Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Имбеси, Целостность симметрических алгебр идеалов графов, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 2, 190–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10290>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:28:27

Целостность симметрических алгебр идеалов графов

М. Имбеси

Рассматриваются идеалы, ассоциированные с некоторыми классами простых графов. Исследуется проективная размерность и целостность симметрических алгебр для таких идеалов. Получены критерии отсутствия кручения в симметрических степенях и условия ацикличности $\mathcal{Z}$ -комплекса этих идеалов графов.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm10290

С каждым простым конечным графом $\mathcal{G}$ связан алгебраический объект – его реберный идеал $I(\mathcal{G})$, порожденный свободными от квадратов мономами второй степени в кольце многочленов $R = k[X_1, \dots, X_n]$, где k – поле и n – число вершин в графе $\mathcal{G}$.

В этой статье получены важные результаты о проективной размерности и симметрической алгебре идеала $I(\mathcal{G})$; кроме того, обсуждается ацикличность $\mathcal{Z}$ -комплекса идеала $I(\mathcal{G})$. Статья организована следующим образом.

В п. 1 содержатся некоторые полезные определения и алгебраические свойства, имеющие отношение к графам.

В п. 2 анализируется проективная размерность реберных идеалов простых графов относительно числа ребер. Показано, что для графов, содержащих по крайней мере четыре вершины, эта размерность не меньше 2, и выведены некоторые следствия.

В п. 3 исследуется симметрическая алгебра $S_R(I(\mathcal{G}))$ реберных идеалов простых графов с применением результатов, полученных в [1], [2], и выясняется, для каких графов такая алгебра является областью целостности.

В п. 4 рассматриваются критерии отсутствия кручения в симметрических степенях алгебры $S_R(I(\mathcal{G}))$ и условия, при которых комплекс $\mathcal{Z}(I(\mathcal{G}))$ ацикличен.

1. Введение. Пусть $\mathcal{G}$ – граф, $V(\mathcal{G})$ – множество вершин графа $\mathcal{G}$ и $E(\mathcal{G})$ – множество его ребер. Граф $\mathcal{G}$ называется *простым* графом, или графом *без циклов*, если для любых $\{v_i, v_j\} \in E(\mathcal{G})$, $i \neq j$, имеем $v_i \neq v_j$.

Подграф $C_n \subset \mathcal{G}$ называется *циклом*, или *петлей*, длины n , если он представляет собой последовательность $n + 1$ различных вершин, перемежающихся с n ребрами, которая начинается и кончается в одной и той же вершине, причем каждое ребро инцидентно вершине, предшествующей этому ребру в последовательности, и вершине, следующей за ним.

Дерево – это связный граф без циклов.

Полный граф на множестве вершин $\{v_1, \dots, v_n\}$ – это связный граф без повторяющихся ребер, в котором любые две вершины соединены ребром. Такой граф обозначается через K_n .

Граф с n вершинами называется *полным двудольным* графом, если множество его вершин V можно разбить на два непересекающихся подмножества V_1 (содержащее r вершин) и V_2 (содержащее s вершин, где $r + s = n$) таким образом, что каждое ребро графа соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2 и все пары вершин (v_1, v_2) , $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, соединены ребром. Такой граф обозначается через $K_{r,s}$.

Звездный граф на множестве вершин

$$\{\{v_i\}, \{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_n\}\}$$

с центром в v_i , где $i = 1, \dots, n$, – это полный двудольный граф вида $K_{1,n-1}$. Он обозначается через $\text{star}_i(n)$.

Степень вершины $v_\ell \in V(\mathcal{G})$ обозначается через $\deg(v_\ell)$ и определяется как число ребер, инцидентных вершине v_ℓ , т.е. как

$$\deg(v_\ell) = \max\{r \mid \exists v_1, \dots, v_r \in V(\mathcal{G}) : \{v_i, v_\ell\} \in E(\mathcal{G}), i = 1, \dots, r\}.$$

Если $\deg(v_\ell) = 0$, то вершина v_ℓ называется *изолированной*.

Подмножество A множества вершин $V(\mathcal{G})$ называется *минимальным вершинным покрытием* графа $\mathcal{G}$, если каждое ребро из $\mathcal{G}$ инцидентно хотя бы одной вершине из A . Если при этом множество A не содержит собственных подмножеств с этим свойством, то A называется *минимальным вершинным покрытием* графа $\mathcal{G}$.

Наименьшее число вершин в минимальном вершинном покрытии графа $\mathcal{G}$ называется *размером минимального покрытия* графа $\mathcal{G}$ и обозначается через $\alpha_0(\mathcal{G})$.

Пусть $V(\mathcal{G}) = \{v_1, \dots, v_n\}$ и $R = k[X_1, \dots, X_n]$ – кольцо многочленов, в котором каждая переменная X_i соответствует вершине v_i графа $\mathcal{G}$. *Реберный идеал* $I(\mathcal{G})$ графа $\mathcal{G}$ определяется как идеал

$$(\{X_i X_j \mid \{v_i, v_j\} \in E(\mathcal{G})\}) \subset R.$$

Заметим, что ненулевыми являются те реберные идеалы, которые порождены свободными от квадратов мономами степени 2. Таким образом, $I(\mathcal{G})$ – это градуированный идеал кольца R с начальной степенью 2, т.е. $I(\mathcal{G}) = \bigoplus_{i \geq 2} (I(\mathcal{G}))_i$.

Равенство $I(\mathcal{G}) = (0)$ выполняется, если и только если все вершины в $\mathcal{G}$ изолированы. Таким образом, $I(\mathcal{G})$ имеет свободную градуированную резольвенту длины, не превосходящей n . Длина (единственной) минимальной резольвенты идеала $I(\mathcal{G})$ обозначается через $\text{rdim}_R(I(\mathcal{G}))$ и называется *проективной размерностью* идеала $I(\mathcal{G})$.

Простой идеал $\wp \subset R$, порожденный множеством $A = \{X_{i_1}, \dots, X_{i_r}\}$, является *минимальным простым идеалом* в $I(\mathcal{G})$, если и только если A является минимальным вершинным покрытием графа $\mathcal{G}$.

