Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Шарапудинов, Предельные ультрасферические ряды и их аппроксимативные свойства, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 2, 295–309

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10292>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 13:13:53

Предельные ультрасферические ряды и их аппроксимативные свойства

И. И. Шарапудинов

В статье рассмотрены новые ряды вида $\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{-1} \hat{P}_k^{-1}(x)$, в которых общий член $f_k^{-1} \hat{P}_k^{-1}(x)$, $k = 0, 1, \dots$, получен в результате предельного перехода при $\alpha \rightarrow -1$ из общего члена $\hat{f}_k^{\alpha} \hat{P}_k^{\alpha, \alpha}(x)$ ряда Фурье $\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{\alpha} \hat{P}_k^{\alpha, \alpha}(x)$ по ультрасферическим полиномам Якоби $\hat{P}_k^{\alpha, \alpha}(x)$, образующим при $\alpha > -1$ ортонормированную систему с весом $(1-x^2)^{\alpha}$ на $[-1, 1]$. Исследованы свойства частичных сумм $S_n^{-1}(f, x) = \sum_{k=0}^n f_k^{-1} \hat{P}_k^{-1}(x)$ предельного ультрасферического ряда $\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{-1} \hat{P}_k^{-1}(x)$. В частности, показано, что оператор $S_n^{-1}(f) = S_n^{-1}(f, x)$ является проектором на подпространство алгебраических полиномов $p_n = p_n(x)$ степени не выше n , т.е. $S_n(p_n) = p_n$; кроме того, $S_n^{-1}(f, x)$ совпадает с $f(x)$ в конечных точках ± 1 , т.е. $S_n^{-1}(f, \pm 1) = f(\pm 1)$. Доказано, что функция Лебега $\Lambda_n(x)$ частичных сумм $S_n^{-1}(f, x)$ имеет порядок роста, равный $O(\ln n)$, а точнее, доказано, что $\Lambda_n(x) \leq c(1 + \ln(1 + n\sqrt{1-x^2}))$, $-1 \leq x \leq 1$.

Библиография: 1 название.

DOI: 10.4213/mzm10292

1. Введение. В задачах, связанных с обработкой временных рядов и изображений, возникает необходимость разбить заданный ряд данных на части, аппроксимировать каждую часть и заменить приближенно исходный временной ряд (изображение) функцией, полученной в результате “пристыковки” функций, аппроксимирующих отдельные части. Но тогда в местах “стыка”, как правило, возникают нежелательные разрывы, которые искажают общий вид временного ряда (изображения). Такая картина непременно возникает при использовании для приближения “кусков” исходной функции сумм Фурье по классическим ортонормированным системам. Не является исключением и случай приближения суммами Фурье $S_n^{\alpha}(f, x)$ по ультрасферическим полиномам Якоби $\hat{P}_n^{\alpha}(x) = \hat{P}_n^{\alpha, \alpha}(x)$ при $\alpha > -1$. Указанные выше разрывы в точках “стыка” возникают из-за того, что суммы Фурье $S_n^{\alpha}(f, x)$ не совпадают с исходной функцией $f(x)$ в точках $x = -1$ и $x = 1$. С другой стороны, проанализировав асимптотические свойства полиномов $\hat{P}_n^{\alpha}(x)$ вблизи концов ± 1

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00191 а).

(см. [1]), можно заметить, что суммы Фурье $S_n^\alpha(f, x)$ по этим полиномам имеют тенденцию стремиться к $f(x)$ в точках $x = \pm 1$ при $\alpha \rightarrow -1$, т.е.

$$S_n^{-1}(f, \pm 1) = f(\pm 1), \quad (1.1)$$

где $S_n^{-1}(f, x) = \lim_{\alpha \rightarrow -1} S_n^\alpha(f, x)$. Но что собой представляет $S_n^{-1}(f, x)$, и нельзя ли использовать $S_n^{-1}(f, x)$ в качестве альтернативного сумм Фурье $S_n^\alpha(f, x)$ аппарата приближения непрерывных и гладких функций $f(x)$? В настоящей статье предпринята попытка ответить на эти вопросы и исследовать аппроксимативные свойства предельных сумм $S_n^{-1}(f, x)$. Следует сразу отметить, что полиномы

$$\hat{P}_n^{-1}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow -1} \hat{P}_n^\alpha(x)$$

не образуют ортонормированной системы на $[-1, 1]$; более того, как будет показано ниже, в частности, $\hat{P}_1^{-1}(x) \equiv 0$. Тем не менее, ниже будет показано, что $S_n^{-1}(f, x)$ является проектором на подпространство алгебраических полиномов степени n . Для функции Лебега $\Lambda_n(x)$ частичных сумм $S_n^{-1}(f, x)$ получена (лемма 4.1) оценка

$$\Lambda_n(x) \leq c \ln(2 + n\sqrt{1 - x^2}), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

которая показывает, что $S_n^{-1}(f) = S_n^{-1}(f, x)$ как аппарат приближения непрерывных и гладких функций в метрике пространства $C[-1, 1]$ не уступает суммам Фурье–Чебышева по полиномам Чебышева первого рода $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Отметим еще, что конструкция сумм $S_n^{-1}(f, x)$ столь же проста (равенства (4.1) или (4.1a)), как и конструкция рядов Фурье по ортогональным полиномам. Но она является более удобной с точки зрения численной реализации $S_n^{-1}(f, x)$, так как в интеграле (3.26), определяющем коэффициенты $\tilde{g}_k$, не фигурирует весовая функция, типа $(1 - x^2)^\alpha$, которая в случае $\alpha < 0$ привела бы к существенным вычислительным сложностям. Это обстоятельство вместе с (1.1) делает суммы $S_n^{-1}(f, x)$ весьма привлекательным инструментом для решения задач, связанных с аппроксимацией непрерывных и гладких функций. В частности, $S_n^{-1}(f, x)$ могут найти применение в задачах обработки и сжатия временных рядов и изображений.

