Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Григорьев, С. А. Молчанов, О декаплинге функций нормальных векторов. II, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 2, 310–313

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10293>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 03:45:53

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О декаплинге функций нормальных векторов. II

П. Г. Григорьев, С. А. Молчанов

1. Результаты. В работе [1] были получены следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Для нормально распределенного случайного вектора $\bar{Y} = (Y_i)_{i=1,\dots,d}$, удовлетворяющего $E Y_i = 0$, $E Y_i^2 = 1$, $i = 1, \dots, d$, выполнено

$$c^- \sum_{i=1}^d \|\varphi_i(Y_i)\|_2^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^d \varphi_i(Y_i) \right\|_2^2 \leq c^+ \sum_{i=1}^d \|\varphi_i(Y_i)\|_2^2$$

для всех измеримых функций $\varphi_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих $E \varphi_i(Y_i) = 0$ с константами c^- и c^+ , являющимися наименьшим и наибольшим собственным значением корреляционной матрицы $\bar{Y}$. Более того, эти константы являются наилучшими.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\bar{Y}_1 = (Y_{1,i})_{i=1,\dots,d_1}$ и $\bar{Y}_2 = (Y_{2,j})_{j=1,\dots,d_2}$ являются стандартными нормальными векторами с корреляциями

$$E Y_{\alpha,i} Y_{\beta,j} = \begin{cases} 0, & \alpha = \beta, i \neq j, \\ 1, & \alpha = \beta, i = j, \\ \rho_{i,j}, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Тогда оценка

$$c_- (\|\varphi_1(\bar{Y}_1)\|_2^2 + \|\varphi_2(\bar{Y}_2)\|_2^2) \leq \|\varphi_1(\bar{Y}_1) + \varphi_2(\bar{Y}_2)\|_2^2 \leq c_+ (\|\varphi_1(\bar{Y}_1)\|_2^2 + \|\varphi_2(\bar{Y}_2)\|_2^2)$$

имеет место для всех измеримых функций $\varphi_\alpha: \mathbb{R}^{d_\alpha} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих $E \varphi_\alpha(\bar{Y}_\alpha) = 0$, $\alpha = 1, 2$, с константами $c_\pm = 1 \pm s^*$, где s^* – максимальное сингулярное значение матрицы $R = (\rho_{i,j})_{i=1,\dots,d_1, j=1,\dots,d_2}$. Эти константы не могут быть улучшены.

Эти теоремы уточняли оценки, использованные Чёрным и др. [2], [3]. Здесь мы обобщим эти результаты и докажем следующее.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\bar{Y}_\alpha = (Y_{\alpha,i})_{i=1,\dots,d_\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, N$, являются стандартными нормальными векторами с корреляциями

$$E Y_{\alpha,i} Y_{\beta,j} = \begin{cases} 0, & \alpha = \beta, i \neq j, \\ 1, & \alpha = \beta, i = j, \\ \rho_{i,j}^{\alpha,\beta}, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Тогда

$$C_- \sum_{\alpha=1}^N \|\varphi_\alpha(\bar{Y}_\alpha)\|_2^2 \leq \left\| \sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha(\bar{Y}_\alpha) \right\|_2^2 \leq C_+ \sum_{\alpha=1}^N \|\varphi_\alpha(\bar{Y}_\alpha)\|_2^2 \quad (1)$$

для всех измеримых функций $\varphi_\alpha: \mathbb{R}^{d_\alpha} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих $E\varphi_\alpha(\bar{Y}_\alpha) = 0$ при всех $\alpha = 1, \dots, N$. Здесь константы $C_\pm = 1 \pm \sigma_0$, где σ_0 является наибольшим собственным значением матрицы $S^* = (s_{\alpha,\beta}^*)_{1 \leq \alpha, \beta \leq N}$, а $s_{\alpha,\beta}^*$ обозначают максимальные сингулярные значения матриц $R^{\alpha,\beta} = (r_{i,j}^{\alpha,\beta})_{i=1,\dots,d_\alpha, j=1,\dots,d_\beta}$ при $\alpha \neq \beta$ и $s_{\alpha,\alpha}^* := 0$.

