходя из условий $R - n \geq r_k \cdot R$, $k = 1, \dots, n$. Например, $R = n/(1 - \max_k r_k)$.

Число N_0 выберем так, чтобы для каждого k при $d_k > 0$ было $r_k(N_0 - n) \geq 1$. Например, $N_0 = n + 1/(\min_k r_k)$, где минимум берется только по $d_k > 0$.

Подберем C так, чтобы (4.2) выполнялось для всех $N \leq N_0$. Для $N > N_0$ будем доказывать утверждение по индукции, предполагая, что для всех меньших N оно доказано.

Для данного N будем строить функцию индуктивно: N значений распределим между *сегментами самоподобия* $[\alpha_k; \alpha_{k+1}]$, $k = 1, \dots, n$, и в каждом сегменте разместим N_k значений оптимальным образом:

$$\|f - f_N\|_{L^p}^p = \sum_{k=1}^n (a_k d_k^p) \cdot \|f - f_{N_k}\|_{L^p}^p, \quad \sum_{k=1}^n N_k = N.$$

Для сегментов с $d_k = 0$, соответствующих горизонтальным участкам графика f , полагаем $N_k = 1$. На таком сегменте функция f постоянна, и построенная f_N будет совпадать с f , не давая никакого вклада в $\|f - f_N\|_{L^p}$. Будем считать, что всего сегментов с $d_k = 0$ ровно m . В дальнейшем доказательстве не учитываем такие сегменты (любой минимум или суммирование $\sum_k$ идет только по $d_k > 0$).

Оставшиеся $N - m$ значений распределим между $n - m$ сегментами (для которых $d_k > 0$) пропорционально r_k так, чтобы выполнялись условия $N_k + R \geq r_k(N + R)$. Для этого достаточно выбрать $N_k \geq [r_k(N - m)]$. Действительно, в этом случае

$$N_k + R \geq r_k N - r_k m + R \geq r_k N + R - n \geq r_k N + r_k R.$$

При этом $N_k \geq 1$, так как $r_k(N - m) \geq r_k(N - n) \geq 1$.

Считаем, что предположение индукции верно для всех N_k :

$$\|f - f_{N_k}\|_{L^p}^p \leq C \cdot (N_k + R)^{-\alpha p}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|_{L^p}^p &\leq C \cdot \sum_k (a_k d_k^p) (N_k + R)^{-\alpha p} \leq C \cdot (N + R)^{-\alpha p} \cdot \sum_k (a_k d_k^p) r_k^{-\alpha p} \\ &= C \cdot (N + R)^{-\alpha p} \cdot \sum_k (a_k d_k^p)^{1/(1+\alpha p)} = C \cdot (N + R)^{-\alpha p}. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. *Существует константа $C > 0$ такая, что для любой функции $f_N \in \mathcal{D}_N$ выполнено*

$$\|f - f_N\|_{L^p}^p \geq C \cdot N^{-\alpha p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Усилим утверждение: расширим класс f_N , а именно, разрешим функции f_N принимать помимо не более чем N различных значений из $(0; 1)$ произвольные значения вне этого интервала.

Заметим, что для каждого k , при котором $d_k > 0$, можно подобрать $C_k > 0$ такое, что если функция f_N не имеет значений в интервале $(\beta_k; \beta_k + d_k)$, то $\|f - f_N\|_{L^p}^p \geq C_k$. Действительно, в этом случае

$$\|f - f_N\|_{L^p}^p \geq \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |f(x) - f_N(x)|^p dx \geq a_k d_k^p \int_0^1 \min(|f(x)|, |1 - f(x)|) dx > 0.$$

Последнее выполнено, так как f не является кусочно-постоянной. Пусть $C = \min_k C_k$ (здесь и далее в доказательстве любой минимум или суммирование $\sum_k$ идет только по $d_k > 0$).

Будем доказывать неравенство индукцией по N : рассматривая f_N , будем считать утверждение доказанным для всех меньших N .

Рассмотрим два случая. Первый случай: f_N не имеет значений в одном из интервалов $(\beta_k; \beta_k + d_k)$, для которого $d_k > 0$. Тогда

$$\|f - f_N\|_{L^p}^p \geq C \geq C \cdot N^{-\alpha p}.$$

(Этот случай дает базу индукции.)

