Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Кожанов, Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 1, 70–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1029>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:06:29

УДК 517.946

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА С НЕЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ

А. И. Кожанов

Для обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником

$$u_t - \Delta \psi(u) - \Delta u_t + q(u) = 0$$

доказывается принцип сравнения для решений первой начально-краевой задачи. С помощью принципа сравнения в случае степенных функций $\psi(\xi)$ и $q(\xi)$ доказываются новые теоремы существования и несуществования решений первой начально-краевой задачи.

Библиография: 9 названий.

Обобщенное уравнение Буссинеска как математический объект и как объект математического моделирования фильтрационных процессов исследовалось в работах [1]–[3] и др. В настоящей работе будет изучаться обобщенное уравнение Буссинеска с нелинейным неподчиненным немонотонным источником, а именно, уравнение

$$u_t - \Delta \psi(u) - \Delta u_t + q(u) = 0. \quad (1)$$

Основным инструментом исследования при этом будет доказанный ниже принцип сравнения. Идеи, связанные с принципом сравнения, для уравнений вида (1) использовались ранее в работах [2], [4]–[6]. В работе [2] рассматривался случай $q(\xi) \equiv 0$; для первой начально-краевой задачи были построены ограниченные на любом конечном промежутке изменения переменной t (но, возможно, растущие при $t \rightarrow \infty$) верхние решения и, тем самым, было доказано существование регулярных решений поставленной задачи в цилиндре конечной высоты с ограниченной областью в основании. В работе [4], принадлежащей автору, рассматривались более общие, чем (1), уравнения, однако, принцип сравнения использовался лишь для доказательства неотрицательности решений, в остальном же для доказательства существования регулярных решений первой начально-краевой задачи (также в цилиндре конечной высоты и с ограниченным основанием) использовались идеи, связанные с интегральными априорными оценками, теоремами вложения и условиями подчинения. В работах [5], [6], также принадлежащих автору, рассматривался случай $\psi(\xi) \equiv \xi$, $q(\xi) \sim \xi^p$, $p > 1$, и были построены убывающие при

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01597.

$t \rightarrow \infty$ верхние решения и неограниченные на конечном промежутке изменения переменной нижние решения; с помощью построенных верхних и нижних решений были доказаны теоремы существования и несуществования глобальных решений задачи Коши и начально-краевых задач.

Именно к методике работ [5], [6] и будет близка методика, применяемая в настоящей работе.

Перейдем к содержательной части работы. Пусть x есть точка ограниченной области D пространства $\mathbb{R}^n$, $\Gamma = \partial D$, $Q = D \times (0, T)$. В цилиндре Q рассмотрим следующую начально-краевую задачу: найти решение уравнения (1) в Q , удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in D, \quad u|_{\Gamma \times (0, T)} = \mu_0(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0, T). \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 1 (принцип сравнения). Пусть $u(x, t)$ есть регулярное решение краевой задачи (1), (2), $v(x, t)$ есть решение неравенства

$$v_t - \Delta \psi(v) - \Delta v_t + q(v) > 0 \quad (< 0)$$

в цилиндре Q , удовлетворяющее условиям

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in D, \quad v|_{\Gamma \times (0, T)} = \mu_1(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0, T).$$

Если функция $\lambda(\xi) = q(\xi) - \psi(\xi)$ есть убывающая по ξ при $\xi \in \mathbb{R}$ функция и если при $x \in \overline{D}$ выполняется неравенство $v_0(x) > u_0(x)$ (соответственно $v_0(x) < u_0(x)$), а при $x \in \Gamma$, $t \geq 0$ выполняются неравенства

$$\mu_{1t}(x, t) + \psi(\mu_1(x, t)) > \mu_{0t}(x, t) + \psi(\mu_0(x, t)), \quad \mu_1(x, t) > \mu_0(x, t)$$

(соответственно

$$\mu_{1t}(x, t) + \psi(\mu_1(x, t)) < \mu_{0t}(x, t) + \psi(\mu_0(x, t)), \quad \mu_1(x, t) < \mu_0(x, t),$$

то для $x \in \overline{D}$ и $t \geq 0$ справедливо неравенство $v(x, t) > u(x, t)$ (соответственно $v(x, t) < u(x, t)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнена первая из указанных в условии теоремы группа неравенств. Воспользуемся идеей доказательства принципа неотрицательности решения работы [4].