2. Некоторые сведения о полиномах Якоби. Полиномы Якоби $P_n^{\alpha, \beta}(x)$ с произвольными действительными α, β можно определить с помощью обобщенной формулы Родрига

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{\kappa(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{ \kappa(x) \sigma^n(x) \}, \quad (2.1)$$

где $\kappa(x) = \kappa^{\alpha, \beta}(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$, $\sigma(x) = 1 - x^2$, а также через явный вид

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \binom{n + \alpha}{n} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n + \alpha + \beta + 1)_k}{(\alpha + 1)_k k!} \left(\frac{1 - x}{2} \right)^k, \quad (2.2)$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_k = a(a+1) \cdots (a+k-1)$. Ниже нам понадобятся следующие свойства полиномов Якоби [1]:

1) *рекуррентные формулы*

$$P_{-1}^{\alpha, \beta}(x) = 0, \quad P_0^{\alpha, \beta}(x) = 1, \quad P_1^{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta), \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
 & 2n(n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)P_n^{\alpha, \beta}(x) \\
 &= (2n + \alpha + \beta - 1)\{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)x + \alpha^2 - \beta^2\}P_{n-1}^{\alpha, \beta}(x) \\
 &\quad - 2(n + \alpha - 1)(n + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)P_{n-2}^{\alpha, \beta}(x), \quad n = 2, 3, 4, \dots;
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

2) равенства

$$\binom{n}{l} P_n^{-l, \beta}(x) = \binom{n + \beta}{l} \left(\frac{x-1}{2}\right)^l P_{n-l}^{l, \beta}(x), \quad 1 \leq l \leq n; \tag{2.5}$$

$$P_n^{\alpha, \beta}(-x) = (-1)^n P_n^{\beta, \alpha}(x), \tag{2.6}$$

$$(1-x)P_n^{\alpha+1, \beta}(x) = \frac{2}{2n + \alpha + \beta + 2}[(n + \alpha + 1)P_n^{\alpha, \beta}(x) - (n + 1)P_{n+1}^{\alpha, \beta}(x)]; \tag{2.7}$$

3) ортогональность при $\alpha, \beta > -1$

$$\int_{-1}^1 \kappa(x) P_n^{\alpha, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta}(x) dx = h_n^{\alpha, \beta} \delta_{nk}, \tag{2.8}$$

где

$$\begin{aligned}
 h_0^{\alpha, \beta} &= \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}, \\
 h_n^{\alpha, \beta} &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1) 2^{\alpha+\beta+1}}{n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}, \quad n \geq 1;
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

4) производные

$$\frac{d^r}{dx^r} P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(n + \alpha + \beta + 1)_r}{2^r} P_{n-r}^{\alpha+r, \beta+r}(x), \tag{2.10}$$

$$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m n^{[m]}} \frac{d^m}{dx^m} \{(1-x)^{m+\alpha} (1+x)^{m+\beta} P_{n-m}^{m+\alpha, m+\beta}(x)\}, \tag{2.11}$$

где $k^{[0]} = 1$, $k^{[r]} = k(k-1) \cdots (k-r+1)$, $(a)_0 = 1$, $(a)_\nu = a(a+1) \cdots (a+\nu-1)$, $a^{[0]} = 1$;

5) формула Кристоффеля-Дарбу

$$\begin{aligned}
 K_n^{\alpha, \beta}(x, y) &= \sum_{k=0}^n \frac{P_k^{\alpha, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta}(y)}{h_k^{\alpha, \beta}} \\
 &= \frac{2^{-\alpha-\beta}}{2n + \alpha + \beta + 2} \frac{\Gamma(n+2) \Gamma(n + \alpha + \beta + 2)}{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)} \\
 &\quad \times \frac{P_{n+1}^{\alpha, \beta}(x) P_n^{\alpha, \beta}(y) - P_n^{\alpha, \beta}(x) P_{n+1}^{\alpha, \beta}(y)}{x - y};
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

6) весовая оценка ($1 \leq x \leq 1$)

$$\sqrt{n} |P_n^{\alpha, \beta}(x)| \leq c(\alpha, \beta) \left(\sqrt{1-x} + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha-1/2} \left(\sqrt{1+x} + \frac{1}{n}\right)^{-\beta-1/2}, \tag{2.13}$$

где здесь и всюду в дальнейшем $c, c(\alpha), c(\alpha, \beta), c(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$ означают положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров, вообще говоря, различные в разных местах.

3. Предельные ультрасферические ряды для непрерывных функций.

Через $C[-1, 1]$ мы обозначим нормированное пространство непрерывных функций $f = f(x)$, определенных на $[-1, 1]$, для которых норма определяется обычным образом через $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [-1, 1]\}$. Для $f \in C[-1, 1]$ мы можем определить коэффициенты Фурье

$$f_k^\alpha = \int_{-1}^1 f(t) \hat{P}_k^\alpha(t) \kappa^\alpha(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.1)$$

где $\alpha > -1$, $\kappa^\alpha(t) = \kappa^{\alpha, \alpha}(t) = (1 - t^2)^\alpha$,

$$\hat{P}_k^\alpha(x) = \{h_k^{\alpha, \alpha}\}^{-1/2} P_k^{\alpha, \alpha}(x), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.2)$$

ряд Фурье

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k^\alpha \hat{P}_k^\alpha(x) \quad (3.3)$$

