Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Севастьянов, А. А. Долгобородов, Письмо в редакцию, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 2, 317–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10294>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:15:49

Письмо в редакцию

Е. А. Севастьянов, А. А. Долгобородов

В работе авторов [1] уточнялись некоторые известные характеристики нулевых множеств $\{z_n(f)\}$ функций f из пространств Бергмана A_φ^p с весом $\varphi(t)$. При этом была допущена ошибка, приведшая к неверным формулировкам в той части работы [1], которая касается последовательностей $\{n_k\}$, для которых выполняется соотношение

$$1 - |z_{n_k}(f)| \sim \frac{1}{p} \cdot \frac{\log \Phi(n_k)}{n_k}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Приведем необходимые обозначения, укажем, в чем состояла ошибка, и внесем исправления в выбор последовательностей $\{n_k\}$.

Пространство Бергмана A_φ^p , $0 < p < \infty$, с весом $\varphi(t)$ – это пространство функций $f(z)$, $z = x + iy = re^{i\theta}$, аналитических в единичном круге $|z| < 1$, таких, что

$$\left(\frac{1}{\pi} \iint_{|z| < 1} |f(z)|^p \varphi(1 - r^2) dx dy \right)^{1/p} < \infty.$$

Пусть $\varphi(t)$ – положительная суммируемая на $(0, 1]$ функция, удовлетворяющая Δ_2 -условию, т.е. $\varphi(2t) \leq c\varphi(t)$ при $t \in (0, 1/2]$ и некоторой постоянной $c > 0$; положим

$$\Phi(u) = \left(\int_0^{1/u} \varphi(t) dt \right)^{-1}, \quad u \geq 1.$$

Пусть $\{z_k(f)\}_{k=1}^\infty$ – упорядоченная в порядке неубывания модулей последовательность нулей функции $f \in A_\varphi^p$, причем каждый нуль участвует в последовательности столько раз, какова его кратность.

В [1] было доказано (см. в [1] лемму 8) следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $p \geq 2$, $1 = \gamma_0 > \gamma_1 > \dots > \gamma_k > 0$, $\gamma_0 + \gamma_1 + \dots < \infty$. Положим

$$b_1 = 1, \quad b_{k+1} = \gamma_k^{-(p-1)/p} \prod_{j=1}^k b_j, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Определим числа $\tilde{n}_k$ для тех k , для которых $b_{k+1}^p \geq \Phi(1)$, из равенства

$$\Phi(\tilde{n}_k) = b_{k+1}^p, \quad (3)$$

а для остальных k , $k \leq s$, по определению $\tilde{n}_0 = \dots = \tilde{n}_s = 1$. Положим $n_1 = 0$, $n_k = \max\{\lceil \tilde{n}_k \rceil, n_{k-1} + 1\}$, $k = 2, 3, \dots$,

$$f(z) = \prod_{k=2}^\infty (1 + b_k z^{n_k - n_{k-1}}).$$

Тогда $f \in A_{\varphi(t)}^p$ и при всех $k > s$ имеем

$$\log \frac{1}{|z_{n_k}(f)|} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{n_k - n_{k-1}} \log \Phi(\tilde{n}_k), \quad n_k = \lceil \tilde{n}_k \rceil. \quad (4)$$

Из формул (2) и (3) следует, что

$$\Phi(\tilde{n}_{k-1}) = \left(\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}} \right)^{p-1} \Phi(\tilde{n}_k) \right)^{1/2}, \quad k > s,$$

так что

$$\log \Phi(\tilde{n}_{k-1}) \sim \frac{1}{2} \log \Phi(\tilde{n}_k), \quad k \rightarrow \infty$$

(если, например, $\gamma_{k-1}/\gamma_k \leq \text{const}$). В [1] ошибочно указано $\log \Phi(\tilde{n}_{k-1}) \sim \log \Phi(n_k)$, $k \rightarrow \infty$ (см. в [1] последнюю строку в формулировке леммы 8). На основании этого сделан вывод (см. в [1] теорему 4), что если последовательность номеров n_k такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\Phi(n_k)} \prod_{j=1}^{k-1} \Phi(n_j) \right)^{1/(p-1)} < \infty \quad (5)$$

и члены ряда (5) убывают, то существует функция $f \in A_{\varphi(t)}^p$, $p \geq 2$, для которой выполняется соотношение (1). В действительности же условие (5) гарантирует существование функции $f \in A_{\varphi(t)}^p$, для которой

$$1 - |z_{n_k}(f)| \sim \frac{1}{2p} \frac{\log \Phi(n_k)}{n_k}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Можно показать, что построенная в утверждении 1 функция f при $p = 2$ обладает определенными экстремальными свойствами, являясь так называемой “пограничной” функцией в $A_{\varphi(t)}^2$ — см. [2].

