Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. К. Пан, К. Ли, О горенштейново инъективных и проективных комодулях, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 2, 266–278

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10291>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:54:50

О горенштейново инъективных и проективных комодулях

К. К. Пан, К. Ли

Горенштейново инъективные, проективные и копловские комодули были введены и изучались Асенцио и Эноксом с соавторами. В настоящей статье мы продолжаем исследование таких комодулей и вводим n -горенштейново инъективные, проективные и копловские комодули, которые дают нам новое описание горенштейновых комодулей.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm10291

1. Введение. На протяжении всей статьи C обозначает коалгебру. Под C -комодулем мы понимаем правый C -комодуль и через $\mathcal{M}^C$ обозначаем категорию правых C -комодулей с морфизмами $\text{Com}(M, N)$ из M в N .

Поскольку $\mathcal{M}^C$ – категория Гротендика, т.е. абелева категория с генераторами и точными прямыми пределами, в ней есть достаточно инъективных объектов, которые, как обычно, характеризуются посредством правого производного функтора $\text{Ext}_C^i(M, \cdot)$ [1]. Поэтому мы можем определить инъективную размерность C -комодуля. Однако, хотя группы гомологий Ext могут быть вычислены с помощью инъективной резольвенты, этого нельзя сделать (как в случае модулей) с использованием проективной резольвенты, поскольку не всегда имеется достаточно проективных объектов. В 1977 г. Л. П. Линь ввел понятие двусторонних полусовершенных коалгебр, в которых заведомо найдется достаточно проективных объектов.

Коалгебра C называется *полусовершенной справа* [2], если любой конечномерный C -комодуль имеет проективное накрытие. Например, любая конечномерная коалгебра полусовершенна справа [3; замечание 3.2.5]. Для данной коалгебры C категория $\mathcal{M}^C$ имеет достаточно проективных объектов, если и только если C полусовершенна справа [2; теорема 10]. Таким образом, i -я группа гомологий $\text{Ext}_C^i(M, N)$ может быть вычислена с помощью инъективной резольвенты N или с помощью проективной резольвенты M , и мы можем определить проективную размерность [1] C -комодуля. Далее, $\mathcal{M}^C$ – категория Гротендика, поэтому она содержит произвольные прямые произведения, а функтор прямого произведения точен слева, но не справа. Следствие 3.2.14 из [3] показывает, что функтор прямого произведения точен, если C полусовершенна справа.

Работа поддержана национальным фондом естественных наук Китая (грант № 11071111) и молодежным инновационным фондом Нанкинского сельскохозяйственного университета (гранты LXYQ201101107, LXYQ201201106).

Кольцо R называется *горенштейновым* [4], если оно нётерово (и слева, и справа) и имеет конечные (левую и правую) инъективные размерности как двусторонний модуль над собой. Эти кольца важны, поскольку для них может быть развита относительная теория гомологий. В двойственной ситуации Асенцио с соавторами ввел горенштейнову коалгебру [5] как коалгебру, полусовершенную и слева, и справа, и имеющую конечные (левую и правую) проективные размерности как двусторонний модуль над собой. Над этим классом коалгебр может быть развита относительная теория гомологий комодулей [5], [6]. Цель настоящей статьи – дальнейшее развитие этой теории.

Ниже мы напоминаем некоторые понятия и факты, используемые в статье.

На пространстве $C^* = \text{Hom}_k(C, k)$, двойственном к данной коалгебре C , имеется естественная структура алгебры, и любой C -комодуль M со структурой комодуля ρ может быть определен как левый C^* -модуль, в котором

$$c^* \cdot m = (\text{id} \otimes c^*)\rho(m) \quad \text{для любых } m \in M, \quad c^* \in C^*.$$

Для C -комодулей M, N мы имеем $\text{Com}(M, N) = \text{Hom}(M, N)$, следовательно, M^C может рассматриваться как полная подкатегория категории левых C^* -модулей. Это показывает, что $\text{Com}(M, \cdot)$ и $\text{Com}(\cdot, N)$ всегда точны слева.

Если $\text{Com}(\cdot, N)$ точен, то N называется *инъективным*, если же точен $\text{Com}(M, \cdot)$, то M называется *проективным* [7]. Пусть $\mathcal{I}$ и $\mathcal{P}$ обозначают классы инъективных и проективных C -комодулей соответственно. Класс $\mathcal{I}$ замкнут относительно взятия прямых произведений, выделения прямых слагаемых и взятия прямых сумм [3; утверждение 2.4.8]; класс $\mathcal{P}$ замкнут относительно взятия прямых сумм и выделения прямых слагаемых. Более того, Такечи ввел *коплоские* комодули и показал, что C -комодуль является коплоским, если и только если он инъективен [8; утверждение A.2.1].

В настоящей статье $\text{id}(M)$ и $\text{pd}(M)$ обозначают соответственно инъективную и проективную размерности C -комодуля. Все результаты об инъективных C -комодулях имеют проективные аналоги, которые мы за редким исключением только формулируем, оставляя доказательства читателю.