и сумму Фурье

$$S_n^\alpha(f) = S_n^\alpha(f, x) = \sum_{k=0}^n f_k^\alpha \hat{P}_k^\alpha(x). \quad (3.4)$$

Предельным ультрасферическим рядом мы будем называть ряд, полученный в результате почленного предельного перехода при $\alpha \rightarrow -1$ из ультрасферического ряда (3.3), т.е. ряд вида

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{-1} \hat{P}_k^{-1}(x), \quad (3.5)$$

где

$$f_k^{-1} \hat{P}_k^{-1}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow -1} f_k^\alpha \hat{P}_k^\alpha(x). \quad (3.6)$$

Отметим, что выражение $f_k^{-1} \hat{P}_k^{-1}(x)$, вообще говоря, не может быть определено с помощью равенств (3.1) и (3.2), так как интеграл вида

$$\int_{-1}^1 \frac{f(t) \hat{P}_k^{-1}(t)}{1 - t^2} dt$$

может оказаться расходящимся. Поэтому возникает вопрос о том, что собой представляет выражение $f_k^{-1} \hat{P}_k^{-1}(x)$. Рассмотрим сначала два случая: $k = 0$ и $k = 1$. Из (2.3), (3.2) и (2.9) имеем

$$\begin{aligned} \hat{P}_0^\alpha(x) &= \{h_0^{\alpha, \alpha}\}^{-1/2} = \frac{\sqrt{\Gamma(2\alpha + 2)}}{2^{\alpha+1/2} \Gamma(\alpha + 1)} \\ &= \frac{\sqrt{2^{2\alpha+1} \pi^{-1/2} \Gamma(\alpha + 3/2) \Gamma(\alpha + 1)}}{2^{\alpha+1/2} \Gamma(\alpha + 1)} = \pi^{-1/4} \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha + 3/2)}{\Gamma(\alpha + 1)}}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}\widehat{P}_1^\alpha(x) &= (\alpha+1)\{h_1^{\alpha,\alpha}\}^{-1/2}x = \frac{(\alpha+1)\sqrt{\Gamma(2\alpha+2)}\sqrt{2\alpha+3}}{2^{\alpha+1/2}\Gamma(\alpha+2)}x \\ &= \pi^{-1/4}\sqrt{2}\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+5/2)(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)}}x.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Из (3.1) и (3.7) находим

$$\begin{aligned}f_0^\alpha \widehat{P}_0^\alpha(x) &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^\alpha \widehat{P}_0^\alpha(t) f(t) dt \widehat{P}_0^\alpha(x) \\ &= \pi^{-1/2} \frac{\Gamma(\alpha+3/2)}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^\alpha f(t) dt \\ &= \pi^{-1/2} \frac{\Gamma(\alpha+3/2)}{\Gamma(\alpha+2)} (\alpha+1) \int_{-1}^1 (1-t^2)^\alpha f(t) dt.\end{aligned}\quad (3.9)$$

С другой стороны, нетрудно заметить, что если $f(x) \in C[-1, 1]$, то

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} (1+\alpha) \int_{-1}^1 (1-t^2)^\alpha f(t) dt = \frac{f(-1) + f(1)}{2}.\quad (3.10)$$

Сопоставляя (3.9) и (3.10), получаем

$$f_0^{-1} \widehat{P}_0^{-1}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow -1} f_0^\alpha \widehat{P}_0^\alpha(x) = \pi^{-1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{f(-1) + f(1)}{2} = \frac{f(-1) + f(1)}{2}.\quad (3.11)$$

В случае $k = 1$ из (3.8) и (3.1) имеем

$$\begin{aligned}f_1^\alpha \widehat{P}_1^\alpha(x) &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^\alpha \widehat{P}_1^\alpha(x) \widehat{P}_1^\alpha(t) f(t) dt \\ &= 2\pi^{-1/2} \frac{\Gamma(\alpha+5/2)}{\Gamma(\alpha+2)} (\alpha+1)x \int_{-1}^1 (1-t^2)^\alpha t f(t) dt.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Поэтому с учетом (3.10) находим

$$f_1^{-1} \widehat{P}_1^{-1}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow -1} f_1^\alpha \widehat{P}_1^\alpha(x) = 2\pi^{-1/2} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1)} \frac{f(1) - f(-1)}{2} x = \frac{f(1) - f(-1)}{2} x.\quad (3.13)$$

Перейдем теперь к случаю, когда $k \geq 2$. В этом случае, пользуясь равенствами (3.1) и (3.2), мы можем записать

$$f_k^\alpha \widehat{P}_k^\alpha(x) = \frac{P_k^\alpha(x)}{h_k^{\alpha,\alpha}} \int_{-1}^1 (1-t^2)^\alpha P_k^\alpha(t) f(t) dt = \frac{P_k^\alpha(x)}{h_k^{\alpha,\alpha}} \int_{-1}^1 (1-t^2)^\alpha P_k^\alpha(t) g(t) dt, \quad (3.14)$$

где

$$g(t) = f(t) - \frac{f(1) + f(-1)}{2} - \frac{f(1) - f(-1)}{2} t.\quad (3.15)$$

Далее, при $k \geq 2$ имеем (см. (2.10))

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} h_k^{\alpha,\alpha} = \frac{(k-1)!^2}{2k!(k-2)!(2k-1)} = \frac{k-1}{2k(2(k-1))}, \quad (3.16)$$

поэтому нам остается найти предел при $\alpha \rightarrow -1$ выражения

$$P_k^\alpha(x) \int_{-1}^1 (1-t^2)^\alpha P_k^\alpha(t) g(t) dt.$$

С этой целью обратимся к явному виду (2.2), из которого непосредственно следует, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} P_n^\alpha(x) = P_n^{-1}(x) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \frac{(-n)_l (n-1)_l}{(l-1)! l!} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^l, \quad n \geq 2. \quad (3.17)$$