Хорошо известно, что $\text{height}(I(\mathcal{G})) = \alpha_0(\mathcal{G})$ [3; следствие 6.1.18].

Граф $\mathcal{G}$ называется *графом Козна–Маколея* над k , если

$$\text{depth}(R/I(\mathcal{G})) = \dim(R/I(\mathcal{G})),$$

где $\dim$ обозначает размерность Крулля.

Если $\mathcal{G}$ – граф Козна–Маколея, то по теореме Ауслендера и Буксбаума [4; следствие 3.3] имеем

$$\mathrm{pdim}_R(I(\mathcal{G})) = \alpha_0(\mathcal{G}) - 1.$$

Первое начальное число Бетти в минимальной градуированной резольвенте идеала $I(\mathcal{G})$ допускает следующую геометрическую интерпретацию (см. [5]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Если $\mathcal{G}$ – граф с реберным идеалом $I(\mathcal{G})$ и*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{c_g} R^{b_{g_i}}(-d_{g_i}) \rightarrow \cdots \rightarrow R^c(-4) \oplus R^b(-3) \rightarrow R^{|E(\mathcal{G})|}(-2) \rightarrow I(\mathcal{G}) \rightarrow 0$$

– минимальная градуированная резольвента идеала $I(\mathcal{G})$, то

$$b = |E(\mathcal{L}(\mathcal{G}))| - N_t,$$

где N_t – число треугольников в $\mathcal{G}$ и $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ – реберный граф графа $\mathcal{G}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Число c в минимальной градуированной резольвенте идеала $I(\mathcal{G})$ равно числу неупорядоченных пар строк f_i, f_j , в которых f_i и f_j независимы и не могут быть соединены ребрами.

Пусть I – любой идеал кольца $R = k[X_1, \dots, X_n]$. Симметрическая алгебра идеала I над R определяется как градуированная алгебра

$$S_R(I) = \bigoplus_{t \geq 0} S_t(I).$$

Рассмотрим представление

$$R^m \xrightarrow{\varphi} R^q \xrightarrow{\psi} I \rightarrow 0$$

идеала I , где $\varphi = (a_{ij})$ – матрица размера $q \times m$ с элементами из R . Имеем

$$S_R(I) \simeq R[T_1, \dots, T_q]/J,$$

где $J = (f_1, \dots, f_m)$ – идеал соотношений в $S_R(I)$, в котором

$$f_j = \sum_{i,j} a_{ij} T_i.$$

Для каждого $p = 0, \dots, n$ рассмотрим морфизм

$$\partial_p: \bigwedge^p R^n \rightarrow \bigwedge^{p-1} R^n \otimes I,$$

определенный правилом

$$\partial_p(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e}_{i_j} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \otimes \psi(e_{i_j}),$$

где $e_1, \dots, e_n$ – базис в R^n и $\widehat{}$ обозначает пропуск. Положим $Z_p(I) = \ker \partial_p$.

Мы можем построить комплекс

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(I): 0 \rightarrow Z_n(I) \otimes S[-n] \xrightarrow{\partial'_n} Z_{n-1}(I) \otimes S[-n+1] \rightarrow \dots \\ \rightarrow Z_1(I) \otimes S[-1] \xrightarrow{\partial'_1} Z_0(I) \otimes S \rightarrow S_R(I) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где ∂'_p – отображение, индуцированное морфизмом ∂_p , и $S[-p]_t = S_{t-p}$.

Дополнительную информацию о комплексе $\mathcal{Z}(I)$ можно найти в [6].

С помощью градуированной минимальной свободной резольвенты идеала $I(\mathcal{G})$ можно установить, является ли симметрическая алгебра идеала $I(\mathcal{G})$ в R областью целостности, т.е. является ли ее идеал соотношений простым. Когда это происходит, канонический морфизм градуированных алгебр $S(I(\mathcal{G})) \rightarrow \mathcal{R}(I(\mathcal{G}))$ является изоморфизмом, где

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{k \geq 0} I(\mathcal{G})^k = R[It] \subset R[t]$$

– алгебра Реса идеала $I(\mathcal{G})$ в R . В этом случае говорят, что идеал $I(\mathcal{G})$ имеет линейный тип.

СВОЙСТВО 1.3. *Каждый простой связный граф $\mathcal{G}$, для которого $I(\mathcal{G})$ имеет линейный тип, является деревом или графом с единственным циклом нечетной длины.*

2. Оценки проективной размерности. В этом пункте мы оцениваем снизу проективную размерность реберных идеалов конечных простых графов через число ребер.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть $I(\mathcal{G})$ – реберный идеал простого графа $\mathcal{G}$ с $|E(\mathcal{G})| \geq 4$. Тогда*

$$\text{pdim}_R(I(\mathcal{G})) > 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\text{pdim}_R(I(\mathcal{G})) \geq \alpha_0(\mathcal{G}) - 1.$$

Поэтому когда $\alpha_0(\mathcal{G}) \geq 3$, получаем оценку

$$\text{pdim}_R(I(\mathcal{G})) > 1.$$

Осталось рассмотреть случаи $\alpha_0(\mathcal{G}) = 1, 2$.

Случай $\alpha_0(\mathcal{G}) = 1$. Существует единственный граф $\mathcal{G}_0$ на множестве вершин $V(\mathcal{G}_0) = \{v, v_1, v_2, v_3, v_4\}$, для которого $|E(\mathcal{G}_0)| = 4$. Он показан на рис. 1.

Любой другой граф $\mathcal{G}'_0$ с $|E(\mathcal{G}'_0)| > 4$ получается из $\mathcal{G}_0$ добавлением конечного числа ℓ различных ребер, каждое из которых выходит из вершины v графа $\mathcal{G}_0$.