2. Горенштейново инъективные и проективные комодули.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. C -Комодуль M называется *горенштейново инъективным* [5], если существует $\text{Com}(\mathcal{I}, \cdot)$ -точная точная последовательность

$$\mathbb{E} = \cdots \rightarrow E_1 \rightarrow E_0 \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow \cdots$$

с инъективными E_i , E^i такая, что

$$M = \text{coker}(E_1 \rightarrow E_0).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. C -Комодуль M называется *горенштейново проективным* [6], если существует $\text{Com}(\cdot, \mathcal{P})$ -точная точная последовательность

$$\mathbb{P} = \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots$$

с проективными P_i , P^i такая, что

$$M = \ker(P^0 \rightarrow P^1).$$

Асенцио с соавторами ввел *горенштейново коплоские модули* [5; определение 4.1] и показал, что комодуль является горенштейново коплоским, если и только если он горенштейново инъективен над горенштейновыми коалгебрами [5; теорема 4.4].

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. (1) *Горенштейново инъективный C -комодуль M либо инъективен, либо $\text{id}(M) = \infty$.*

(2) *Если C полусовершенна справа, то горенштейново проективный C -комодуль M либо проективен, либо $\text{pd}(M) = \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если M горенштейново инъективен, то существует $\text{Com}(\mathcal{I}, \cdot)$ -точная точная последовательность

$$0 \rightarrow M \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow \dots \rightarrow E^{k-1} \rightarrow L^k \rightarrow 0$$

с инъективными E^i . Если $\text{id}(M) \leq n$, то L^n инъективен и точная последовательность $0 \rightarrow L^{n-1} \rightarrow E^{n-1} \rightarrow L^n \rightarrow 0$ расщепляется. Итак, L^{n-1} инъективен. Повторяя процедуру, получаем инъективность M .

Пусть $\mathcal{X}$ – класс C -комодулей и M – C -комодуль. Напомним, что *левой $\mathcal{X}$ -резольвентой M* называется точная последовательность

$$\dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0 \quad \text{с} \quad X_i \in \mathcal{X}.$$

Правой $\mathcal{X}$ -резольвентой M называется точная последовательность

$$0 \rightarrow M \rightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow \dots \quad \text{с} \quad X^i \in \mathcal{X}.$$

Используя определения, мы немедленно получаем следующие

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. *C -Комодуль M горенштейново инъективен, если и только если M допускает $\text{Com}(\mathcal{I}, \cdot)$ -точную левую $\mathcal{I}$ -резольвенту и $\text{Ext}_C^i(\mathcal{I}, M) = 0$ для всех $i > 0$.*

Следовательно, если M горенштейново инъективен, то $\text{Ext}_C^i(L, M) = 0$ для всех $i > 0$ и любого C -комодуля L с $\text{id}(L) < \infty$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.5. *Пусть C – полусовершенная справа коалгебра. C -Комодуль M горенштейново проективен, если и только если M допускает $\text{Com}(\cdot, \mathcal{P})$ -точную правую $\mathcal{P}$ -резольвенту и $\text{Ext}_C^i(M, \mathcal{P}) = 0$ для всех $i > 0$.*

Следовательно, если M горенштейново проективен над полусовершенной справа коалгеброй C , то $\text{Ext}_C^i(M, L) = 0$ для всех $i > 0$ и любого C -комодуля L с $\text{pd}(L) < \infty$.

Ниже $\mathcal{GI}$ и $\mathcal{GP}$ обозначают соответственно классы горенштейново инъективных и горенштейново проективных C -комодулей.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. (1) Имеют место вложения $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{GI}$ и $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{GP}$.

(2) По симметрии все образы, ядра и коядра $\mathbb{E}$ (соответственно $\mathbb{P}$) горенштейново инъективны (соответственно проективны).

(3) Класс $\mathcal{GI}$ замкнут относительно взятия прямых пределов и прямых сумм [5]; класс $\mathcal{GP}$ замкнут относительно взятия прямых сумм. Если C полусовершенна справа, то $\mathcal{GI}$ замкнут относительно взятия прямых произведений и $\mathcal{GP}$ замкнут относительно расширений и выделения прямых слагаемых [6].

ЛЕММА 2.7. Рассмотрим $\text{Com}(\mathcal{I}, \cdot)$ -точную точную последовательность

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

$\mathcal{C}$ -комодулей. Если M' и M'' оба допускают $\text{Com}(\mathcal{I}, \cdot)$ -точные точные левые $\mathcal{I}$ -резольвенты, то и M допускает такую резольвенту.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы аналогично доказательству леммы 8.2.1 из [4].