С другой стороны, из (2.5) выводим

$$P_n^{-1}(x) = P_n^{-1,-1}(x) = \frac{x^2-1}{4} P_{n-2}^{1,1}(x) = \frac{x^2-1}{4} P_{n-2}^1(x). \quad (3.18)$$

Рассмотрим теперь выражение

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-t^2)^\alpha P_k^\alpha(t) g(t) dt &= \int_{-1}^0 (1-t^2)^\alpha P_k^\alpha(t) g(t) dt + \int_0^1 (1-t^2)^\alpha P_k^\alpha(t) g(t) dt \\ &= I_1^\alpha(x) + I_2^\alpha(x). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Покажем, что если функция $g(x)$ непрерывна на $[-1, 1]$, то

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} I_1^\alpha = -\frac{1}{4} \int_{-1}^0 g(t) P_{k-2}^1(t) dt, \quad \lim_{\alpha \rightarrow -1} I_2^\alpha = -\frac{1}{4} \int_0^1 g(t) P_{k-2}^1(t) dt. \quad (3.20)$$

В самом деле, воспользовавшись снова явным видом (2.2), мы можем записать

$$\begin{aligned} I_1^\alpha &= \int_{-1}^0 g(t) \left[\frac{\Gamma(k+1+\alpha)}{k! \Gamma(\alpha+1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(k+1+\alpha)}{k!} \sum_{j=1}^k \frac{(-k)_j (k+2\alpha+1)_j}{\Gamma(j+\alpha+1) j!} \left(1 + \frac{t}{2}\right)^j \right] (1-t^2)^\alpha dt \\ &= I_{1,1}^\alpha + I_{1,2}^\alpha, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где при $\alpha \rightarrow -1$

$$\begin{aligned} I_{1,1}^\alpha &= \frac{\Gamma(k+1+\alpha)}{k! \Gamma(\alpha+1)} \int_{-1}^0 g(t) (1-t^2)^\alpha dt \\ &= \frac{\Gamma(k+1+\alpha)(\alpha+1)}{k! \Gamma(\alpha+2)} \int_{-1}^0 g(t) (1-t^2)^\alpha dt \rightarrow \frac{1}{2} g(-1) = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Что касается выражения $I_{1,2}^\alpha$, то

$$I_{1,2}^\alpha = \frac{\Gamma(k+1+\alpha)}{k!} \sum_{j=1}^k \frac{(-k)_j (k+2\alpha+1)_j}{\Gamma(j+\alpha+1) j! 2^j} \int_{-1}^0 (1+t)^{j+\alpha} (1-t)^\alpha g(t) dt,$$

поэтому в силу (3.17) и (3.18)

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow -1} I_{1,2}^\alpha &= \int_{-1}^0 g(t)(1-t)^{-1} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{(-k)_j (k-1)_j}{(j-1)! j! 2^j} (1+t)^{j-1} dt \\ &= \int_{-1}^0 g(t)(1-t^2)^{-1} P_k^{-1}(t) dt = -\frac{1}{4} \int_{-1}^0 g(t) P_{k-2}^1(t) dt.\end{aligned}\quad (3.23)$$

Сопоставляя (3.21)–(3.23), убеждаемся в справедливости первого из равенств (3.20). Второе доказывается аналогично. Из (3.19) и (3.20) имеем

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} \int_{-1}^1 g(t)(1-t^2)^\alpha P_k^\alpha(t) dt = -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 g(t) P_{k-2}^1(t) dt, \quad (3.24)$$

а из (3.14), (3.16), (3.18) и (3.24) окончательно находим

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} f_k^\alpha \hat{P}_k^\alpha(x) = \frac{k(2k-1)}{8(k-1)} \tilde{g}_{k-2}(1-x^2) P_{k-2}^1(x), \quad (3.25)$$

где

$$\tilde{g}_l = \int_{-1}^1 g(t) P_l^1(t) dt. \quad (3.26)$$

Сопоставляя (3.11), (3.13), (3.25) с (3.5), мы замечаем, что предельный ультрасферический ряд приобретает следующий вид:

$$f \sim \frac{f(-1) + f(1)}{2} + \frac{f(1) - f(-1)}{2} x + \frac{1}{8} (1-x^2) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(2k-1)}{k-1} \tilde{g}_{k-2} P_{k-2}^1(x) \quad (3.27)$$

или

$$f \sim \frac{f(-1) + f(1)}{2} + \frac{f(1) - f(-1)}{2} x + \frac{1}{8} (1-x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2)(2k+3)}{k+1} \tilde{g}_k P_k^1(x). \quad (3.28)$$

Чтобы придать предельному ряду (3.28) еще более простой вид, заметим, что в силу (2.9)

$$h_k^{1,1} = \frac{8(k+1)}{(k+2)(2k+3)}, \quad k \geq 0.$$

Поэтому с учетом равенства (3.2) из (3.26) и (3.28) имеем

$$f \sim \frac{f(-1) + f(1)}{2} + \frac{f(1) - f(-1)}{2} x + (1-x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \hat{g}_k \hat{P}_k^1(x), \quad (3.29)$$

где

$$\hat{g}_k = \int_{-1}^1 g(t) \hat{P}_k^1(t) dt. \quad (3.30)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. При получении предельного ультрасферического ряда (3.28), исходя из ряда Фурье по полиномам Якоби $\hat{P}_n^{\alpha,\alpha}(x)$, путем предельного перехода при $\alpha \rightarrow -1$ мы условились для определенности, что функция $f(x)$ является непрерывной на $[-1, 1]$. Но на самом деле мы пользовались лишь тем, что суммируемая