Градуированная минимальная резольвента идеала $I(\mathcal{G}_0)$ имеет вид

$$0 \rightarrow R(-5) \rightarrow R^4(-4) \rightarrow R^6(-3) \xrightarrow{\varphi} R^4(-2) \rightarrow I(\mathcal{G}_0) \rightarrow 0,$$

откуда получаем

$$\text{pdim}_R(I(\mathcal{G}_0)) = 3 > 1.$$

Рис. 1

Градуированная минимальная резольвента идеала $I(\mathcal{G}'_0)$ имеет вид

$$0 \rightarrow R(-5 - \ell) \rightarrow R^{\binom{4+\ell}{4+\ell-1}}(-4 - \ell) \rightarrow \dots \rightarrow R^{\binom{4+\ell}{2}}(-3) \rightarrow R^{4+\ell}(-2) \rightarrow I(\mathcal{G}'_0) \rightarrow 0.$$

В любом случае

$$\text{pdim}_R(I(\mathcal{G}'_0)) > \text{pdim}_R(I(\mathcal{G}_0)) > 1.$$

Случай $\alpha_0(\mathcal{G}) = 2$. Существуют *пять* простых графов с четырьмя ребрами:

- граф $\mathcal{G}_1$ с пятью вершинами и множеством ребер

$$E(\mathcal{G}_1) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_4, v_5\}\};$$

резольвента идеала $I(\mathcal{G}_1)$ имеет вид

$$0 \rightarrow R(-4) \rightarrow R^4(-3) \xrightarrow{\varphi} R^4(-2) \rightarrow I(\mathcal{G}_1) \rightarrow 0;$$

- граф $\mathcal{G}_2$ с четырьмя вершинами и множеством ребер

$$E(\mathcal{G}_2) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\};$$

резольвента идеала $I(\mathcal{G}_2)$ имеет вид

$$0 \rightarrow R(-4) \rightarrow R^4(-3) \xrightarrow{\varphi} R^4(-2) \rightarrow I(\mathcal{G}_2) \rightarrow 0;$$

- граф $\mathcal{G}_3$ с четырьмя вершинами и множеством ребер

$$E(\mathcal{G}_3) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\};$$

резольвента идеала $I(\mathcal{G}_3)$ имеет вид

$$0 \rightarrow R(-4) \rightarrow R^4(-3) \xrightarrow{\varphi} R^4(-2) \rightarrow I(\mathcal{G}_3) \rightarrow 0;$$

- граф $\mathcal{G}_4$ с пятью вершинами и множеством ребер

$$E(\mathcal{G}_4) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}\};$$

резольвента идеала $I(\mathcal{G}_4)$ имеет вид

$$0 \rightarrow R(-5) \rightarrow R^3(-3) \oplus R(-4) \xrightarrow{\varphi} R^4(-2) \rightarrow I(\mathcal{G}_4) \rightarrow 0;$$

- граф $\mathcal{G}_5$ с шестью вершинами и множеством ребер

$$E(\mathcal{G}_5) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}\};$$

резольвента идеала $I(\mathcal{G}_5)$ имеет вид

$$0 \rightarrow R(-6) \rightarrow R^4(-5) \rightarrow R^2(-3) \oplus R^4(-4) \xrightarrow{\varphi} R^4(-2) \rightarrow I(\mathcal{G}_5) \rightarrow 0.$$

Таким образом, для $i = 1, 2, 3, 4$ имеем

$$\text{pdim}_R(I(\mathcal{G}_i)) = 2.$$

Покажем, что для графов $\mathcal{G}'_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, которые получаются из $\mathcal{G}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, добавлением конечного числа различных ребер, выполнено условие $\alpha_0(\mathcal{G}'_i) = \alpha_0(\mathcal{G}_i)$.

Согласно предложению 1.1 имеем $b' + c' \geq b + c$, где b' и c' – градуированные числа Бетти первого модуля сизигий в резольvente идеала $I(\mathcal{G}'_i)$. Из равенства $\text{pdim}_R(I(\mathcal{G}_i)) = 2$ вытекает, что $\text{pdim}_R(I(\mathcal{G}'_i)) > 1$.

Осталось рассмотреть граф $\mathcal{G}_5$, изображенный на рис. 2.

Рис. 2

Для этого графа

$$\text{pdim}_R(I(\mathcal{G}_5)) = 3.$$

Отметим, что граф $\mathcal{G}'_5$, который получается из $\mathcal{G}_5$ добавлением ребра $\{v_1, v_4\}$, обладает тем замечательным свойством, что для него проективная размерность ассоциированного реберного идеала равна 2 ($< \text{pd}_R(I(\mathcal{G}_5))$). Действительно, рассмотрим граф $\mathcal{G}'_5$, изображенный на рис. 3.

Рис. 3

Резольвента идеала $I(\mathcal{G}'_5)$ имеет вид

$$0 \rightarrow R^2(-4) \rightarrow R^6(-3) \rightarrow R^5(-2) \rightarrow I(\mathcal{G}'_5) \rightarrow 0,$$

однако

$$\text{pdim}_R(I(\mathcal{G}'_5)) > 1.$$

Указанную выше нижнюю оценку можно уточнить.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $\mathcal{G}$ – граф из теоремы 2.1, и пусть $\alpha(\mathcal{G})$ обозначает размер наибольшего минимального вершинного покрытия графа $\mathcal{G}$. Тогда

$$\text{pdim}_R(I(\mathcal{G})) \geq \alpha(\mathcal{G}) - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что проективная размерность $\text{pdim}_R(I(\mathcal{G}))$ равна числу регулярности $\text{reg}(R/I(\mathcal{G})^\wedge)$ кольца $R/I(\mathcal{G})^\wedge$, где $I(\mathcal{G})^\wedge$ – идеал, двойственный по Александру идеалу $I(\mathcal{G})$.