ТЕОРЕМА 2.8. Класс $\mathcal{GI}$ замкнут относительно расширений и выделения прямых слагаемых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя утверждение 2.4, мы заключаем, что $\mathcal{GI}$ замкнут относительно расширений по лемме 2.7 и последовательность

$$\text{Ext}_C^i(\mathcal{I}, M') \rightarrow \text{Ext}_C^i(\mathcal{I}, M) \rightarrow \text{Ext}_C^i(\mathcal{I}, M'')$$

точна для всех $i > 0$.

Теперь рассмотрим точную последовательность $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ $\mathcal{C}$ -комодулей, в которой M' и M горенштейново инъективны. Докажем, что M'' тоже горенштейново инъективен.

Используя точную последовательность

$$\text{Ext}_C^i(\mathcal{I}, M) \rightarrow \text{Ext}_C^i(\mathcal{I}, M'') \rightarrow \text{Ext}_C^{i+1}(\mathcal{I}, M'),$$

мы заключаем, что $\text{Ext}_C^i(\mathcal{I}, M'') = 0$ для всех $i > 0$. По определению существует $\text{Com}(\mathcal{I}, \cdot)$ -точная точная последовательность $0 \rightarrow L_0 \rightarrow E_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ с инъективным E_0 и горенштейново инъективным L_0 .

Рассмотрим следующую диаграмму с расслоенным произведением T :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & L_0 & \xlongequal{\quad} & L_0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & E_0 & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Поскольку $\mathcal{GI}$ замкнут относительно расширений, T горенштейново инъективен. По утверждению 2.4 последовательность

$$0 \rightarrow \text{Com}(\mathcal{I}, T) \rightarrow \text{Com}(\mathcal{I}, E_0) \rightarrow \text{Com}(\mathcal{I}, M'') \rightarrow 0$$

точна. Объединяя вторую строку с $\text{Com}(\mathcal{I}, \cdot)$ -точной левой $\mathcal{I}$ -резольвентой T , мы получаем $\text{Com}(\mathcal{I}, \cdot)$ -точную левую резольвенту M'' . Таким образом, $M'' \in \mathcal{GI}$.

Наконец, если G горенштейново инъективен и $G = H \oplus K$, то $W = H \oplus K \oplus H \oplus K \oplus \dots$ горенштейново инъективен и $W \cong H \oplus W$. Рассматривая точную последовательность $0 \rightarrow W \rightarrow H \oplus W \rightarrow H \rightarrow 0$, получаем, что H горенштейново инъективен.

3. 1-Горенштейново инъективные и проективные комодули.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. $\mathcal{C}$ -Комодуль M называется *1-горенштейново инъективным*, если существует $\text{Com}(\mathcal{I}, \cdot)$ -точная точная последовательность $0 \rightarrow M \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ с инъективным E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. $\mathcal{C}$ -Комодуль M называется *1-горенштейново проективным*, если существует $\text{Com}(\cdot, \mathcal{P})$ -точная точная последовательность $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ с проективным P .

Ниже $1\text{-}\mathcal{GI}$ и $1\text{-}\mathcal{GP}$ обозначают соответственно классы 1-горенштейново инъективных и 1-горенштейново проективных $\mathcal{C}$ -комодулей.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. *Имеют место вложения*

$$\mathcal{I} \subseteq 1\text{-}\mathcal{GI} \subseteq \mathcal{GI} \quad \text{и} \quad \mathcal{P} \subseteq 1\text{-}\mathcal{GP} \subseteq \mathcal{GP}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если E инъективен, то существует точная последовательность $0 \rightarrow E \rightarrow E \oplus E \rightarrow E \rightarrow 0$. Для любого $I \in \mathcal{I}$ у нас есть точная последовательность

$$0 \rightarrow \text{Com}(I, E) \rightarrow \text{Com}(I \oplus I, E) \rightarrow \text{Com}(I, E) \rightarrow 0.$$

Так как $\text{Com}(I \oplus I, E) \cong \text{Com}(I, E \oplus E)$, последовательность

$$0 \rightarrow \text{Com}(I, E) \rightarrow \text{Com}(I, E \oplus E) \rightarrow \text{Com}(I, E) \rightarrow 0$$

точна. Таким образом, $\mathcal{I} \subseteq 1\text{-}\mathcal{GI}$.

Если M 1-горенштейново инъективен, то найдется $\text{Com}(\mathcal{I}, \cdot)$ -точная точная последовательность $0 \rightarrow M \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ с инъективным E , и мы получаем $\text{Com}(\mathcal{I}, \cdot)$ -точную точную последовательность

$$\dots \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} \dots$$

такую, что $M = \ker(f)$. Таким образом, $1\text{-}\mathcal{GI} \subseteq \mathcal{GI}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Класс $1\text{-}\mathcal{GI}$ замкнут относительно взятия прямых пределов и прямых сумм, класс $1\text{-}\mathcal{GP}$ замкнут относительно взятия прямых сумм. Если $\mathcal{C}$ полусовершенна справа, то $1\text{-}\mathcal{GI}$ замкнут относительно взятия прямых произведений.