Второй случай: в каждом из интервалов $(\beta_k; \beta_k + d_k)$, для которых $d_k > 0$, присутствует хотя бы по одному значению функции f_N . Пусть на интервале $(\beta_k; \beta_k + d_k)$ находится N_k значений, $N_k = r_k N$, $\sum_k r_k \leq 1$. Тогда из предположения индукции ($0 < N_k < N$) получаем

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|_{L^p}^p &\geq \sum_k \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |f(x) - f_N(x)|^p dx \\ &\geq C \sum_k (a_k d_k^p) N_k^{-\alpha p} = C \cdot N^{-\alpha p} \sum_{k=1}^n (a_k d_k^p) r_k^{-\alpha p}. \end{aligned}$$

Осталось показать, что

$$\sum_{k=1}^n (a_k d_k^p) r_k^{-\alpha p} \geq 1.$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера и условием $\sum_{k=1}^n r_k \leq 1$:

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k d_k^p) r_k^{-\alpha p} \right)^{1/(1+\alpha p)} \left(\sum_{k=1}^n r_k \right)^{(\alpha p)/(1+\alpha p)} \geq \sum_{k=1}^n (a_k d_k^p)^{1/(1+\alpha p)} = 1.$$

ПРИМЕР 1. Найдем скорость приближения для обычной функции Кантора. Параметры самоподобия:

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = a_3 &= \frac{1}{3}, \\ d_1 &= \frac{1}{2}, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Получаем условие на α

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^p} \right)^{1/(1+\alpha p)} &= 1, \\ 1 + \alpha p &= \log_2(3 \cdot 2^p) = \log_2 3 + p, \quad \alpha = \frac{\log_2 3 - 1}{p} + 1. \end{aligned}$$

Таким образом, для некоторых констант m и M получаем

$$m \cdot N^{-(\log_2 3 - 1)/p - 1} \leq \|f - [f]_N^p\|_{L^p} \leq M \cdot N^{-(\log_2 3 - 1)/p - 1},$$

где f — функция Кантора.

5. Произвольная скорость приближения. Покажем, что для любой невозрастающей функции оценки $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ найдется монотонная ограниченная функция f такая, что $C_N^p(f) \cdot N \leq s(N)$, а также g такая, что $C_N^p(g) \cdot N \geq s(N)$.

Приведенная ниже конструкция функций является частным случаем использованных в [4; с. 313] *функций Лебега*.

Пусть дана последовательность чисел $\theta_0, \theta_1, \dots \in (0; 1]$.

Определим функцию $f_{(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)}: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ следующим образом:

$$f_{(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)}(x) = \begin{cases} \frac{f_{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)}(2x/\theta_0)}{2} & \text{при } x \in \left[0, \frac{\theta_0}{2}\right), \\ \frac{1}{2} & \text{при } x \in \left[\frac{\theta_0}{2}, 1 - \frac{\theta_0}{2}\right], \\ 1 - \frac{f_{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)}(2(1-x)/\theta_0)}{2} & \text{при } x \in \left(1 - \frac{\theta_0}{2}, 1\right], \end{cases}$$

и

$$f_{\emptyset}(x) = x.$$

Определим функцию $f_{(\theta_0, \theta_1, \dots)}: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ следующим образом:

$$f_{(\theta_0, \theta_1, \dots)}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)}(x).$$

Такая функция монотонна и непрерывна на $[0; 1]$.

Существование предела, непрерывность и монотонность следует из фундаментальности последовательности в $C[0; 1]$. Действительно, для соседних элементов последовательности получаем

$$\begin{aligned} \|f_{(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)} - f_{(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k-1})}\|_C &\leq \frac{1}{2} \cdot \|f_{(\theta_1, \dots, \theta_k)} - f_{(\theta_1, \dots, \theta_{k-1})}\|_C \leq \dots \\ &\leq \frac{1}{2^k} \cdot \|f_{(\theta_k)} - f_{\emptyset}\|_C \leq \frac{1}{2^k}. \end{aligned}$$

Отсюда следует фундаментальность для $N < k < m$:

$$\begin{aligned} &\|f_{(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)} - f_{(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m)}\|_C \\ &\leq \|f_{(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)} - f_{(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k+1})}\|_C + \dots + \|f_{(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{m-1})} - f_{(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m)}\|_C \\ &< \frac{1}{2^{k-1}} \leq \frac{1}{2^{N-1}}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2. Функция $f_{(1, 1, \dots, 1, \dots)}(x) = f_{\emptyset}(x) = x$.

ПРИМЕР 3. Функция $f_{(2/3, 1, 1, \dots, 1, \dots)}(x) = f_{(2/3)}(x)$. График изображен на рис. 1.

ПРИМЕР 4. Функция $f_{(2/3, 2/3, \dots, 2/3, \dots)}(x)$ – обычная функция Кантора.