Отметим, что в отличие от теорем 1 и 2, дающих оценки декаплинга с точными константами, теорема 3 дает лишь грубую оценку с неоптимальными константами (в частности, C_- может быть отрицательной). Однако ввиду описанных в [2], [3] приложений верхняя оценка из (1) достаточно интересна.

2. Доказательство теоремы 3. Доказательство теоремы 3 проводится по схеме, использованной в [1]. Мы введем обозначения, использованные в [1] и позаимствованные из [4].

Для $k = 0, 1, \dots$ определим полиномы Вика $:x^k:$ посредством разложения

$$\exp\left(ax - \frac{a}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{:x^k:}{k!}.$$

(Полиномы Вика совпадают с нормированными определенным образом полиномами Эрмита, они используются в математической физике. Эти обозначения представляются нам удобными в многомерном случае.)

Пусть $\bar{k} = (k_1, \dots, k_d)$ обозначает d -мерный вектор неотрицательных индексов. Положим

$$|\bar{k}| := k_1 + \dots + k_d, \quad \bar{k}! := k_1! k_2! \dots k_d!, \\ \bar{a}^{\bar{k}} := a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_d^{k_d} \quad \text{для} \quad \bar{a} := (a_i)_{i=1,\dots,d} \in \mathbb{R}^d.$$

Для векторной переменной $\bar{x} = (x_k)_{k=1}^d$ мы определим *многомерный полином Вика* формулой

$$:\bar{x}^{\bar{k}}: \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^d :x_i^{k_i}:$$

Хорошо известно (см. например [4]), что для стандартного d -мерного гауссова вектора $\bar{Y}$ система $\{\bar{k}!^{-1/2} : \bar{Y}^{\bar{k}} : \}_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_0^d}$ является ортонормальным базисом в пространстве L_2 , образованном квадратично-интегрированными функциями $f(\bar{Y})$. Таким образом, для всех $\alpha = 1, \dots, N$ имеем

$$\varphi_\alpha(\bar{Y}_\alpha) = \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_0^{d_\alpha}} a_{\alpha, \bar{k}} \frac{: \bar{Y}_\alpha^{\bar{k}} :}{\bar{k}!^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathbb{Z}_0^{d_\alpha} \\ |\bar{k}|=n}} a_{\alpha, \bar{k}} \frac{: \bar{Y}_\alpha^{\bar{k}} :}{\bar{k}!^{1/2}}$$

и, следовательно,

$$\sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha(\bar{Y}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\bar{k}_\alpha \in \mathbb{Z}_0^{d_\alpha} \\ |\bar{k}_\alpha|=n}} a_{\alpha, \bar{k}_\alpha} \frac{: \bar{Y}_\alpha^{\bar{k}_\alpha} :}{\bar{k}_\alpha!^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^N P_n(\bar{Y}_\alpha),$$

где

$$P_n(\bar{Y}_\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{\bar{k}_\alpha \in \mathbb{Z}_0^{d_\alpha} \\ |\bar{k}_\alpha|=n}} a_{\alpha, \bar{k}_\alpha} \frac{: \bar{Y}_\alpha^{\bar{k}_\alpha} :}{\bar{k}_\alpha!^{1/2}}.$$

В частности,

$$\sum_{\alpha=1}^N \|\varphi_{\alpha}(\bar{Y}_{\alpha})\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^N \|P_n(\bar{Y}_{\alpha})\|_2^2.$$

Хорошо известно, что $P_{n_1}(\bar{Y}_{\alpha})$ и $P_{n_2}(\bar{Y}_{\beta})$ ортогональны при $n_1 \neq n_2$ (см., например, [1]). Следовательно, чтобы доказать (1) для произвольных φ_{α} , достаточно доказать (1) при $\phi_{\alpha}(\bar{Y}_{\alpha}) = P_n(\bar{Y}_{\alpha})$ для всех $n = 0, 1, \dots$.