на $[-1, 1]$ функция $f(x)$ непрерывна в точках ± 1 . Более того, мы можем рассматривать ряд (3.28) для любой суммируемой функции $f(x)$, принимающей конечные значения на концах отрезка $[-1, 1]$. Кроме того, отметим, что если $f(\pm 1) = 0$, то ряд (3.28) принимает вид

$$f(x) \sim \frac{1}{8}(1-x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2)(2k+3)}{k+1} \tilde{f}_k P_k^1(x), \quad (3.31)$$

где

$$\tilde{f}_k = \int_{-1}^1 f(t) P_k^1(t) dt, \quad (3.32)$$

а ряд (3.29), в свою очередь, принимает вид

$$f \sim (1-x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k \hat{P}_k^1(x), \quad (3.33)$$

где

$$\hat{f}_k = \int_{-1}^1 f(t) \hat{P}_k^1(t) dt. \quad (3.34)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Предположим, что предельный ряд (3.28) и ряд, полученный после его почленного дифференцирования, равномерно сходятся на $[-1, 1]$ соответственно к $f(x)$ и $f'(x)$. Тогда, пользуясь равенствами (2.10) и (2.11), нетрудно показать, что в результате почленного дифференцирования ряда (3.28) мы получим ряд Фурье–Лежандра функции $f'(x)$, т.е.

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{f}')_k \hat{P}_k^{0,0}(x),$$

где

$$(\hat{f}')_k = \int_{-1}^1 f'(t) \hat{P}_k^{0,0}(t) dt.$$

4. Аппроксимативные свойства предельного ряда. Частичную сумму ряда (3.28) вида

$$S_n^{-1}(f, x) = \frac{f(-1) + f(1)}{2} + \frac{f(1) - f(-1)}{2} x + \frac{1}{8}(1-x^2) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(k+2)(2k+3)}{k+1} \tilde{g}_k P_k^1(x) \quad (4.1)$$

обозначим через $S_n^{-1}(f) = S_n^{-1}(f, x)$. В случае, когда $f(\pm 1) = 0$, (4.1) приобретает вид

$$\begin{aligned} S_n^{-1}(f, x) &= \frac{1}{8}(1-x^2) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(k+2)(2k+3)}{k+1} \tilde{f}_k P_k^1(x) \\ &= \frac{1}{8}(1-x^2) \int_{-1}^1 f(t) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(k+2)(2k+3)}{k+1} P_k^1(x) P_k^1(t) dt. \end{aligned} \quad (4.1a)$$

Нетрудно увидеть, что $S_n^{-1}(f)$ представляет собой проектор на пространство H^n всех алгебраических полиномов $P_n(x)$ степени не выше n , т.е.

$$S_n^{-1}(P_n) = P_n. \quad (4.2)$$

В самом деле, из (3.25) следует, что $S_n^{-1}(f, x) = \lim_{\alpha \rightarrow -1} S_n^\alpha(f, x)$, где $S_n^\alpha(f, x)$ при $\alpha > -1$ представляет собой сумму Фурье функции $f(x)$ по ультрасферическим полиномам $\hat{P}_n^{\alpha, \alpha}(x)$, определенную равенством (3.4). Поскольку $S_n^\alpha(f, x)$ является проектором на пространство H^n , то для произвольного $P_n \in H^n$ имеем

$$S_n^{-1}(P_n) = \lim_{\alpha \rightarrow -1} S_n^\alpha(P_n) = P_n.$$

Равенство (4.2) можно доказать еще одним способом. А именно, рассмотрим выражение

$$Q_{n-2}(x) = \frac{1}{1-x^2} \left[P_n(x) - \frac{P_n(-1) + P_n(1)}{2} - \frac{P_n(1) - P_n(-1)}{2} x \right],$$

которое представляет собой алгебраический полином степени $n-2$. Представим полином $Q_{n-2}(x)$ в виде его суммы Фурье по ортонормированной системе $\{\hat{P}_k^1(x)\}_{k=0}^{n-2}$:

$$Q_{n-2}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} (Q_{n-2})_k^1 \hat{P}_k^1(x),$$

где

$$(Q_{n-2})_k^1 = \int_{-1}^1 (1-t^2) Q_{n-2}(t) \hat{P}_k^1(t) dt.$$

Подставляя это выражение в предыдущее и учитывая равенства (2.9) и (3.2), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-x^2} \left[P_n(x) - \frac{P_n(-1) + P_n(1)}{2} - \frac{P_n(1) - P_n(-1)}{2} x \right] \\ &= \frac{1}{8} \int_{-1}^1 \left[P_n(t) - \frac{P_n(-1) + P_n(1)}{2} - \frac{P_n(1) - P_n(-1)}{2} t \right] \\ & \quad \times \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(k+2)(2k+3)}{k+1} P_k^1(t) P_k^1(x) dt. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{P_n(-1) + P_n(1)}{2} + \frac{P_n(1) - P_n(-1)}{2} x \\ &+ \frac{1}{8} (1-x^2) \int_{-1}^1 \left[P_n(t) - \frac{P_n(-1) + P_n(1)}{2} + \frac{P_n(1) - P_n(-1)}{2} t \right] \\ & \quad \times \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(k+2)(2k+3)}{k+1} P_k^1(t) P_k^1(x) dt \\ &= S_n^{-1}(P_n, x). \end{aligned}$$

Тем самым, мы снова пришли к равенству (4.2). Учитывая это свойство сумм $S_n^{-1}(f, x)$, мы можем записать

$$f(x) - S_n^{-1}(f, x) = f(x) - p_n(x) + S_n^{-1}(p_n - f, x), \quad p_n \in H^n. \quad (4.3)$$