ЛЕММА 12. Пусть $f_N \in \mathcal{D}_N$. Тогда

$$\|f_{\emptyset} - f_N\|_{L^p}^p \geq 2^{-2p} \cdot N^{-p}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Рис. 1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала разберем случай $N = 1$. По сути нам нужно доказать, что для любой константы c выполнена оценка

$$\int_{[0,1]} |x - c|^p dx \geq 2^{-2p}.$$

Действительно

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} |x - c|^p dx &= \frac{1}{2} \cdot \int_{[0,1]} (|x - c|^p + |x - (1 - c)|^p) dx \\ &\geq \int_{[0,1]} \left| x - \frac{1}{2} \right|^p dx = \frac{1}{2^p(p+1)} \geq 2^{-2p}. \end{aligned}$$

Пусть $\{\Delta_k\}$ – интервалы постоянства f_N , их не более N . Тогда

$$\int_{\Delta_k} |x - f_N(x)|^p dx \geq |\Delta_k|^{p+1} \cdot 2^{-2p}.$$

Доказательство аналогично случаю $N = 1$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} |x - f_N(x)|^p dx &= \sum_k \int_{\Delta_k} |x - f_N(x)|^p dx \geq 2^{-2p} \sum_k |\Delta_k|^{p+1} \\ &\geq 2^{-2p} \cdot N \cdot N^{-p-1} \geq 2^{-2p} \cdot N^{-p}. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. Пусть $f_N \in \mathcal{D}_N$. Тогда

$$\|f(\theta_0, \theta_1, \dots) - f_N\|_{L^p}^p \geq r(N), \quad N \in \mathbb{N},$$

где

$$\begin{aligned} r(2^r) &= 2^{-2p} \cdot \prod_{l=0}^r \frac{\theta_l}{2^p}, \quad r = 0, 1, \dots, \\ r(N) &= 2^{-2p} \cdot \prod_{l=0}^r \frac{\theta_l}{2^p} \left(\alpha + \beta \frac{\theta_{r+1}}{2^p} \right), \quad N = \alpha \cdot 2^r + \beta \cdot 2^{r+1}, \quad \alpha + \beta = 1, \quad \alpha, \beta > 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что доказываемая оценка выпукла вниз по N .

Усилим утверждение: будем считать, что функция f_N может принимать не более N различных значений из $(0; 1)$, но также может принимать любые значения вне этого интервала.

Докажем утверждение сначала для функций $f_{(\theta_0, \dots, \theta_k)} = f_{(\theta_0, \dots, \theta_k, 1, 1, \dots)}$.

Будем доказывать индукцией по k . Для функции $f_\emptyset$ утверждение верно, так как это ослабление предыдущей леммы.

Пусть утверждение верно для функции $f_\circ = f_{(\theta_1, \dots, \theta_k)}$ и $r_\circ(N)$ – соответствующая функция оценки. Докажем лемму для функции $f = f_{(\theta_0, \dots, \theta_k)}$.

При $N = 1$ получаем для некоторого $c \in (0; 1)$:

$$\begin{aligned} \|f - f_1\|_{L^p}^p &\geq \int_0^1 \min(|f(x)|^p, |1 - f(x)|^p, |f(x) - c|^p) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \min(|f(x)|^p, |1 - f(x)|^p, |f(x) - c|^p) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \min(|f(x)|^p, |1 - f(x)|^p, |f(x) - (1 - c)|^p) dx \\ &\geq \int_0^1 \min(|f(x)|^p, |1 - f(x)|^p, |f(x) - 1/2|^p) dx \\ &= 2^{-p} \cdot \theta_0 \cdot \int_0^1 \min(|f_\circ(x)|^p, |1 - f_\circ(x)|^p) dx \\ &\geq 2^{-2p} \cdot \theta_0 \cdot \theta_1 \cdot \int_0^1 |f_{(\theta_2, \dots, \theta_k)}(x)|^p dx + 2^{-p} \cdot \theta_0 \cdot (1 - \theta_1) \cdot 2^{-p} \\ &\geq 2^{-2p} \cdot \theta_0 \cdot \theta_1 \cdot 2^{-p} + 2^{-p} \cdot \theta_0 \cdot (1 - \theta_1) \cdot 2^{-p} \geq 2^{-3p} \cdot \theta_0 = r(1). \end{aligned}$$

Для $N > 1$ рассмотрим два случая. Первый случай: функция f_N не принимает значений из интервала $(0; 1/2)$ (или из интервала $(1/2; 1)$ – этот случай симметричен). Получаем

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|_{L^p}^p &\geq \int_0^{\theta_0/2} |f(x) - f_N(x)|^p dx \\ &\geq 2^{-p-1} \cdot \theta_0 \cdot \int_0^1 \min(|f_\circ(x)|^p, |1 - f_\circ(x)|^p) dx \geq 2^{-3p-1} \cdot \theta_0 \geq r(2) \geq r(N). \end{aligned}$$

Второй случай: функция f_N принимает $N_1 > 0$ значений из интервала $(0; 1/2)$ и $N_2 > 0$ значений из интервала $(1/2; 1)$. Получаем