Поскольку двойственный по Александру идеал порождается минимальными вершинными покрытиями графа $\mathcal{G}$, его наибольший порождающий элемент имеет степень $\alpha(\mathcal{G})$. Таким образом,

$$\text{reg}(R/I(\mathcal{G})^\wedge) \geq \alpha(\mathcal{G}) - 1.$$

Рассмотрим, например, граф $\mathcal{G}_0$ из доказательства теоремы 2.1. Мы видим, что любой граф $\mathcal{G}$, содержащий $\mathcal{G}_0$ в качестве индуцированного подграфа, имеет по крайней мере одно минимальное вершинное покрытие размера не меньше 4, потому что минимальное вершинное покрытие, не содержащее вершины v , обязано содержать v_1, v_2, v_3, v_4 .

Значит,

$$\text{pdim}_R(I(\mathcal{G})) \geq 3.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Любой простой граф, для которого проективная размерность реберного идеала не превосходит 1, совпадает с одним из следующих графов:

- 1) $\mathcal{A} := \{v_1, v_2\}$ (ребро);
- 2) $\mathcal{B} := \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}\}\}$ (два последовательных ребра);
- 3) $\mathcal{C} := \{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\}\}$ (два ребра, не являющихся последовательными);
- 4) $\mathcal{D} := \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_3\}\}\}$ (треугольник);
- 5) $\mathcal{E} := \{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}\}$ (три последовательных ребра).

Заметим, что в соответствии с теоремой 2.1 все перечисленные выше графы имеют не более трех ребер. Кроме того, в силу связности реберные идеалы, ассоциированные с графами $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$, имеют линейный тип.

3. Целостность симметрической алгебры. В этом пункте мы рассматриваем содержательные классы простых графов и исследуем целостность симметрических алгебр их реберных идеалов.

В следующем предложении рассматривается случай простых графов, содержащих не более трех ребер.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $I(\mathcal{G})$ – реберный идеал простого графа $\mathcal{G}$, для которого $|E(\mathcal{G})| < 4$. Тогда симметрическая алгебра $S_R(I(\mathcal{G}))$ является областью целостности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы рассмотрим все простые графы с не более чем тремя ребрами и явно построим симметрическую алгебру реберного идеала для каждого из них.

Граф $\mathcal{P}$ с двумя вершинами и множеством ребер

$$E(\mathcal{P}) = \{\{v_1, v_2\}\}.$$

Резольвента идеала $I(\mathcal{P})$ имеет вид

$$0 \rightarrow R(-2) \rightarrow I(\mathcal{P}) \rightarrow 0.$$

Для этого графа

$$S_R(I(\mathcal{P})) = R[Y]/J, \quad \text{где } J = (0);$$

очевидно, $S_R(I(\mathcal{P}))$ является областью целостности.

Граф $\mathcal{Q}$ с тремя вершинами и множеством ребер

$$E(\mathcal{Q}) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}\}.$$

Резольвента идеала $I(\mathcal{Q})$ имеет вид

$$0 \rightarrow R(-3) \xrightarrow{\varphi=\begin{pmatrix} X_1 \\ -X_3 \end{pmatrix}} R^2(-2) \rightarrow I(\mathcal{Q}) \rightarrow 0.$$

Для этого графа

$$S_R(I(\mathcal{Q})) = R[Y_1, Y_2]/J, \quad \text{где } J = (X_1Y_1 - X_3Y_2).$$

Идеал $J \subset k[X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2]$ прост, поэтому $S_R(I(\mathcal{Q}))$ является областью целостности.

Граф $\mathcal{R}$ с четырьмя вершинами и множеством ребер

$$E(\mathcal{R}) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\}.$$

Резольвента идеала $I(\mathcal{R})$ имеет вид

$$0 \rightarrow R(-4) \xrightarrow{\varphi=\begin{pmatrix} X_1X_2 \\ -X_3X_4 \end{pmatrix}} R^2(-2) \rightarrow I(\mathcal{R}) \rightarrow 0.$$

Для этого графа

$$S_R(I(\mathcal{R})) = R[Y_1, Y_2]/J, \quad \text{где } J = (X_1X_2Y_1 - X_3X_4Y_2).$$

Идеал $J \subset k[X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2]$ прост, поэтому $S_R(I(\mathcal{R}))$ является областью целостности.

Граф $\mathcal{S}$ – треугольник с множеством ребер

$$E(\mathcal{S}) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\}.$$

Резольвента идеала $I(\mathcal{S})$ имеет вид

$$0 \rightarrow R^2(-3) \xrightarrow{\varphi=\begin{pmatrix} X_2 & 0 \\ -X_1 & X_1 \\ 0 & -X_3 \end{pmatrix}} R^3(-2) \rightarrow I(\mathcal{S}) \rightarrow 0.$$

Для этого графа

$$S_R(I(\mathcal{S})) = R[Y_1, Y_2, Y_3]/J, \quad \text{где } J = (X_2Y_1 - X_1Y_2, X_1Y_2 - X_3Y_3).$$

Идеал $J \subset k[X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3]$ прост, поэтому $S_R(I(\mathcal{S}))$ является областью целостности.

Граф $\mathcal{T}$ – дерево с четырьмя вершинами и множеством ребер

$$E(\mathcal{T}) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}.$$

Резольвента идеала $I(\mathcal{T})$ имеет вид

$$0 \rightarrow R^2(-3) \xrightarrow{\varphi = \begin{pmatrix} X_2 & 0 \\ -X_4 & X_1 \\ 0 & -X_3 \end{pmatrix}} R^3(-2) \rightarrow I(\mathcal{T}) \rightarrow 0.$$

Для этого графа

$$S_R(I(\mathcal{T})) = R[Y_1, Y_2, Y_3]/J, \quad \text{где } J = (X_2Y_1 - X_4Y_2, X_1Y_2 - X_3Y_3).$$

Идеал $J \subset k[X_1, \dots, X_4, Y_1, Y_2, Y_3]$ прост, поэтому $S_R(I(\mathcal{T}))$ является областью целостности.