Обозначим через $E_n^{\pm 1}(f)$ наилучшее приближение функции $f(x) \in C[-1, 1]$ алгебраическими полиномами $p_n \in H^n$, которые в точках ± 1 совпадают с $f(x)$, т.е.

$$E_n^{\pm 1}(f) = \inf_{\substack{p_n \in H^n \\ p_n(\pm 1) = f(\pm 1)}} \|f - p_n\|_{C[-1, 1]}. \quad (4.4)$$

Пусть для $p_n \in H^n$ будет $E_n^{\pm 1}(f) = \|f - p_n\|$ и $p_n(\pm 1) = f(\pm 1)$. Из (3.33) и (3.34) имеем

$$\begin{aligned} |f(x) - S_n^{-1}(f, x)| &\leq |f(x) - p_n(x)| + |S_n^{-1}(p_n - f, x)| \\ &\leq E_n^{\pm 1}(f) + |S_n^{-1}(p_n - f, x)|. \end{aligned} \quad (4.5)$$

С другой стороны, так как $p_n(\pm 1) - f(\pm 1) = 0$, то из (4.1a) следует, что

$$S_n^{-1}(p_n - f, x) = \frac{1}{8}(1 - x^2) \int_{-1}^1 (p_n(t) - f(t)) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(k+2)(2k+3)}{k+1} P_k^1(x) P_k^1(t) dt. \quad (4.6)$$

Из (4.5) и (4.6) имеем

$$|f(x) - S_n^{-1}(f, x)| \leq |f(x) - p_n(x)| + E_n^{\pm 1}(f) \Lambda_n(x), \quad (4.7)$$

где

$$\Lambda_n(x) = \frac{1}{8}(1 - x^2) \int_{-1}^1 \left| \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(k+2)(2k+3)}{k+1} P_k^1(x) P_k^1(t) \right| dt. \quad (4.8)$$

Неравенства (4.5) и (4.7) приводят к задаче об исследовании поведения величины $\Lambda_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 4.1. *Имеет место следующая оценка:*

$$\Lambda_n(x) \leq c(1 + \ln(1 + n\sqrt{1 - x^2})), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

где c – абсолютная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для сокращения записей вместо n мы возьмем $n+2$ и оценим $\Lambda_{n+2}(x)$. Обратимся к формуле Кристоффеля–Дарбу (2.12), которая при $\alpha = \beta = 1$ приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} K_n^1(x, t) = K_n^{1,1}(x, t) &= \sum_{k=0}^n \frac{P_k^1(x) P_k^1(t)}{h_k^{1,1}} = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^n \frac{(k+2)(2k+3)}{k+1} P_k^1(x) P_k^1(t) \\ &= \frac{n+3}{8} \frac{P_{n+1}^1(x) P_n^1(t) - P_n^1(x) P_{n+1}^1(t)}{x - t}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Сопоставляя это равенство с (4.8), мы замечаем, что

$$\Lambda_{n+2}(x) = (1 - x^2) \int_{-1}^1 |K_n^1(x, t)| dt. \quad (4.10)$$

Поскольку в силу (2.6) $\Lambda_{n+2}(-x) = \Lambda_{n+2}(x)$, то при оценке $\Lambda_{n+2}(x)$ нам достаточно ограничиться случаем, когда $0 \leq x \leq 1$. Пусть сначала будет $0 \leq x \leq 1 - 4/n^2$. Введем обозначения

$$a = x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, \quad b = x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}.$$

Тогда в силу (4.10) мы можем записать

$$\Lambda_{n+2}(x) = I_1(x) + I_2(x) + I_3(x), \quad (4.11)$$

где

$$I_1(x) = (1-x^2) \int_{-1}^a |K_n^1(x, t)| dt, \quad I_2(x) = (1-x^2) \int_a^b |K_n^1(x, t)| dt, \\ I_3(x) = (1-x^2) \int_b^1 |K_n^1(x, t)| dt.$$

Чтобы оценить выражения $I_l(x)$ при $l = 1$ и $l = 3$, нам понадобится одно преобразование для ядра Кристоффеля–Дарбу $K_n^1(x, t) = K_n^{1,1}(x, t)$ (см. (4.9)). Для этого воспользуемся равенством (2.7), из которого находим

$$P_{n+1}^1(x) = \frac{n+2}{n+1} (P_n^1(x) - (1-x)P_n^{2,1}(x)), \quad P_{n+1}^1(t) = \frac{n+2}{n+1} (P_n^1(t) - (1-t)P_n^{2,1}(t)).$$

Подставляя эти значения в (4.9), получаем

$$K_n^1(x, t) = \frac{(n+3)(n+2)}{8(n+1)} \left[\frac{(1-t)P_n^{2,1}(t)P_n^1(x)}{x-t} + \frac{(1-x)P_n^{2,1}(x)P_n^1(t)}{x-t} \right]. \quad (4.12)$$

Оценим $I_1(x)$ при $0 \leq x \leq 1 - 4/n^2$. Имеем

$$I_1(x) = (1-x^2) \left(\int_{-1}^{-1/2} |K_n^1(x, t)| dt + \int_{-1/2}^a |K_n^1(x, t)| dt \right) = I_{11}(x) + I_{12}(x). \quad (4.13)$$