Следующая теорема дает новое описание горенштейново инъективных (соответственно проективных) $\mathcal{C}$ -комодулей с помощью 1-горенштейново инъективных (соответственно проективных) $\mathcal{C}$ -комодулей, подобно тому, как инъективные комодули описываются через свободные [7; следствие 2].

ТЕОРЕМА 3.5. *Если $\mathcal{C}$ полусовершенна справа, то $\mathcal{C}$ -комодуль M горенштейново инъективен (соответственно проективен), если и только если он является прямым слагаемым некоторого 1-горенштейново инъективного (соответственно проективного) $\mathcal{C}$ -комодуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом теоремы 2.8 нам остается доказать, что горенштейново инъективный комодуль является прямым слагаемым некоторого 1-горенштейново инъективного комодуля.

Если M горенштейново инъективен, то найдется $\text{Com}(\mathcal{I}, \cdot)$ -точная последовательность

$$\mathbb{E} = \cdots \xrightarrow{d_2} E_1 \xrightarrow{d_1} E_0 \xrightarrow{d_0} E_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} E_{-2} \xrightarrow{d_{-2}} \cdots$$

с инъективными E_i такая, что $M = \ker(d_0)$. Для всех $z \in Z$ обозначим через $\mathbb{E}_z$ точные последовательности

$$\mathbb{E}_z = \cdots \xrightarrow{d_{2-z}} E_{1-z} \xrightarrow{d_{1-z}} E_{-z} \xrightarrow{d_{-z}} E_{-1-z} \xrightarrow{d_{-1-z}} E_{-2-z} \xrightarrow{d_{-2-z}} \cdots$$

и рассмотрим их прямое произведение

$$\prod \mathbb{E}_z = \cdots \rightarrow \prod E_i \xrightarrow{\prod d_i} \prod E_i \xrightarrow{\prod d_i} \prod E_i \xrightarrow{\prod d_i} \prod E_i \xrightarrow{\prod d_i} \cdots.$$

Так как C полусовершенна справа, последовательность $\prod \mathbb{E}_z$ точна согласно следствию 3.2.14 из [3]. Но поскольку

$$\ker\left(\prod d_i\right) \cong \prod \ker d_i, \quad \text{Com}\left(\mathcal{I}, \prod \mathbb{E}_z\right) \cong \prod \text{Com}(\mathcal{I}, \mathbb{E}_z),$$

M есть прямое слагаемое 1-горенштейново инъективного C -комодуля $\ker(\prod d_i)$.

Следующая теорема дает простое описание 1-горенштейново инъективных C -комодулей.

ТЕОРЕМА 3.6. *Следующие утверждения эквивалентны для любого C -комодуля M :*

- (1) C -Комодуль M 1-горенштейново инъективен;
- (2) существует точная последовательность $0 \rightarrow M \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ с инъективным E и $\text{Ext}_C^1(\mathcal{I}, M) = 0$;
- (3) существует $\text{Com}(\mathcal{I}, \cdot)$ -точная точная последовательность $0 \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$, где $\text{id}(L) < \infty$;
- (4) существует точная последовательность $0 \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$, для которой $\text{id}(L) < \infty$, и $\text{Ext}_C^1(\mathcal{I}, M) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти эквивалентности с помощью стандартных рассуждений немедленно следуют из определения 1-горенштейново инъективных C -комодулей.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. (1) Используя описание теоремы 3.6, сразу получаем, что $\mathcal{I} \subseteq 1\text{-}\mathcal{GI}$. Действительно, последовательность $0 \rightarrow E \rightarrow E \oplus E \rightarrow E \rightarrow 0$ точна, а $\text{Ext}_C^1(\mathcal{I}, E) = 0$.

(2) Мы можем также охарактеризовать 1-горенштейново проективные C -комодули над полусовершенными справа коалгебрами подобно описанию 1-горенштейново инъективных C -комодулей.

Заметим, что $1\text{-}\mathcal{GI}$ и $1\text{-}\mathcal{GP}$ необязательно замкнуты относительно выделения прямых слагаемых. Однако, следующие результаты показывают, что они замкнуты относительно некоторого специального выделения прямых слагаемых.

СЛЕДСТВИЕ 3.8. Пусть $0 \rightarrow I \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ – точная последовательность C -комодулей с инъективным I . Тогда N 1-горенштейново инъективен, если и только если M 1-горенштейново инъективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если N 1-горенштейново инъективен, то $M \cong N \oplus I$ 1-горенштейново инъективен.