Пусть неравенство $v(x, t) > u(x, t)$ всюду в цилиндре Q не выполняется, и пусть число t_0 такое, что $t_0 > 0$; при $t \in (0, t_0)$, $x \in D$ выполняется неравенство $v(x, t) > u(x, t)$ и найдется точка $x_0 \in D$ такая, что выполняется $v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0)$. Обозначим $w = v_t - u_t + \psi(v) - \psi(u)$. Для функции w при $x \in D$, $t \in [0, t_0]$ справедливы неравенства

$$\Delta w - w < (q(v) - \psi(v)) - (q(u) - \psi(u)) \leq 0.$$

Кроме того, условия теоремы означают, что при $x \in \Gamma$ и любом фиксированном $t \in [0, t_0]$ справедливо неравенство $w(x, t) > 0$. Вследствие принципа максимума для эллиптических уравнений имеем, что последнее неравенство будет выполняться при $x \in \overline{D}$ и всех $t \in [0, t_0]$. В частности, в точке (x_0, t_0) будет выполняться неравенство $v_t(x_0, t_0) - u_t(x_0, t_0) > 0$. Но тогда найдется число t^* такое, что $0 \leq t^* < t_0$ и при $t \in (t^*, t_0]$ будет

справедливо неравенство $v_t(x_0, t) - u_t(x_0, t_t) > 0$. Интегрируя последнее неравенство, получаем

$$v(x_0, t_0) - u(x_0, t_0) > v(x_0, t) - u(x_0, t) > 0,$$

что противоречит предположению о совпадении $v(x_0, t_0)$ и $u(x_0, t_0)$.

Полученное противоречие опровергает предположение о невыполнении неравенства $v(x, t) > u(x, t)$ всюду в Q .

Аналогично анализируется случай, когда выполняется вторая группа неравенств.

Теорема доказана.

В соответствии с [7] функция $v(x, t)$, удовлетворяющая первым неравенствам из условия теоремы, называется *верхним решением* задачи (1), (2), функция $v(x, t)$, удовлетворяющая вторым неравенствам, – *нижним*. Как известно, для доказательства существования или несуществования глобальных решений задачи (1), (2) необходимо построить подходящие верхние и нижние решения.

Заметим, что условие на функцию $\lambda(\xi)$ можно ослабить.

Пусть $v_+(x, t)$, $v_-(x, t)$ есть соответствующие верхнее и нижнее решения. Обозначим

$$a = \inf_{x \in \overline{D}, t \geq 0} v_-(x, t), \quad b = \sup_{x \in \overline{D}, t \geq 0} v_+(x, t).$$

Имеет место

СЛЕДСТВИЕ. Пусть a и b – конечные числа, функция $\lambda(\xi)$ является убывающей функцией на $[a, b]$ и допускает непрерывное продолжение на всю числовую ось с сохранением убывания. Тогда если выполнены условия теоремы 1, то регулярное решение задачи (1), (2) будет удовлетворять неравенствам $v_-(x, t) < u(x, t) < v_+(x, t)$ для всех $x \in \overline{D}$ и всех $t \geq 0$.

Доказательство следствия очевидно.

Ниже в работе будем в основном изучать случай степенных функций $\xi(\psi)$ и $q(\xi)$, поскольку именно такие функции часто встречаются при моделировании реальных физических процессов [1], [2], [7].

Поскольку область D ограничена, ее можно заключить в некоторый шар с центром в начале координат; пусть R есть радиус минимального из таких шаров.

ТЕОРЕМА 2. Пусть в уравнении (1) выполняется

$$\psi(\xi) \equiv \xi^m, \quad q(\xi) \equiv -\beta \xi^p, \quad p \geq m \geq 2, \quad \beta \geq 0,$$

и пусть $\mu_0(x, t) \equiv 0$, функция $u_0(x)$ неотрицательна, принадлежит классу $C^2(\overline{D})$ и удовлетворяет условию согласования, а граница области D принадлежит классу $C^{2+\kappa}$, $\kappa > 0$. Тогда если положительные постоянные A, T_0, α и β таковы, что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} (m-1)\alpha^{m-1}A^{m-1} &> 1, \quad u_0(x) < AT_0^{-1/(m-1)}(\alpha + |x|^2), \\ \frac{2n}{m-1} + 4m(m-1)\alpha^{m-1}A^{m-1} &> \frac{R_0}{m-1} + 4m(m-1)A^{m-1}R_0^{m-1} \\ &\quad + 2mnA^{m-1}R_0^{m-1} + \beta A^{p-1}R_0^p, \end{aligned}$$