Заметим, что если $-1 < t \leq -1/2$, $0 \leq x < 1$, то из (4.9) и весовой оценки (2.13) вытекает оценка

$$(1-x^2)|K_n^1(x, t)| \leq c(1+t)^{-3/4}(1-x)^{1/4},$$

поэтому

$$I_{11}(x) \leq c(1-x^2)^{1/4}. \quad (4.14)$$

Если же $-1/2 \leq t$, $x < 1$, то (2.13) и (4.12) имеем

$$(1-x^2)|K_n^1(x, t)| \leq \frac{c}{|x-t|} [(1-t)^{-1/4}(1-x)^{1/4} + (1-t)^{-3/4}(1-x)^{3/4}] \quad (4.15)$$

и, стало быть,

$$I_{12}(x) \leq c \int_{-1/2}^a \frac{(1-x)^{1/4} dt}{(1-t)^{1/4}(x-t)} + c \int_{-1/2}^a \frac{(1-x)^{3/4} dt}{(1-t)^{3/4}(x-t)}. \quad (4.16)$$

Далее (при $0 \leq x \leq 1 - 4/n^2$),

$$\begin{aligned}
 \int_{-1/2}^a \frac{(1-x)^{1/4} dt}{(1-t)^{1/4}(x-t)} &= - \int_{-1/2}^a \frac{d(x-t)/(1-x)}{(1+(x-t)/(1-x))^{1/4}(x-t)/(1-x)} \\
 &= \int_{(1/n)\sqrt{(1-x)/(1+x)}}^{(x+1/2)/(1-x)} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{1/4}\tau} \\
 &< \int_{(1/n)\sqrt{(1-x)/(1+x)}}^1 \frac{d\tau}{\tau} + \int_1^{(x+1/2)/(1-x)} \frac{d\tau}{\tau^{1+1/4}} \\
 &< \ln\left(n\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + 4,
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-1/2}^a \frac{(1-x)^{3/4} dt}{(1-t)^{3/4}(x-t)} &= - \int_{-1/2}^a \frac{d(x-t)/(1-x)}{(1+(x-t)/(1-x))^{3/4}(x-t)/(1-x)} \\
 &= \int_{(1/n)\sqrt{(1-x)/(1+x)}}^{(x+1/2)/(1-x)} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{3/4}\tau} \\
 &< \int_{(1/n)\sqrt{(1-x)/(1+x)}}^1 \frac{d\tau}{\tau} + \int_1^{(x+1/2)/(1-x)} \frac{d\tau}{\tau^{1+3/4}} \\
 &< \ln\left(n\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + 1,
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Из (4.16)–(4.18) имеем

$$I_{12}(x) \leq c \left(1 + \ln\left(n\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \right). \tag{4.19}$$

Сопоставляя (4.13) с (4.14) и (4.19), находим

$$I_1(x) \leq c \left(1 + \ln\left(n\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \right). \tag{4.20}$$

Оценим $I_3(x)$. Для этого снова обратимся к оценке (4.15), из которой выводим

$$I_3(x) \leq c \int_b^1 \frac{(1-x)^{1/4} dt}{(1-t)^{1/4}(t-x)} + c \int_b^1 \frac{(1-x)^{3/4} dt}{(1-t)^{3/4}(t-x)} = I_{31}(x) + I_{32}(x), \tag{4.21}$$

где

$$\begin{aligned}
 I_{31}(x) &= c \int_b^1 \frac{(1-x)^{1/4} dt}{(1-t)^{1/4}(t-x)} = -c \int_b^1 \frac{d(1-t)/(1-x)}{((1-t)/(1-x))^{1/4}(1-(1-t)/(1-x))} \\
 &= c \int_0^{1-(1/n)\sqrt{(1+x)/(1-x)}} \frac{d\tau}{\tau^{1/4}(1-\tau)} \\
 &= c \left(\int_0^{1/2} + \int_{1/2}^{1-(1/n)\sqrt{(1+x)/(1-x)}} \right) \frac{d\tau}{\tau^{1/4}(1-\tau)} \\
 &\leq c \left(1 + 2^{1/4} \ln\left(\frac{n}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \right).
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
I_{32}(x) &= c \int_b^1 \frac{(1-x)^{3/4} dt}{(1-t)^{3/4}(t-x)} = -c \int_b^1 \frac{d((1-t)/(1-x))}{((1-t)/(1-x))^{3/4}(1-(1-t)/(1-x))} \\
&= c \int_0^{1-(1/n)\sqrt{(1+x)/(1-x)}} \frac{d\tau}{\tau^{1/4}(1-\tau)} \\
&= c \left(\int_0^{1/2} + \int_{1/2}^{1-(1/n)\sqrt{(1+x)/(1-x)}} \right) \frac{d\tau}{\tau^{1/4}(1-\tau)} \\
&\leq c \left(1 + 2^{3/4} \ln \left(\frac{n}{2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \right). \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Из (4.21)–(4.23) выводим

$$I_3(x) \leq c(1 + \ln(n\sqrt{1-x^2})). \tag{4.24}$$

Оценим $I_2(x)$. Пользуясь весовой оценкой (2.13), имеем

$$\begin{aligned}
I_2(x) &= (1-x^2) \int_a^b |K_n^1(x, t)| dt = (1-x^2) \int_a^b \sum_{k=0}^n \frac{1}{h_k^{1,1}} |P_k^{1,1}(x) P_k^{1,1}(t)| dt \\
&\leq \int_a^b \sum_{k=0}^n (1-x^2) \left(\sqrt{1-x} + \frac{1}{k+1} \right)^{-3/2} \left(\sqrt{1-t} + \frac{1}{k+1} \right)^{-3/2} dt \\
&\leq \sum_{k=0}^n (1-x^2)^{1/4} \int_a^b (1-t)^{-3/4} dt \leq cn(1-x^2)^{1/4} [(1-b)^{1/4} - (1-a)^{1/4}] \\
&= cn(1-x^2)^{1/4} \left[\left(1-x + \frac{1}{n} \sqrt{1-x^2} \right)^{1/4} - \left(1-x - \frac{1}{n} \sqrt{1-x^2} \right)^{1/4} \right] \\
&\leq cn(1-x^2)^{1/4} \frac{2\sqrt{1-x^2}}{n(1-x + (1/n)\sqrt{1-x^2})^{3/4}} \leq c. \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Собирая оценки (4.20), (4.24) и (4.25) и сопоставляя их с равенством (4.11), мы получаем

$$\Lambda_{n+2}(x) \leq c(1 + \ln(n\sqrt{1-x^2})), \quad 0 \leq x \leq 1 - \frac{4}{n^2}. \tag{4.26}$$