Обратно, если M 1-горенштейново инъективен, то найдется короткая точная последовательность $0 \rightarrow N \oplus I \rightarrow E \rightarrow N \oplus I \rightarrow 0$ с инъективным I . Рассмотрим расслоенное произведение морфизмов $N \rightarrow N \oplus I$ и $E \rightarrow N \oplus I$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & N \oplus I & \xlongequal{\quad} & N \oplus I & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & E & \longrightarrow & I \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N \oplus I & \longrightarrow & I \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Тогда T горенштейново инъективен по теореме 2.8, поскольку $N \oplus I$ и I горенштейново инъективны. Следовательно, $\text{Ext}_C^1(I, T) = 0$ согласно утверждению 3.1 из [5], и точная последовательность $0 \rightarrow T \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow 0$ расщепляется. Таким образом, T инъективен.

Рассмотрим расслоенную сумму морфизмов $N \oplus I \rightarrow T$ и $N \oplus I \rightarrow N$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & N \oplus I & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & T & \longrightarrow & S \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & N & \xlongequal{\quad} & N \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Тогда последовательность $0 \rightarrow N \rightarrow S \rightarrow N \rightarrow 0$ точна и S инъективен. Более того, $\text{Ext}_C^1(I, N) = 0$ согласно утверждению 3.1 из [5], поскольку N горенштейново инъективен по теореме 2.8. Следовательно, N 1-горенштейново инъективен по теореме 3.6.

СЛЕДСТВИЕ 3.9. Пусть

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow 0$$

– точная последовательность комодулей над полусовершенной справа коалгеброй C с проективным Q . Тогда N 1-горенштейново проективен, если и только если M 1-горенштейново проективен.

4. n -Горенштейново инъективные и проективные комодули.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. C -Комодуль M называется n -горенштейново инъективным, если существует $\text{Com}(\mathcal{I}, \cdot)$ -точная точная последовательность

$$0 \rightarrow M \rightarrow E_n \rightarrow \cdots \rightarrow E_1 \rightarrow M \rightarrow 0$$

с инъективными E_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. C -Комодуль M называется n -горенштейново проективным, если существует $\text{Com}(\cdot, \mathcal{P})$ -точная точная последовательность

$$0 \rightarrow M \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow M \rightarrow 0$$

с проективными P_i .

Ниже $n\text{-}\mathcal{GI}$ и $n\text{-}\mathcal{GP}$ обозначают соответственно классы n -горенштейново инъективных и n -горенштейново проективных C -комодулей.

Из определений мы немедленно получаем следующие

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. C -Комодуль M n -горенштейново инъективен, если и только если найдется $\text{Com}(\mathcal{I}, \cdot)$ -точная точная последовательность

$$\cdots \rightarrow E_1 \rightarrow \underbrace{E_n \rightarrow \cdots \rightarrow E_2 \rightarrow E_1}_{\text{с инъективными } E_i} \rightarrow E_n \rightarrow \cdots$$

с инъективными E_i такая, что $M = \text{coker}(E_2 \rightarrow E_1)$. Следовательно, $n\text{-}\mathcal{GI} \subseteq \mathcal{GI}$ и поэтому

$$\bigcup_{n \geq 1} n\text{-}\mathcal{GI} \subseteq \mathcal{GI}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.4. C -Комодуль M n -горенштейново проективен, если и только если найдется $\text{Com}(\cdot, \mathcal{P})$ -точная точная последовательность

$$\cdots \rightarrow P_1 \rightarrow \underbrace{P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1}_{\text{с проективными } P_i} \rightarrow P_n \rightarrow \cdots$$

с проективными P_i такая, что $M = \ker(P_n \rightarrow P_{n-1})$. Следовательно, $n\text{-}\mathcal{GP} \subseteq \mathcal{GP}$ и поэтому

$$\bigcup_{n \geq 1} n\text{-}\mathcal{GP} \subseteq \mathcal{GP}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Класс $n\text{-}\mathcal{GI}$ замкнут относительно взятия прямых пределов и прямых сумм, класс $n\text{-}\mathcal{GP}$ замкнут относительно взятия прямых сумм. Если C полусовершенна справа, то класс $n\text{-}\mathcal{GI}$ замкнут относительно взятия прямых произведений.

Следующие два утверждения дают простые описания n -горенштейново инъективных и n -горенштейново проективных C -комодулей.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.6. *C -Комодуль M n -горенштейново инъективен, если и только если существует точная последовательность*

$$0 \rightarrow M \rightarrow E_n \rightarrow \cdots \rightarrow E_1 \rightarrow M \rightarrow 0$$

и инъективными E_i и

$$\mathrm{Ext}_C^1(\mathcal{I}, M) = \mathrm{Ext}_C^2(\mathcal{I}, M) = \cdots = \mathrm{Ext}_C^n(\mathcal{I}, M) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это с помощью стандартных рассуждений немедленно следует из определения n -горенштейново инъективных C -комодулей.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.7. *Пусть C – полусовершенная справа коалгебра. C -Комодуль M n -горенштейново проективен, если и только если существует точная последовательность*

$$0 \rightarrow M \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow M \rightarrow 0$$