Граф $\mathcal{U}$ с четырьмя вершинами и множеством ребер

$$E(\mathcal{U}) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}\}.$$

Резольвента идеала $I(\mathcal{U})$ имеет вид

$$0 \rightarrow R(-4) \rightarrow R^3(-3) \xrightarrow{\varphi = \begin{pmatrix} X_3 & X_2 & 0 \\ -X_4 & 0 & X_2 \\ 0 & -X_4 & -X_3 \end{pmatrix}} R^3(-2) \rightarrow I(\mathcal{U}) \rightarrow 0.$$

Для этого графа

$$S_R(I(\mathcal{U})) = R[Y_1, Y_2, Y_3]/J, \\ \text{где } J = (X_3Y_1 - X_4Y_2, X_2Y_1 - X_4Y_3, X_2Y_2 - X_3Y_3).$$

Идеал $J \subset k[X_1, \dots, X_4, Y_1, Y_2, Y_3]$ прост, поэтому $S_R(I(\mathcal{U}))$ является областью целостности.

Граф $\mathcal{V}$ с пятью вершинами и множеством ребер

$$E(\mathcal{V}) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_4, v_5\}\}.$$

Резольвента идеала $I(\mathcal{V})$ имеет вид

$$0 \rightarrow R(-5) \rightarrow R(-3) \oplus R^2(-4) \xrightarrow{\varphi = \begin{pmatrix} 0 & X_1X_3 & X_1X_2 \\ X_2 & -X_4X_5 & 0 \\ -X_3 & 0 & -X_4X_5 \end{pmatrix}} R^3(-2) \rightarrow I(\mathcal{V}) \rightarrow 0.$$

Для этого графа

$$S_R(I(\mathcal{V})) = R[Y_1, Y_2, Y_3]/J, \\ \text{где } J = (X_2Y_2 - X_3Y_3, X_1X_3Y_1 - X_4X_5Y_2, X_1X_2Y_1 - X_4X_5Y_3).$$

Идеал $J \subset k[X_1, \dots, X_5, Y_1, Y_2, Y_3]$ прост, поэтому $S_R(I(\mathcal{V}))$ является областью целостности.

Граф $\mathcal{W}$ с шестью вершинами и множеством ребер

$$E(\mathcal{W}) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}\}.$$

Резольвента идеала $I(\mathcal{W})$ имеет вид

$$0 \rightarrow R(-6) \rightarrow R^3(-4) \xrightarrow{\varphi = \begin{pmatrix} X_3X_4 & X_1X_2 & 0 \\ -X_5X_6 & 0 & X_1X_2 \\ 0 & -X_5X_6 & -X_3X_4 \end{pmatrix}} R^3(-2) \rightarrow I(\mathcal{W}) \rightarrow 0.$$

Для этого графа

$$S_R(I(\mathcal{W})) = R[Y_1, Y_2, Y_3]/J,$$

$$\text{где } J = (X_3X_4Y_1 - X_5X_6Y_2, X_1X_2Y_1 - X_5X_6Y_3, X_1X_2Y_2 - X_3X_4Y_3).$$

Идеал $J \subset k[X_1, \dots, X_6, Y_1, Y_2, Y_3]$ прост, поэтому $S_R(I(\mathcal{W}))$ является областью целостности.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть $\mathcal{G}$ – простой граф, для которого

$$\text{pdim}_R(I(\mathcal{G})) \leq 1.$$

Тогда симметрическая алгебра $S_R(I(\mathcal{G}))$ является областью целостности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить следствие 2.3.

Заметим, что реберные идеалы, ассоциированные со всеми графами, удовлетворяющими условиям следствия 2.3, имеют линейный тип.

В следующем предложении рассматриваются графы Козна–Маколя без циклов четной длины, для которых размер минимального вершинного покрытия равен 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть $\mathcal{G}$ – граф Козна–Маколя без циклов четной длины, для которого $\text{pdim}_R(I(\mathcal{G})) = 2$. Тогда симметрическая алгебра $S_R(I(\mathcal{G}))$ является областью целостности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для графа Козна–Маколя $\mathcal{G}$ имеем

$$\text{pdim}_R(I(\mathcal{G})) = \alpha_0(\mathcal{G}) - 1.$$

Согласно [3; задача 6.2.19] если граф Козна–Маколя $\mathcal{G}$ имеет q ребер, то

$$q \leq \frac{[\alpha_0(\mathcal{G})]^2 + \alpha_0(\mathcal{G})}{2}.$$

Значит, все графы Козна–Маколя $\mathcal{G}$, удовлетворяющие условию $\text{pd}_R(I(\mathcal{G})) = 2$, содержат не более шести ребер.

По предложению 3.1 симметрическая алгебра реберного идеала любого простого графа с не более чем тремя ребрами является областью целостности.

Нам осталось рассмотреть симметрические алгебры реберных идеалов графов Козна–Маколя $\mathcal{G}$, для которых

$$\text{pdim}_R(I(\mathcal{G})) = 2 \quad \text{и} \quad 4 \leq |E(\mathcal{G})| \leq 6.$$

Существует *десять* графов Коэна–Маколея с четырьмя, пятью и шестью ребрами, для которых проективная размерность ассоциированных реберных идеалов равна 2.

Вычисления проводились с помощью программных систем CoCoA (см. [7]) и Macaulay (см. [8]).

Графы Коэна–Маколея с четырьмя ребрами:

- граф $\mathcal{H}_1$ с

$$E(\mathcal{H}_1) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}\};$$

для этого графа минимальная свободная резольвента реберного идеала имеет вид

$$0 \rightarrow R^2(-5) \rightarrow R^2(-3) \oplus R^3(-4) \xrightarrow{\varphi} R^4(-2) \rightarrow I(\mathcal{H}_1) \rightarrow 0,$$

и $S_R(I(\mathcal{H}_1)) = R[Y_1, \dots, Y_4]/J$, где

$$J = (X_1Y_3 - X_3Y_4, X_2Y_2 - X_3Y_4, X_2X_3Y_1 - X_4X_5Y_3, \\ X_1X_3Y_1 - X_4X_5Y_2, X_1X_2Y_1 - X_4X_5Y_4);$$

идеал $J \subset k[X_1, \dots, X_5, Y_1, \dots, Y_4]$ прост, поэтому $S_R(I(\mathcal{H}_1))$ является областью целостности;

- граф $\mathcal{H}_2$ с

$$E(\mathcal{H}_2) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}\};$$

идеал соотношений алгебры $S_R(I(\mathcal{H}_2))$ равен

$$J = (X_2Y_2 - X_4Y_3, X_1Y_3 - X_3Y_4, X_3X_4Y_1 - X_5X_6Y_2, \\ X_2X_3Y_1 - X_5X_6Y_3, X_1X_2Y_1 - X_5X_6Y_4);$$

этот идеал $J \subset k[X_1, \dots, X_6, Y_1, \dots, Y_4]$ прост, поэтому $S_R(I(\mathcal{H}_2))$ является областью целостности.