где $R_0 = \alpha + R$, то задача (1), (2) будет иметь регулярное решение, и это решение будет удовлетворять неравенствам

$$0 \leq u(x, t) \leq R_0 A (T_0 + t)^{-1/(m-1)}$$

для всех $t \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия теоремы таковы, что функция

$$v(x, t) = A(T_0 + t)^{-1/(m-1)}(\alpha + |x|^2)$$

удовлетворяет неравенствам

$$v_t + v^m > 0, \quad v_t - \Delta v^m - \Delta v_t - \beta v^p > 0.$$

Следовательно, согласно условиям, связывающим функцию $v(x, t)$, начальную функцию $u_0(x)$ и граничную функцию $\mu_0(x, t)$, и теореме 1 регулярное решение задачи (1), (2) будет ограничено сверху функцией $v(x, t)$. Кроме того, решение задачи (1), (2) будет неотрицательным [2], [4]. Применяя теперь метод срезов [8], [9], нетрудно стандартным образом доказать существование регулярного решения задачи (1), (2); как уже было сказано выше, данное решение будет удовлетворять требуемым неравенствам.

Теорема доказана.

Заметим, что завершение доказательства теоремы 2 можно было бы провести и методом работы [2]. Как уже говорилось выше, случай $m = 2, \beta = 0$ (т.е. случай собственно обобщенного уравнения Буссинеска) рассмотрен в работе [2], в которой доказано существование возможно растущего при $t \rightarrow +\infty$ решения первой начально-краевой задачи; теорема 2 говорит о существовании убывающего степенным образом при $t \rightarrow +\infty$ решения. И еще заметим, что случай $m = 1$ рассмотрен автором в работах [5], [6].

ТЕОРЕМА 3. Пусть в уравнении (1) выполняется

$$\psi(\xi) \equiv \xi^m, \quad q(\xi) \equiv \beta \xi^p, \quad p \geq m \geq 2, \quad \beta > 0,$$

и пусть p и m – натуральные числа, $\mu_0(x, t) \equiv 0$, функция $u_0(x)$ неотрицательна, принадлежит классу $C^2(\overline{D})$ и удовлетворяет условию согласования, а граница области D принадлежит классу $C^{2+\kappa}$, $\kappa > 0$. Тогда если для положительных постоянных A, T_0, α и β выполняются неравенства из условия теоремы 1 и если дополнительно выполняется

$$AT_0^{-1/(m-1)}(\alpha + R^2) < \left(\frac{m}{p\beta}\right)^{1/(p-m)}$$

при $p > m, \beta < 1$ при $p = m$, то задача (1), (2) будет иметь регулярное решение, и это решение будет удовлетворять неравенствам

$$0 \leq u(x, t) \leq R_0 A (T_0 + t)^{-1/(m-1)}$$

для всех $t \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $p > m$. Заметим, что функция $q(\xi) - \psi(\xi)$ убывает на интервале $(0, (m/(p\beta))^{1/(p-m)})$. Пусть $\tilde{\psi}(\xi)$ и $\tilde{q}(\xi)$ – функции, совпадающие соответственно с $\psi(\xi)$ и $q(\xi)$ при $\xi \in [0, (m/(p\beta))^{1/(p-m)}]$ и такие, что

$$\tilde{\psi}(\xi) = \begin{cases} \xi^m & \text{при } \xi < 0, \text{ если } m \text{ нечетно,} \\ -\xi^m & \text{при } \xi < 0, \text{ если } m \text{ четно,} \end{cases} \quad \tilde{q}(\xi) \equiv 0 \quad \text{при } \xi < 0,$$

$\tilde{\psi}(\xi) \in C^2(\mathbb{R})$, $\tilde{q}(\xi) \in C(\mathbb{R})$, $\tilde{q}(\xi) - \tilde{\psi}(\xi)$ есть убывающая функция при $\xi > (m/(p\beta))^{1/(p-m)}$.

Нетрудно проверить, что функция $v_-(x, t) = -\varepsilon \exp(t)$, $\varepsilon > 0$, является нижним решением для уравнения

$$u_t - \Delta \tilde{\psi}(u) - \Delta u_t + \tilde{q}(u) = 0 \quad (3)$$

при выполнении начальных и краевых условий (2) с $\mu_0(x, t) \equiv 0$. В силу условий теоремы функция $v_+(x, t) = A(T_0 + t)^{-1/(m-1)}(\alpha + |x|^2)$ будет верхним решением для того же уравнения при тех же начальных и краевых условиях. Согласно теореме 1 решение уравнения (3) будет удовлетворять неравенствам

$$-\varepsilon e^t < u(x, t) < A(T_0 + t)^{-1/(m-1)}(\alpha + |x|^2).$$

Поскольку ε есть число произвольное, отсюда следует, что решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям (2) с $\mu_0(x, t) \equiv 0$, будет неотрицательным. Но тогда такое решение будет решением уравнения (1).