с проективными P_i и

$$\mathrm{Ext}_C^1(M, \mathcal{P}) = \mathrm{Ext}_C^2(M, \mathcal{P}) = \cdots = \mathrm{Ext}_C^n(M, \mathcal{P}) = 0.$$

Ясно, что 1-горенштейново инъективный (соответственно проективный) C -комодуль n -горенштейново инъективен (соответственно проективен). Интересно, что 1-горенштейново инъективный (соответственно проективный) C -комодуль также можно построить из n -горенштейново инъективного (соответственно проективного) C -комодуля.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.8. *Пусть $M \in n\text{-}\mathcal{GI}$ и $C_i = \mathrm{coker}(E_{i+1} \rightarrow E_i)$, $E_{n+1} = M$. Тогда*

- (1) $C_i \in n\text{-}\mathcal{GI}$, $i = 1, 2, \dots, n$;
- (2) $\bigsqcup_{i=1}^n C_i \in 1\text{-}\mathcal{GI}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $M \in n\text{-}\mathcal{GI}$, существует $\mathrm{Com}(\mathcal{I}, \cdot)$ -точная точная последовательность

$$0 \rightarrow M \rightarrow E_n \rightarrow \cdots \rightarrow E_1 \rightarrow M \rightarrow 0$$

с инъективными E_i . Следовательно у нас есть $\mathrm{Com}(\mathcal{I}, \cdot)$ -точные точные последовательности

$$0 \rightarrow C_i \rightarrow E_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow E_1 \rightarrow E_n \rightarrow \cdots \rightarrow E_i \rightarrow C_i \rightarrow 0,$$

и

$$0 \rightarrow \bigsqcup_{i=1}^n C_i \rightarrow \bigsqcup_{i=1}^n E_i \rightarrow \bigsqcup_{i=1}^n C_i \rightarrow 0,$$

где $C_1 = M$, как мы и хотели.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.9. *Пусть $M \in n\text{-}\mathcal{GP}$ и $K_i = \ker(P_i \rightarrow P_{i-1})$, $P_0 = M$. Тогда*

- (1) $K_i \in n\text{-}\mathcal{GP}$, $i = 1, 2, \dots, n$;
- (2) $\bigsqcup_{i=1}^n K_i \in 1\text{-}\mathcal{GP}$.

Мы продолжаем исследовать связи между 1-горенштейново инъективными (соответственно проективными) C -комодулями и n -горенштейново инъективными (соответственно проективными) C -комодулями.

ТЕОРЕМА 4.10. *Следующие утверждения эквивалентны для любого C -комодуля M :*

- (1) $M \in n\text{-}\mathcal{GI}$;
- (2) *существует точная последовательность*

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f_n} E_n \xrightarrow{f_{n-1}} \dots \xrightarrow{f_1} E_1 \rightarrow M \rightarrow 0$$

с инъективными E_i и $\bigsqcup_{i=1}^n \operatorname{coker} f_i \in 1\text{-}\mathcal{GI}$;

- (3) *существует точная последовательность*

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f_n} L_n \xrightarrow{f_{n-1}} \dots \xrightarrow{f_1} L_1 \rightarrow M \rightarrow 0$$

с $\operatorname{id}(L_i) < \infty$ и $\bigsqcup_{i=1}^n \operatorname{coker} f_i \in 1\text{-}\mathcal{GI}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна вследствие утверждения 4.8, а (2) $\Rightarrow$ (3) тривиально.

(2) $\Rightarrow$ (1). Так как $M = \operatorname{coker} f_1 \in \mathcal{GI}$ по теореме 2.8, $\operatorname{Ext}_C^i(\mathcal{I}, M) = 0$ для всех $i > 0$ вследствие утверждения 3.1 из [5]. Следовательно, $M \in n\text{-}\mathcal{GI}$ согласно утверждению 4.6.

(3) $\Rightarrow$ (2). Рассматривая короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow \operatorname{coker} f_{i+1} \rightarrow L_i \rightarrow \operatorname{coker} f_i \rightarrow 0,$$

где $\operatorname{coker} f_{i+1} \in \mathcal{GI}$ и $\operatorname{coker} f_i \in \mathcal{GI}$ по теореме 2.8, мы получаем, что все $L_i \in \mathcal{GI}$ снова по теореме 2.8. Поэтому L_i инъективен согласно утверждению 2.3, (1).

ТЕОРЕМА 4.11. *Пусть C – полусовершенная справа коалгебра. Тогда следующие утверждения эквивалентны для любого C -комодуля M :*

- (1) $M \in n\text{-}\mathcal{GP}$;
- (2) *существует точная последовательность*

$$0 \rightarrow M \rightarrow P_n \xrightarrow{g_n} \dots \xrightarrow{g_2} P_1 \xrightarrow{g_1} M \rightarrow 0$$

с проективными P_i и $\bigsqcup_{i=1}^n \ker g_i \in 1\text{-}\mathcal{GP}$;

- (3) *существует точная последовательность*

$$0 \rightarrow M \rightarrow L_n \xrightarrow{g_n} \dots \xrightarrow{g_2} L_1 \xrightarrow{g_1} M \rightarrow 0$$

с $\operatorname{pd}(L_i) < \infty$ и $\bigsqcup_{i=1}^n \ker g_i \in 1\text{-}\mathcal{GP}$.