Графы Коэна–Маколея с пятью ребрами:

- граф $\mathcal{H}_3$ с

$$E(\mathcal{H}_3) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}\}$$

(пятиугольник); для этого графа минимальная свободная резольвента реберного идеала имеет вид

$$0 \rightarrow R(-5) \rightarrow R^5(-3) \xrightarrow{\varphi} R^5(-2) \rightarrow I(\mathcal{H}_3) \rightarrow 0;$$

идеал соотношений алгебры $S_R(I(\mathcal{H}_3))$ равен

$$J = (X_3Y_2 - X_5Y_3, X_4Y_1 - X_1Y_2, X_2Y_1 - X_5Y_5, X_2Y_3 - X_4Y_4, X_1Y_4 - X_3Y_5);$$

этот идеал $J \subset k[X_1, \dots, X_5, Y_1, \dots, Y_5]$ прост, поэтому $S_R(I(\mathcal{H}_3))$ является областью целостности;

- граф $\mathcal{H}_4$ с

$$E(\mathcal{H}_4) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}\};$$

для этого графа минимальная свободная резольвента реберного идеала имеет вид

$$0 \rightarrow R(-4) \oplus R(-5) \rightarrow R^5(-3) \oplus R(-4) \xrightarrow{\varphi} R^5(-2) \rightarrow I(\mathcal{H}_4) \rightarrow 0;$$

идеал

$$J = (X_3Y_1 - X_5Y_2, X_2Y_2 - X_4Y_4, X_1Y_2 - X_4Y_3, X_2Y_3 - X_1Y_4, \\ X_1Y_4 - X_3Y_5, X_1X_2Y_1 - X_4X_5Y_5)$$

прост, поэтому симметрическая алгебра $S_R(I(\mathcal{H}_4))$ является областью целостности;

- граф $\mathcal{H}_5$ с

$$E(\mathcal{H}_5) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_5\}\};$$

идеал

$$J = (X_6Y_1 - X_5Y_3, X_2Y_3 - X_6Y_4, X_4Y_1 - X_3Y_2, X_2Y_1 - X_5Y_4, \\ X_1Y_4 - X_3Y_5, X_1X_2Y_2 - X_4X_5Y_5)$$

прост, поэтому симметрическая алгебра $S_R(I(\mathcal{H}_5))$ является областью целостности.

Графы Козна–Маколя с шестью ребрами:

- граф $\mathcal{H}_6$ с

$$E(\mathcal{H}_6) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_5\}\};$$

для этого графа минимальная свободная резольвента реберного идеала имеет вид

$$0 \rightarrow R^3(-4) \rightarrow R^8(-3) \xrightarrow{\varphi} R^6(-2) \rightarrow I(\mathcal{H}_6) \rightarrow 0;$$

идеал соотношений в алгебре $S_R(I(\mathcal{H}_6))$ равен

$$J = (X_6Y_1 - X_5Y_4, X_2Y_4 - X_6Y_5, X_4Y_1 - X_3Y_3, X_4Y_2 - X_2Y_3, \\ X_2Y_1 - X_3Y_2, X_3Y_2 - X_5Y_5, X_1Y_2 - X_5Y_6, X_1Y_5 - X_3Y_6);$$

этот идеал $J \subset k[X_1, \dots, X_6, Y_1, \dots, Y_6]$ прост, поэтому $S_R(I(\mathcal{H}_6))$ является областью целостности;

- граф $\mathcal{H}_7$ с

$$E(\mathcal{H}_7) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}$$

(полный граф K_4); идеал соотношений в алгебре $S_R(I(\mathcal{H}_7))$ равен

$$J = (X_3Y_1 - X_2Y_4, X_2Y_4 - X_4Y_5, X_4Y_2 - X_3Y_3, X_3Y_3 - X_1Y_4, \\ X_1Y_1 - X_2Y_3, X_2Y_3 - X_4Y_6, X_2Y_2 - X_1Y_5, X_1Y_5 - X_3Y_6);$$

этот идеал J не является простым, поэтому алгебра $S_R(I(\mathcal{H}_7))$ не является областью целостности;

- граф $\mathcal{H}_8$ с

$$E(\mathcal{H}_8) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}\};$$

идеал соотношений равен

$$J = (X_3Y_1 - X_5Y_4, X_1Y_1 - X_5Y_3, X_2Y_4 - X_4Y_5, X_4Y_2 - X_3Y_3, \\ X_3Y_3 - X_1Y_4, X_2Y_3 - X_4Y_6, X_2Y_2 - X_1Y_5, X_1Y_5 - X_3Y_6);$$

этот идеал J не является простым, поэтому $S_R(I(\mathcal{H}_8))$ не является областью целостности;

- граф $\mathcal{H}_9$ с

$$E(\mathcal{H}_9) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\};$$

идеал соотношений

$$J = (X_3Y_1 - X_4Y_2, X_4Y_2 - X_5Y_4, X_1Y_1 - X_5Y_3, X_2Y_2 - X_5Y_5, \\ X_2Y_4 - X_4Y_5, X_3Y_3 - X_1Y_4, X_2Y_3 - X_4Y_6, X_1Y_5 - X_3Y_6)$$

не является простым, поэтому алгебра $S_R(I(\mathcal{H}_9))$ не является областью целостности;

- граф $\mathcal{H}_{10}$ с

$$E(\mathcal{H}_{10}) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_6\}\};$$

идеал соотношений

$$J = (X_3Y_1 - X_6Y_4, X_1Y_1 - X_6Y_3, X_4Y_2 - X_5Y_4, X_2Y_2 - X_5Y_5, \\ X_2Y_4 - X_4Y_5, X_3Y_3 - X_1Y_4, X_2Y_3 - X_4Y_6, X_1Y_5 - X_3Y_6)$$

не является простым, поэтому $S_R(I(\mathcal{H}_{10}))$ не является областью целостности.