Применяя теперь вновь метод срезов или метод работы [2], нетрудно завершить доказательство теоремы в случае $p > m$.

Случай $p = m$ анализируется в целом аналогично, но более просто, поскольку при $\beta < 1$ функция $\lambda(\xi) = (\beta - 1)\xi^m$ будет убывающей при $\xi > 0$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть область D есть шар $D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$, $\psi(\xi)$ и $q(\xi)$ имеют тот же вид, что и в теореме 2, но с дополнительным условием $p > m$. Тогда если граничная функция $\mu_0(x, t)$ и начальная функция $u_0(x)$ задачи (1), (2) есть гладкие функции такие, что для положительных постоянных A, T_0 и γ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \mu_{0t} + \mu_0^m|_{|x|=R} &> -A\lambda(\gamma R^2)^{\lambda-1} + A^m(\gamma R^2)^{\lambda m}, \\ \mu_0|_{|x|=R} &> A(\gamma R^2)^{\lambda}, \quad u_0(x) > A(T_0 + \gamma|x|^2)^{\lambda}, \\ (T_0 + \gamma R^2)^{\lambda_1} + 2A^{m-1}\gamma m(n-2m) + 4A^{m-1}\gamma m^2\lambda &\leq 0, \\ 2\gamma\lambda(\lambda-1)(T_0 + \gamma R^2)^{\lambda_1} + 4T_0A^{m-1}\gamma\lambda m(\lambda m-1) &< A^{p-1}, \end{aligned}$$

где $\lambda = -2/(p-m)$, $\lambda_1 = 2(m-1)/(p-m)$, то гладкое решение задачи (1), (2) будет таким, что $u(0, t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow T_0 - 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $v(x, t) = A(T_0 - t + \gamma|x|^2)$ в цилиндре $Q_{T_0} = D \times (0, T_0)$ выполнены все условия теоремы 1, необходимые для того, чтобы $v(x, t)$ была нижним решением задачи (1), (2). Тогда для гладкого решения задачи (1), (2), если оно существует, обязано выполняться неравенство $u(x, t) > v(x, t)$ при $x \in D, t \in (0, T_0)$. Отсюда и получаем требуемое утверждение.

Теорема доказана.

Теорема 4 означает, что ограниченная при $t \in [0, T_0]$, хотя и растущая, граничная функция $\mu_0(x, t)$ может индуцировать “режим с обострением” (другими словами, особенность приносится сверху).

В завершение работы приведем один общий результат о несуществовании глобальных решений.

Пусть z_1 – первое собственное число однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа в области D , $w_1(x)$ – первая собственная функция. Обозначим $Q(\xi) = z_1\psi(\xi) - q(\xi)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть начальная функция $u_0(x)$ такова, что

$$\int_D u_0(x) w_1(x) dx \geq \xi_0 > 0,$$

и пусть при $\xi \geq \xi_0$ выполняется $Q(\xi) > 0$, $Q''(\xi) \geq 0$. Кроме того, пусть выполняется

$$\int_{\xi_0}^{\infty} \frac{d\xi}{Q(\xi)} < +\infty.$$

Тогда для любого неотрицательного регулярного решения (1), (2) будет выполняться

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow T^* - 0} \sup_{x \in \bar{D}} u(x, t) = +\infty$$

для некоторого конечного числа T^* .

Доказательство теоремы 5 проводится полностью аналогично доказательству такого же утверждения для параболических уравнений с нелинейным источником (см. [7]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дзеккер Е. С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202. № 5. С. 1031–1033.
- [2] Фураев В. З. О разрешимости в целом первой краевой задачи для обобщенного уравнения Буссинеска // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 11. С. 2014–2015.
- [3] Гладков А. Л. Задача Коши в классах растущих функций для некоторых нелинейных псевдопараболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 2. С. 277–288.
- [4] Кожанов А. И. Положительность решений нелинейных псевдопараболических уравнений // Дифференциальные уравнения с частными производными. Сб. научн. тр. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1989. С. 79–92.
- [5] Кожанов А. И. Теоремы сравнения и разрешимость краевых задач для некоторых классов эволюционных уравнений типа псевдопараболических и псевдогиперболических. Препринт № 17. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1990.
- [6] Кожанов А. И. Параболические уравнения с нелинейным нелокальным источником // Сиб. матем. ж. 1994. Т. 35. № 5. С. 1062–1073.
- [7] Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
- [8] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
- [9] Кожанов А. И., Ларькин Н. А., Яненко Н. Н. Смешанная задача для некоторых классов уравнений третьего порядка. Препринт. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1980.

Институт математики СО РАН, г. Новосибирск

Поступило
17.09.97