Ниже мы обсуждаем связи между n -горенштейново инъективными (соответственно проективными) C -комодулями и m -горенштейново инъективными (соответственно проективными) C -комодулями ($m \neq n$).

ЛЕММА 4.12. *Имеют место следующие утверждения:*

(1) *если $n \mid m$, то*

$$n\text{-}\mathcal{GI} \subseteq m\text{-}\mathcal{GI} \quad \text{и} \quad n\text{-}\mathcal{GP} \subseteq m\text{-}\mathcal{GP};$$

(2) *если $m = nq + r$, то*

$$m\text{-}\mathcal{GI} \cap n\text{-}\mathcal{GI} \subseteq r\text{-}\mathcal{GI} \quad \text{и} \quad m\text{-}\mathcal{GP} \cap n\text{-}\mathcal{GP} \subseteq r\text{-}\mathcal{GP},$$

где $0 < r < n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $M \in n\text{-}\mathcal{GI}$, то найдется $\text{Com}(\mathcal{I}, \cdot)$ -точная последовательность

$$0 \rightarrow M \rightarrow E_n \rightarrow \cdots \rightarrow E_1 \rightarrow M \rightarrow 0 \quad (\star)$$

с инъективными E_i такая, что $M = \text{coker}(E_2 \rightarrow E_1)$. Если $m = nk$, то, повторяя последовательность $(\star)$ k раз, получаем $n\text{-}\mathcal{GI} \subseteq m\text{-}\mathcal{GI}$.

Согласно (1) мы имеем $m\text{-}\mathcal{GI} \cap n\text{-}\mathcal{GI} \subseteq m\text{-}\mathcal{GI} \cap nq\text{-}\mathcal{GI}$. Если $M \in m\text{-}\mathcal{GI} \cap nq\text{-}\mathcal{GI}$, то найдется $\text{Com}(\mathcal{I}, \cdot)$ -точная последовательность

$$0 \rightarrow M \rightarrow E_m \rightarrow \cdots \rightarrow E_1 \rightarrow M \rightarrow 0 \quad (\star\star)$$

с инъективными E_i . Так как $M \in nq\text{-}\mathcal{GI}$, найдутся два инъективных $\mathcal{C}$ -комодуля I и E такие, что $M \oplus E \cong C_{m-nq+1} \oplus I$, согласно лемме Шануэля (аналогично [9; упражнение 3.37]), где

$$C_{m-nq+1} = \text{coker}(E_{m-nq+2} \rightarrow E_{m-nq+1}).$$

Рассматривая следующую диаграмму с расслоенной суммой T :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C_{m-nq+1} & \longrightarrow & M \oplus E & \longrightarrow & I \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & E_{m-nq} & \longrightarrow & T & \longrightarrow & I \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & C_{m-nq} & \xlongequal{\quad} & C_{m-nq} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

закключаем, что T инъективен.

Рассматривая теперь следующую диаграмму с расслоенной суммой S :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & E & \xlongequal{\quad} & E & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 \longrightarrow & M \oplus E & \longrightarrow & T & \longrightarrow & C_{m-nq} & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & \\
 0 \longrightarrow & M & \longrightarrow & S & \longrightarrow & C_{m-nq} & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & 0 & & 0 & & &
 \end{array}$$

закключаем, что S инъективен. Объединяя точную последовательность $(\star\star)$ со второй строкой вышеуказанной диаграммы, получаем $\text{Com}(\mathcal{I}, \cdot)$ -точную последовательность

$$0 \rightarrow M \rightarrow S \rightarrow E_{m-nq-1} \rightarrow \cdots \rightarrow E_1 \rightarrow 0.$$

Таким образом, $M \in r\text{-}\mathcal{GI}$.

ТЕОРЕМА 4.13. *Имеют место равенства*

$$m\text{-}\mathcal{GI} \cap n\text{-}\mathcal{GI} = (m, n)\text{-}\mathcal{GI} \quad \text{и} \quad m\text{-}\mathcal{GP} \cap n\text{-}\mathcal{GP} = (m, n)\text{-}\mathcal{GP},$$

где (m, n) обозначает наибольший общий делитель m и n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 4.12(1) показывает, что $(m, n)\text{-}\mathcal{GI} \subseteq m\text{-}\mathcal{GI} \cap n\text{-}\mathcal{GI}$. Докажем обратное включение.

Если $m = nq_0 + r_0$, $0 < r_0 < n$, то $m\text{-}\mathcal{GI} \cap n\text{-}\mathcal{GI} \subseteq r_0\text{-}\mathcal{GI}$ по лемме 4.12(2).