Для фиксированного n имеем

$$\left\| \sum_{\alpha=1}^N P_n(\bar{Y}_{\alpha}) \right\|_2^2 = \sum_{\alpha=1}^N \|P_n(\bar{Y}_{\alpha})\|_2^2 + 2 \sum_{\alpha < \beta} \mathbb{E}[P_n(\bar{Y}_{\alpha}) P_n(\bar{Y}_{\beta})]. \quad (2)$$

Зафиксируем пару $\alpha < \beta$. Пусть $R^{\alpha, \beta} = U \Sigma V^T$ является сингулярным разложением матрицы $R^{\alpha, \beta}$ (напомним, что здесь Σ является $d_{\alpha} \times d_{\beta}$ диагональной матрицей с сингулярными значениями $R^{\alpha, \beta}$ на диагонали, а U, V – ортогональные матрицы соответствующих размеров). Пусть $\bar{Z}_1 \stackrel{\text{def}}{=} U \bar{Y}_{\alpha}$ и $\bar{Z}_2 \stackrel{\text{def}}{=} V \bar{Y}_{\beta}$ (все векторы предполагаются столбцами). Это преобразование может быть записано в блочно-матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \bar{Z}_1 \\ \bar{Z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Y}_{\alpha} \\ \bar{Y}_{\beta} \end{pmatrix}$$

с очевидно ортогональной $(d_{\alpha} + d_{\beta}) \times (d_{\alpha} + d_{\beta})$ трансформационной матрицей. Из этого следует, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[P_n(\bar{Y}_{\alpha}) P_n(\bar{Y}_{\beta})] &= \mathbb{E}[P_n(\bar{Z}_1) P_n(\bar{Z}_2)] \\ &= \sum_{\substack{\bar{k}_{\alpha} \in \mathbb{Z}_0^{d_{\alpha}} \\ |\bar{k}_{\alpha}|=n}} \sum_{\substack{\bar{k}_{\beta} \in \mathbb{Z}_0^{d_{\beta}} \\ |\bar{k}_{\beta}|=n}} a_{\alpha, \bar{k}_{\alpha}} a_{\beta, \bar{k}_{\beta}} \mathbb{E} \frac{:\bar{Z}_1^{\bar{k}_{\alpha}}:}{\bar{k}_{\alpha}!^{1/2}} \frac{:\bar{Z}_2^{\bar{k}_{\beta}}:}{\bar{k}_{\beta}!^{1/2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что ковариационная структура $(\bar{Z}_1, \bar{Z}_2)$ относительно проста; ковариационная матрица выглядит как

$$\begin{pmatrix} I_{d_{\alpha}} & \Sigma \\ \Sigma^T & I_{d_{\beta}} \end{pmatrix}.$$

Не умаляя общности, мы можем предположить, что $d_{\alpha} \geq d_{\beta}$, т.е. векторы $\bar{Y}_{\alpha}$ упорядочены в соответствии со своими размерностями. Примем соглашение, что векторы индексов (возможно) разных размерностей равны ($\bar{k}_{\alpha} = \bar{k}_{\beta}$), если более короткий вектор $\bar{k}_{\beta}$ совпадает с первыми d_{β} элементами k_{α} , а остальные элементы k_{α} – нули. Также обозначим через $\bar{s}$ вектор диагональных элементов Σ (он же вектор сингулярных значений $R^{\alpha, \beta}$).