Перейдем к случаю $1 - 4/n^2 \leq x \leq 1$. В этом случае мы разобьем интеграл (4.10) по следующей схеме:

$$\Lambda_{n+2}(x) = (1-x^2) \left[\int_{-1}^{-1/2} + \int_{-1/2}^{1-8/n^2} + \int_{1-8/n^2}^1 \right] K_n^{1,1}(x, t) = J_1(x) + J_2(x) + J_3(x). \tag{4.27}$$

Применяя рассуждения, совершенно аналогичные тем, которые привели нас к оценке (4.14), получаем

$$J_1(x) \leq c(1-x^2)^{1/4}. \tag{4.28}$$

Далее, оценивая $|K_n^{1,1}(x, t)|$ с помощью неравенства (4.15), имеем

$$J_2(x) \leq c(1-x^2) + c \int_{-1/2}^{1-8/n^2} \frac{(1-x)^{1/4} dt}{(1-t)^{1/4}(x-t)} + c \int_{1-8/n^2}^1 \frac{(1-x)^{3/4} dt}{(1-t)^{3/4}(x-t)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c(1-x^2) + c \int_{-1/2}^{1-8/n^2} \frac{d(x-t)/(1-x)}{(1+(x-t)/(1-x))^{1/4}(x-t)/(1-x)} \\
&\quad + c \int_{-1/2}^{1-8/n^2} \frac{d(x-t)/(1-x)}{(1+(x-t)/(1-x))^{3/4}(x-t)/(1-x)} \\
&= c + c \int_{(x-1/2+8/n^2)/(1-x)}^{(x+1/2)/(1-x)} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{1/4}\tau} + c \int_{(x-1/2+8/n^2)/(1-x)}^{(x+1/2)/(1-x)} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{3/4}\tau} \\
&= c + J_{21}(x) + J_{22}(x), \tag{4.29}
\end{aligned}$$

где

$$J_{21}(x) = c \int_{(x-1/2+8/n^2)/(1-x)}^{(x+1/2)/(1-x)} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{1/4}\tau} \leq c \int_1^{(x+1/2)/(1-x)} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{1/4}\tau} \leq c, \tag{4.30}$$

$$J_{22}(x) = c \int_{(x-1/2+8/n^2)/(1-x)}^{(x+1/2)/(1-x)} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{3/4}\tau} \leq c \int_1^{(x+1/2)/(1-x)} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{3/4}\tau} \leq c. \tag{4.31}$$

Из (4.29)–(4.31) выводим

$$J_2(x) \leq c. \tag{4.32}$$

Оценим $J_3(x)$. Пользуясь весовой оценкой (2.13), при $1-8/n^2 \leq x, t \leq 1$ имеем

$$|K_n^1(x, t)| \leq \sum_{k=0}^n \left| \frac{P_k^{1,1}(x)P_k^{1,1}(t)}{h_k^{1,1}} \right| \leq c \sum_m (k_1)^3 \leq cn^4,$$

поэтому для $1-4/n^2 \leq x \leq 1$ находим

$$(1-x^2) \int_{1-8/n^2}^1 |K_n^1(x, t)| dt \leq cn^4(1-x) \int_{1-8/n^2}^1 dt \leq c. \tag{4.33}$$

Из (4.27), (4.28), (4.32) и (4.33) получаем при $1-4/n^2 \leq x \leq 1$

$$\Lambda_{n+2}(x) \leq c. \tag{4.34}$$

Сопоставляя оценки (4.26) и (4.34) и учитывая симметрию $\Lambda_{n+2}(-x) = \Lambda_{n+2}(x)$, мы убеждаемся в справедливости утверждения леммы 4.1.

Вернемся к неравенству (4.7) и заметим, что оно приводит к следующей оценке:

$$|f(x) - S_n^{-1}(f, x)| \leq E_n^{\pm 1}(f)(1 + \Lambda_n(x)).$$

Отсюда и из леммы 4.1 мы выводим следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $f(x) \in C[-1, 1]$. Тогда имеет место оценка

$$|f(x) - S_n^{-1}(f, x)| \leq cE_n^{\pm 1}(f)(1 + \ln(1 + n\sqrt{1-x^2})).$$

Обозначим через $E_n(f)$ наилучшее приближение функции $f \in C[-1, 1]$ алгебраическими полиномами $p_n(x)$ степени не выше n . Очевидно, что $E_n(f) \leq E_n^{\pm 1}(f)$. С другой стороны, нетрудно увидеть, что при $n \geq 1$

$$E_n^{\pm 1}(f) \leq 2E_n(f). \tag{4.35}$$

Из теоремы 4.1 с учетом (4.35) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $f(x) \in C[-1, 1]$. Тогда имеет место оценка

$$|f(x) - S_n^{-1}(f, x)| \leq cE_n(f)(1 + \ln(1 + n\sqrt{1 - x^2})).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962.

И. И. Шарапудинов

Дагестанский научный центр РАН, г. Махачкала

E-mail: sharapud@mail.ru

Поступило

11.01.2012