Если $n = r_0q_1 + r_1$, $0 < r_1 < r_0$, то $m\text{-}\mathcal{GI} \cap n\text{-}\mathcal{GI} \subseteq r_0\text{-}\mathcal{GI} \cap n\text{-}\mathcal{GI} \subseteq r_1\text{-}\mathcal{GI}$ снова по лемме 4.12(2).

Продолжая этот процесс, мы придем к натуральному z такому, что

$$r_z = (m, n)q_{z+1} \quad \text{и} \quad m\text{-}\mathcal{GI} \cap n\text{-}\mathcal{GI} \subseteq (m, n)\text{-}\mathcal{GI}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.14. *Имеют место следующие равенства:*

$$(1) \quad n\text{-}\mathcal{GI} \cap (n+1)\text{-}\mathcal{GI} = 1\text{-}\mathcal{GI} \quad \text{и} \quad \bigcap_{n \geq 2} n\text{-}\mathcal{GI} = 1\text{-}\mathcal{GI}.$$

$$(2) \quad n\text{-}\mathcal{GP} \cap (n+1)\text{-}\mathcal{GP} = 1\text{-}\mathcal{GP} \quad \text{и} \quad \bigcap_{n \geq 2} n\text{-}\mathcal{GP} = 1\text{-}\mathcal{GP}.$$

Мы завершаем статью описанием квази-кофробениусовых слева коалгебр [10] в терминах горенштейново проективных и n -горенштейново проективных C -комодулей.

Коалгебра C называется *квази-кофробениусовой слева*, если найдется мономорфизм любого левого C^* -модуля в свободный левый C^* -модуль. Теорема 1.3 из [10] показывает, что коалгебра C квази-кофробениусова слева, если и только если любой инъективный C -комодуль проективен.

ЛЕММА 4.15. Для коалгебры C следующие утверждения эквивалентны:

- (1) коалгебра C квази-кофробениусова слева;
- (2) любой C -комодуль имеет правую $\mathcal{P}$ -резольвенту;
- (3) любой инъективный C -комодуль имеет правую $\mathcal{P}$ -резольвенту.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствия (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) тривиальны.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть E – любой инъективный C -комодуль. Тогда согласно (3) найдется короткая точная последовательность $0 \rightarrow E \rightarrow P \rightarrow C \rightarrow 0$ с проективным P ; таким образом, E проективен как прямое слагаемое P . Следовательно, C квази-кофробениусова слева.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.16. Для коалгебры C следующие утверждения эквивалентны:

- (1) коалгебра C квази-кофробениусова слева;
- (2) $\mathcal{I} \subseteq 1\text{-}\mathcal{GP}$;
- (3) $\mathcal{I} \subseteq n\text{-}\mathcal{GP}$;
- (4) $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{GP}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствия (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) тривиальны.

(4) $\Rightarrow$ (1). Включение $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{GP}$ показывает, что любой инъективный C -комодуль имеет правую $\mathcal{P}$ -резольвенту, поэтому C квази-кофробениусова слева по лемме 4.15.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] C. Nastasescu, B. Torrecillas, Y. H. Zhang, “Hereditary coalgebras”, *Comm. Algebra*, **24**:4 (1996), 1521–1528.
- [2] B. I-p. Lin, “Semiperfect coalgebras”, *J. Algebra*, **49**:2 (1977), 357–373.
- [3] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, Ş. Raianu, *Hopf Algebras. An Introduction*, Monogr. Text-books Pure Appl. Math., **235**, Marcel Dekker, New York, 2001.
- [4] E. E. Enochs, O. M. G. Jenda, *Relative Homological Algebra*, de Gruyter Exp. Math., **30**, Walter de Gruyter, Berlin, 2000.
- [5] M. J. Asensio, J. A. López Ramos, B. Torrecillas, “Gorenstein coalgebras”, *Acta Math. Hungar.*, **85**:1-2 (1999), 187–198.
- [6] E. E. Enochs, J. A. López Ramos, “Relative homological coalgebras”, *Acta Math. Hungar.*, **104**:4 (2004), 331–343.
- [7] Y. Doi, “Homological coalgebras”, *J. Math. Soc. Japan*, **33**:1 (1981), 31–50.
- [8] M. Takeuchi, “Formal schemes over fields”, *Comm. Algebra*, **5**:14 (1977), 1483–1528.
- [9] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Pure Appl. Math., **85**, Academic Press, New York, 1979.
- [10] J. Gómez Torrecillas, C. Năstăsescu, “Quasi-co-Frobenius coalgebras”, *J. Algebra*, **174**:3 (1995), 900–923.

К. К. Пан

Nanjing Agricultural University, Китай

E-mail: pqxjs98@njau.edu.cn

Поступило

23.12.2011

К. Ли

Nanjing Agricultural University, Китай

E-mail: lq@njau.edu.cn