Используя лемму 3.1 из [1] (для случая диагональной R , см. также формулу (3.5) в [1]), получим

$$\mathbb{E}:\bar{Z}_1^{\bar{k}_{\alpha}}::\bar{Z}_2^{\bar{k}_{\beta}}:= \begin{cases} 0, & \bar{k}_{\alpha} \neq \bar{k}_{\beta}, \\ \bar{k}_{\beta}! \bar{s}^{\bar{k}_{\beta}}, & \bar{k}_{\alpha} = \bar{k}_{\beta}. \end{cases} \quad (4)$$

С помощью (4) из (3) получим

$$\mathbb{E}[P_n(\bar{Y}_{\alpha}) P_n(\bar{Y}_{\beta})] = \sum_{\substack{\bar{k}_{\beta} \in \mathbb{Z}_0^{d_{\beta}}, \bar{k}_{\alpha} \in \mathbb{Z}_0^{d_{\alpha}} \\ |\bar{k}_{\beta}|=n, k_{\alpha}=\bar{k}_{\beta}}} a_{\alpha, \bar{k}_{\alpha}} a_{\beta, \bar{k}_{\beta}} \bar{s}^{\bar{k}_{\beta}}.$$

Принимая во внимание, что сингулярные значения лежат в $[0, 1]$ (так как они являются корреляциями), мы можем оценить

$$\begin{aligned} |E[P_n(\bar{Y}_\alpha)P_n(\bar{Y}_\beta)]| &\leq s_{\alpha,\beta}^* \sum_{\substack{\bar{k}_\beta \in \mathbb{Z}_0^{d_\beta}, \bar{k}_\alpha \in \mathbb{Z}_0^{d_\alpha} \\ |\bar{k}_\beta|=n, k_\alpha=\bar{k}_\beta}} |a_{\alpha,\bar{k}_\alpha} a_{\beta,\bar{k}_\beta}| \\ &\leq s_{\alpha,\beta}^* \left(\sum_{\substack{\bar{k}_\alpha \in \mathbb{Z}_0^{d_\alpha} \\ |\bar{k}_\alpha|=n}} a_{\alpha,\bar{k}_\alpha}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\substack{\bar{k}_\beta \in \mathbb{Z}_0^{d_\beta} \\ |\bar{k}_\beta|=n}} a_{\beta,\bar{k}_\beta}^2 \right)^{1/2} = s_{\alpha,\beta}^* \|P_n(\bar{Y}_\alpha)\|_2 \|P_n(\bar{Y}_\beta)\|_2. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (2), получим

$$\left| \left\| \sum_{\alpha=1}^N P_n(\bar{Y}_\alpha) \right\|_2^2 - \sum_{\alpha=1}^N \|P_n(\bar{Y}_\alpha)\|_2^2 \right| \leq 2 \sum_{\alpha < \beta} s_{\alpha,\beta}^* \|P_n(\bar{Y}_\alpha)\|_2 \|P_n(\bar{Y}_\beta)\|_2.$$

Стандартные приемы линейной алгебры гарантируют, что правая часть ограничена величиной $\sigma_0 \sum_{\alpha=1}^N \|P_n(\bar{Y}_\alpha)\|_2^2$, где σ_0 есть наибольшее значение матрицы S^* . Получим, что при фиксированном n оценка (1) выполнена для $\phi_\alpha(\bar{Y}_\alpha) = P_n(\bar{Y}_\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, N$, с $C_\pm = 1 \pm \sigma_0$. Как уже было отмечено, это влечет, что (1) имеет место для всех ϕ_α с теми же константами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. Г. Григорьев, С. А. Молчанов, *Матем. заметки*, **92:3** (2012), 401–409.
 [2] A. Cherny, R. Douady, S. Molchanov, *Finance Stoch.*, **14:3** (2010), 375–395.
 [3] A. Cherny, R. Douady, S. Molchanov, *On Measuring Hedge Fund Risk*, Preprint, <http://mech.math.msu.su/~cherny/papers.html>. [4] В. А. Малышев, Р. А. Минлос, *Гиббсовские случайные поля. Методы кластерных раздожений*, Наука, М., 1985.

П. Г. Григорьев

University of North Carolina Charlotte, США

E-mail: thepavel@mail.ru

Поступило

25.11.2012

С. А. Молчанов

University of North Carolina Charlotte, США

E-mail: smolchan@uncc.edu