Укажем, основываясь на результатах работы [1], условия на последовательность $\{n_k\}$, обеспечивающие соотношение (1) и уточняющие его (при $p \geq 2$).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $p \geq 2$, $1 > \gamma_0 > \gamma_1 > \dots > \gamma_k > 0$, $\gamma_0 + \gamma_1 + \dots < \infty$, $a_k \in (0, 1/2]$, $k = 1, 2, \dots$, $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$, $\Phi(\tilde{n}_0) \geq 1$. Определим $\tilde{n}_k$, $k = 1, 2, \dots$, из равенства

$$\Phi(\tilde{n}_k)^{a_k} = \left(\frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_k} \right)^{p-1} \Phi(\tilde{n}_{k-1}), \quad (6)$$

и пусть

$$\frac{\Phi(\tilde{n}_k)}{\Phi(\tilde{n}_{k-1})} \uparrow \infty, \quad k \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Положим $n_k = \max\{\tilde{n}_k, n_{k-1} + 1\}$, $k = 1, 2, \dots$,

$$b_k = \Phi(\tilde{n}_k)^{(1-a_k)/p}, \quad (8)$$

$$f(z) = \prod_{s=1}^{\infty} (1 + b_s z^{n_s - n_{s-1}}). \quad (9)$$

Тогда $f \in A_{\varphi(t)}^p$ и при достаточно больших k выполняется равенство

$$\log \frac{1}{|z_{n_k}(f)|} = \frac{1 - a_k}{p} \cdot \frac{1}{n_k - n_{k-1}} \log \Phi(\tilde{n}_k). \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (7) следует (см. лемму 4 в [1]), что при всех достаточно больших k

- 1) $n_k > 2n_{k-1}$;
- 2) $\Phi(n_k) \leq c_{\Phi} \Phi(n_k - n_{k-1})$.

Из (8) и соотношения $\log \Phi(u) = o(u)$, $u \rightarrow \infty$, вытекающего из Δ_2 -условия, наложенного на функцию $\varphi(t)$, следует, что

- 3) $(n_k - n_{k-1})^{-1} \log b_k \rightarrow 0$.

Поэтому $b_k^{1/(n_k - n_{k-1})} \rightarrow 1$ и произведение (9) сходится в круге $|z| < 1$.

Заметим, что имеет место также свойство

$$4) \sum b_k^{-p/(p-1)} < \infty.$$

Действительно, в силу (8), (6), а также того, что $a_k \in (0, 1/2]$, имеем

$$\left(\frac{b_{k-1}}{b_k}\right)^{p/(p-1)} = \left(\frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}\right)^{(1-a_k)/a_k} \Phi(\tilde{n}_{k-1})^{(2-a_{k-1}-1/a_k)/(p-1)} \leq \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}.$$

Отсюда и из условия $\sum \gamma_k < \infty$ получаем 4).

При доказательстве леммы 7 из [1] было установлено, что если выполняются условия 1)–4), то для коэффициентов Тейлора $a_k(g)$ функции

$$g(z) = \prod_{k=r}^{\infty} (1 + b_k z^{n_k - n_{k-1}}),$$

где r достаточно велико, выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(g)|^{p/(p-1)} \Phi(k)^{-1/(p-1)} \\ \leq \Phi(n_r - n_{r-1})^{-1/(p-1)} |a_{n_r - n_{r-1}}|^{p/(p-1)} + c_{\Phi}(p) \sum_{s=r+1}^{\infty} \Phi(\tilde{n}_s)^{-1/(p-1)} \prod_{k=r}^s b_k^{p/(p-1)} \end{aligned} \quad (11)$$

(см. в [1] формулы (5.7)–(5.9)).