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|_{L^p}^p &\geq 2^{-p} \cdot \theta_0 \cdot \frac{\|f_\circ - f_{\circ N_1}\|_{L^p}^p + \|f_\circ - f_{\circ N_2}\|_{L^p}^p}{2} \geq 2^{-p} \cdot \theta_0 \cdot \frac{r_\circ(N_1) + r_\circ(N_2)}{2} \\ &\geq 2^{-p} \cdot \theta_0 \cdot r_\circ\left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right) \geq 2^{-p} \cdot \theta_0 \cdot r_\circ\left(\frac{N}{2}\right) = r(N). \end{aligned}$$

Последние три перехода следуют из выпуклости $r_\circ$, монотонности $r_\circ$ и $N_1 + N_2 \leq N$, а также определения $r_\circ$ и r .

Осталось заметить, что утверждение леммы для функций $f_{(\theta_0, \theta_1, \dots)}$ следует из уже доказанного для $f_{(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)}$ предельным переходом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. Пусть $f = f_{(\theta_0, \theta_1, \dots)}$. Тогда для каждого $N \in \mathbb{N}$ найдется функция $f_N \in \mathcal{D}_n$ такая, что

$$\|f - f_N\|_{L^p}^p \leq R(N),$$

где

$$R(2^r - 1) = \prod_{l=0}^{r-1} \frac{\theta_l}{2^p}, \quad r \in \mathbb{N},$$

$$R(N) = R(2^r - 1), \quad 2^r - 1 < N < 2^{r+1} - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно привести пример кусочно-постоянных функций f_N для $N = 2^r - 1$ таких, что $\|f - f_N\|_{L^p}^p \leq R(N)$.

В качестве $2^r - 1$ значений возьмем числа $t/2^r$, $t = 1, 2, \dots, 2^r - 1$. Для каждой точки x выберем значение $f_N(x)$, ближайшее к $f(x)$ (меньшее из двух в случае неоднозначности). Тогда $|f - f_N| < 2^{-r}$, причем $f \neq f_N$ только на отрезках суммарной длины $\prod_{l=0}^{r-1} \theta_l$. Отсюда сразу следует искомая оценка.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $p \in [0, +\infty)$ и $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ — невозрастающая функция (функция оценки). Тогда существует функция f такая, что

$$\frac{s(8N)}{32} \leq C_N^p(f) \cdot N \leq s(N), \quad C_N^p(f) = \min_{g \in \mathcal{D}_N} \|f - g\|_{L^p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем без ограничения общности $s(1) = 1$. В остальных случаях можно построить $f_\circ$ для функции оценки $s_\circ(n) = s(n)/s(1)$, а потом взять $f(x) = s(1) \cdot f_\circ(x)$.

Достаточно положить

$$\theta_0 = \frac{s^p(2)}{2^p}, \quad \theta_1 = \frac{s^p(6)}{s^p(2)}, \quad \theta_k = \frac{s^p(2^{k+2} - 2)}{s^p(2^{k+1} - 2)}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

и взять $f = f_{(\theta_0, \theta_1, \dots)}$. Пусть $2^r - 1 \leq N \leq 2^{r+1} - 2$. Получаем оценку сверху

$$\|f - f_N\|_{L^p}^p \cdot N^p \leq N^p \cdot \prod_{l=0}^{r-1} \frac{\theta_l}{2^p} \leq 2^{rp+p} \cdot 2^{-rp-p} \cdot s^p(2^{r+1} - 2) \leq s^p(N).$$

Пусть $2^r \leq N \leq 2^{r+1} - 1$. Получаем оценку снизу

$$\|f - f_N\|_{L^p}^p \cdot N^p \geq N^p \cdot 2^{-2p} \prod_{l=0}^{r+1} \frac{\theta_l}{2^p} \geq 2^{rp} \cdot 2^{-2p} \cdot 2^{-rp-3p} \cdot s^p(2^{r+3} - 2) \geq \frac{s^p(2^3 N)}{2^{-5p}}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, “О задаче Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа”, *Функц. анализ и его прил.* (в печати); [arXiv:math.SP/1102.4199](https://arxiv.org/abs/math.SP/1102.4199).
- [2] И. А. Шейпак, “О конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах $L_p[0, 1]$ ”, *Матем. заметки*, **81:6** (2007), 924–938.
- [3] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, “Самоподобные функции в пространстве $L_2[0, 1]$ и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным индефинитным весом”, *Матем. сб.*, **197:11** (2006), 13–30.
- [4] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Т. 1, Мир, М., 1965.

Ю. В. Тихонов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: july.tikh@gmail.com

Поступило

14.04.2013