В заключение отметим, что симметрическая алгебра реберного идеала является областью целостности только для тех графов Козна–Маколя без циклов длины 4, которые удовлетворяют условию $\text{rdim}_R(I(\mathcal{G})) = 2$, т.е. для графов $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_6$.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть $\mathcal{G}$ – граф Козна–Маколя без циклов четной длины, для которого $\alpha_0(\mathcal{G}) = 3$. Тогда реберный идеал $I(\mathcal{G})$ имеет линейный тип.

Предложение 3.3 легко обобщается; а именно, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $\mathcal{G}$ – простой граф без циклов четной длины, для которого

$$|E(\mathcal{G})| \leq 6 \quad \text{и} \quad \alpha_0(\mathcal{G}) = 3.$$

Тогда симметрическая алгебра $S(I(\mathcal{G}))$ является областью целостности.

Полученные выше результаты приводят нас к заключению, что симметрическая алгебра является областью целостности для следующих классов простых графов:

- 1) связные графы (деревья) вида, показанного на рис. 4;

Рис. 4

Рис. 5

- 2) звездные графы $\text{star}_{n+1}(n+1)$ с $n+1$ вершинами и n ребрами;
- 3) несвязные графы вида, показанного на рис. 5.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть $\mathcal{G}$ – простой граф типа 1), 2) или 3). Тогда симметрическая алгебра $S(I(\mathcal{G}))$ является областью целостности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем требуемое утверждение для звездных графов типа 2).

Пусть $R = k[X_{n+1}, X_1, \dots, X_n]$ – кольцо многочленов, в котором переменные соответствуют вершинам графа $\mathcal{G}$. Реберный идеал графа $\mathcal{G}$ равен

$$I(\mathcal{G}) = (X_1 X_{n+1}, \dots, X_n X_{n+1}).$$

Минимальная свободная резольвента идеала $I(\mathcal{G})$ имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow R(-n-1) \rightarrow R^{\binom{n}{n-1}}(-n) \rightarrow R^{\binom{n}{n-2}}(-n+1) \rightarrow \dots \\ \rightarrow R^{\binom{n}{3}}(-4) \rightarrow R^{\binom{n}{2}}(-3) \rightarrow R^n(-2) \rightarrow I(\mathcal{G}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Идеал соотношений в $S_R(I(\mathcal{G}))$ равен $J = (g_1, g_2, \dots, g_{\binom{n}{2}})$, где

$$\begin{aligned} g_1 &= X_{n-1}Y_1 - X_nY_2, \\ g_2 &= X_{n-2}Y_1 - X_nY_3, & g_n &= X_{n-2}Y_2 - X_{n-1}Y_3, \\ g_3 &= X_{n-3}Y_1 - X_nY_4, & g_{n+1} &= X_{n-3}Y_2 - X_{n-1}Y_4, & g_{2n-2} &= X_{n-3}Y_3 - X_{n-2}Y_4, \\ g_4 &= X_{n-4}Y_1 - X_nY_5, & g_{n+2} &= X_{n-4}Y_2 - X_{n-1}Y_5, & g_{2n-1} &= X_{n-4}Y_3 - X_{n-2}Y_5, \\ &\dots & &\dots & \dots \\ g_{n-1} &= X_1Y_1 - X_nY_n, & g_{2n-3} &= X_1Y_2 - X_{n-1}Y_n, & g_{3n-6} &= X_1Y_3 - X_{n-2}Y_n, \\ &\dots & g_{\binom{n}{2}-2} &= X_2Y_{n-2} - X_3Y_{n-1}, & & \\ & & g_{\binom{n}{2}-1} &= X_1Y_{n-2} - X_3Y_n, & g_{\binom{n}{2}} &= X_1Y_{n-1} - X_2Y_n. \end{aligned}$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ этот идеал J является простым, так что $S_R(I(\mathcal{G}))$ является областью целостности.

4. Целостность и ацикличность. В этом пункте мы выясним, при каких условиях $\mathcal{Z}$ -комплекс реберных идеалов ацикличен, и какова связь этих условий с целостностью симметрической алгебры.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В 1964 г. Микали (см. [9]) доказал, что если R – область целостности и E – конечно порожденный R -модуль, то симметрическая алгебра $S_R(E)$ является областью целостности тогда и только тогда, когда $S_t(E)$ не имеет кручения ни для какого t .

Таким образом, для всех простых графов, рассмотренных в предыдущем пункте, симметрические степени $S_t(I(\mathcal{G}))$ не имеют кручения ни для каких t .

В частности, для простых графов, удовлетворяющих условию $\text{pdim}_R(I(\mathcal{G})) = 1$ (см. следствия 2.3 и 3.2), $S_t(I(\mathcal{G}))$ – алгебра без кручения тогда и только тогда, когда

$$\text{grade } I_k(\varphi) \geq |E(\mathcal{G})| - 1 - k + 1 \quad \text{для всех } k = 1, \dots, \text{rank}(\varphi)$$

(см. [10]).

Следующий результат устанавливает связь между целостностью и ацикличностью.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $\mathcal{G}$ – один из графов, перечисленных в следствии 2.3. Тогда комплекс $\mathcal{Z}(S_t(I(\mathcal{G})))$ ацикличен в том и только том случае, если симметрическая алгебра $S_R(S_t(I(\mathcal{G})))$ является областью целостности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 3.2 алгебра $S_R(I(\mathcal{G}))$ является областью целостности.