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} \Phi(\tilde{n}_s)^{-1/(p-1)} \prod_{k=1}^s b_k^{p/(p-1)} &= \Phi(\tilde{n}_s)^{1/(1-p)} \prod_{k=1}^s \Phi(\tilde{n}_k)^{(1-a_k)/(p-1)} \\ &= \left(\frac{1}{\Phi(\tilde{n}_s)^{a_s}} \prod_{k=1}^{s-1} \Phi(\tilde{n}_k)^{1-a_k} \right)^{1/(p-1)} \\ &= \left(\frac{\Phi(\tilde{n}_{s-1})}{\phi(\tilde{n}_s)^{a_s}} \cdot \frac{\Phi(\tilde{n}_{s-2})}{\Phi(\tilde{n}_{s-1})^{a_{s-1}}} \cdots \frac{\Phi(\tilde{n}_1)}{\Phi(\tilde{n}_2)^{a_2}} \cdot \frac{1}{\Phi(\tilde{n}_1)^{a_1}} \right)^{1/(p-1)} \\ &= \frac{\gamma_s}{\gamma_{s-1}} \cdot \frac{\gamma_{s-1}}{\gamma_{s-2}} \cdots \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \Phi(\tilde{n}_1)^{-a_1/(p-1)} = c_1 \gamma_s, \end{aligned} \quad (12)$$

где $c_1 = \gamma_1^{-1} \cdot \Phi(\tilde{n}_1)^{-a_1/(p-1)}$.

Отсюда, из (11) и условия $\sum \gamma_k < \infty$ следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(g)|^{p/(p-1)} \Phi(k)^{-1/(p-1)}.$$

По лемме 5 из [1] $g \in A_{\varphi}^p$, а следовательно, и $f \in A_{\varphi}^p$. При этом

$$\begin{aligned} |z_{n_{s-1}+1}(f)| &= \cdots = |z_{n_s}(f)| = \left(\frac{1}{b_s}\right)^{1/(n_s - n_{s-1})}, \\ \log \frac{1}{|z_{n_s}(f)|} &= \frac{1}{n_s - n_{s-1}} \log b_s = \frac{1 - a_s}{p} \cdot \frac{\log \Phi(\tilde{n}_s)}{n_s - n_{s-1}}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Поскольку в силу (12)

$$\gamma_s = \frac{1}{c_1} \left(\frac{1}{\Phi(\tilde{n}_s)} \prod_{k=1}^s \Phi(\tilde{n}_k)^{1-a_k} \right)^{1/(p-1)},$$

то из утверждения 2 получим предложение, которым следует заменить теорему 4 в [1] (соответствующим образом следует изменить в [1] и формулировку случая $\varphi(t) = t^\alpha$ – см. в [1] замечание 5).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для любого веса $\varphi(t) \in \Delta_2$, любой последовательности $a_k \rightarrow +0$, любой последовательности номеров n_k такой, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\Phi(n_k)^{a_k}} \prod_{j=1}^{k-1} \Phi(n_j)^{1-a_j} \right)^{1/(p-1)} < \infty, \quad p \geq 2, \quad (13)$$

и такой, что члены ряда (13) убывают, существует функция $f \in A_{\varphi(t)}^p$, $f(0) = 1$, для которой при достаточно больших k

$$\log \frac{1}{|z_{n_k}(f)|} > \frac{1-a_k}{p} \cdot \frac{\log \Phi(n_k)}{n_k}, \quad (14)$$

в частности,

$$1 - |z_{n_k}(f)| \sim \frac{1}{p} \cdot \frac{\log \Phi(n_k)}{n_k}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Заметим, что при этом для любой функции $f \in A_{\varphi(t)}^p$

$$1 - |z_n(f)| = \frac{1}{p} \cdot \frac{\log(\varepsilon_n(f)\Phi(n))}{n},$$

где $\varepsilon_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (см. в [2] теорему 1). Из результатов работы [2] следует также, что условие (13) при $p = 2$ является наилучшим для справедливости неравенства (14).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. А. Севастьянов, А. А. Долгобородов, *Матем. заметки*, **86:1** (2009), 95–109.
 [2] Е. А. Севастьянов, А. А. Долгобородов, *Матем. заметки*, **94:2** (2013), 279–294.

Е. А. Севастьянов

Национальный исследовательский
 ядерный университет “МИФИ”, г. Москва
E-mail: sevastianov.e.a@mail.ru

Поступило

02.09.2012

А. А. Долгобородов

Национальный исследовательский
 ядерный университет “МИФИ”, г. Москва
E-mail: kzander@mail.ru