По теореме Микали (см. замечание 4.1) алгебра $S_t(I(\mathcal{G}))$ не имеет кручения ни для какого t . Поскольку $S_t(I(\mathcal{G}))$ является R -модулем, согласно замечанию из [11] $S_R(S_t(I(\mathcal{G})))$ является областью целостности тогда и только тогда, когда $\mathcal{Z}(S_t(I(\mathcal{G})))$ ацикличен.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Согласно [12; замечание 3.8, с)] если граф $\mathcal{G}$ таков, что $S_t(I(\mathcal{G}))$ – алгебра без кручения, то комплекс $\mathcal{Z}(I(\mathcal{G}))$ точен тогда и только тогда, когда комплексы $\mathcal{Z}(I(\mathcal{G}))_{\wp}$ точны для всех

$$\wp \in \text{Spec}(R) \quad \text{с} \quad \text{depth } R_{\wp} < |E(\mathcal{G})|.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть $\mathcal{G}$ – граф, для которого $|E(\mathcal{G})| \geq 4$. Тогда $S_R(I(\mathcal{G}))$ не является полным пересечением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.9 из [12] алгебра $S_R(I(\mathcal{G}))$ является полным пересечением тогда и только тогда, когда $\text{pdim}_R(I(\mathcal{G})) \leq 1$. Но согласно теореме 2.1 в случае $|E(\mathcal{G})| \geq 4$ имеем $\text{pdim}_R(I(\mathcal{G})) > 1$. Значит, $S_R(I(\mathcal{G}))$ не является полным пересечением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. $\mathcal{Z}$ -комплексы реберных идеалов графов $\mathcal{G}$, для которых

$$\text{pdim}_R(I(\mathcal{G})) = 2, \quad \text{rank } N = \text{rank } Z_1(I(\mathcal{G})) = 3,$$

ацикличны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{rank } N = 3$, то $(\bigwedge^3 N)^{**} \simeq R$ и $\mathcal{Z}$ -комплекс имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(I(\mathcal{G})): 0 \rightarrow R \otimes S[-3] &\rightarrow \left(\bigwedge^2 N\right)^{**} \otimes S[-2] \\ &\rightarrow N \otimes S[-1] \rightarrow R^q \otimes S \rightarrow S_R(I(\mathcal{G})) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Поскольку $I(\mathcal{G})$ не имеет кручения, имеем $(\bigwedge^2 N)^{**} \simeq Z_2(I(\mathcal{G}))$ (в действительности $2 < \text{rank } N$), и $Z_2(I(\mathcal{G}))$ является рефлексивным модулем.

Следовательно, $(\bigwedge^2 N)^{**}$ – тоже рефлексивный модуль. Этот модуль является вторым модулем сизигий, поэтому $\text{depth}(\bigwedge^2 N)^{**} \geq 2$ (см. [4], [13]).

Из леммы Пескина–Шпиро об ацикличности (см. [14; лемма 1.8]) вытекает точность комплекса $\mathcal{Z}(I(\mathcal{G}))$.

СЛЕДСТВИЕ 4.6. *Существует только два графа Козна–Маколея, для которых $\text{pdim}_R(I) = 2$ и $\text{rank } Z_1(I) = 3$:*

- 1) $\mathcal{H}_1 := \{\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_4, v_5\}\}\},$
- 2) $\mathcal{H}_2 := \{\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}\}\}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая минимальные свободные резольвенты реберных идеалов графов $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ и рассуждая так же, как в доказательстве предложения 3.3, мы приходим к заключению, что $\text{rank } Z_1(I(\mathcal{H}_1))$ и $\text{rank } Z_1(I(\mathcal{H}_2))$ равны $3 = \text{rank } \varphi$.

Заметим, что по предположению 4.5 комплексы $\mathcal{Z}(I(\mathcal{H}_1))$ и $\mathcal{Z}(I(\mathcal{H}_2))$ ацикличны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Molica Bisci, “Symmetric algebra of ideals of graphs”, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) **Suppl.**, **70**, part II (2002), 167–175.
- [2] G. Restuccia, “On the symmetric algebra of a module of projective dimension two”, *An. Univ. București Mat.*, **40**:1-2 (1991), 83–91.
- [3] R. H. Villarreal, *Monomial Algebras*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **238**, Marcel Dekker, New York, 2001.
- [4] E. G. Evans, P. Griffith, *Syzygies*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **106**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.
- [5] S. Eliahou, R. H. Villarreal, “The second Betti number of an edge ideal”, *XXXI National Congress of the Mexican Mathematical Society*, Aportaciones Mat. Comun., **25**, Soc. Mat. Mexicana, México, 1999, 115–119.
- [6] J. Herzog, A. Simis, W. V. Vasconcelos, “On the arithmetic and homology of algebras of linear type”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **283**:2 (1984), 661–683.
- [7] L. Robbiano, CoCoATeam, *CoCoA 4*, <http://cocoa.dima.unige.it>.
- [8] D. Grayson, M. Stillman, *Macaulay2*, <http://www.math.illinois.edu/Macaulay2/>.
- [9] A. Micali, “Sur les algèbres universelles”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **14**:2 (1964), 33–87.
- [10] L. L. Avramov, “Complete intersections and symmetric algebras”, *J. Algebra*, **73**:1 (1981), 248–263.
- [11] G. Restuccia, “Puissances symétriques sans torsion”, *Cahiers Mathém., Montpellier*, **39** (1992).

- [12] G. Restuccia, C. Ionescu, “ q -Torsion freeness of symmetric powers”, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), **46:3** (1997), 329–346.
- [13] G. Molica, G. Restuccia, “Torsion free exterior powers of a module and their resolutions”, *An. Ştiinţ. Univ. Ovidius Constanţa Ser. Mat.*, **10:1** (2002), 101–108.
- [14] C. Peskine, L. Szpiro, “Dimension projective finie et cohomologie locale. Applications à la demonstration de conjectures de M. Auslander, H. Bass et A. Grothendieck”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **42:1** (1973), 47–119.

М. Имбеси

University of Messina, Италия

E-mail: maurizio.imbesi@unime.it

Поступило

16.07.2010