Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Тараканов, Новые серии рациональных аппроксимаций и некоторые их применения, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 2, 237–257

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm103>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 10:42:14

УДК 519.6+511

НОВЫЕ СЕРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

В. Е. Тараканов

Рассматривается известная задача дискретного логарифмирования в конечном простом поле $GF(p)$, p – простое число, имеющая ряд приложений в вопросах защиты информации. В п. 1 вводятся и изучаются некоторые числовые последовательности, возникающие при разложении вещественного числа в цепную дробь. Полученные результаты применяются в п. 2, где вводится новый алгоритм, основанный на рациональных аппроксимациях, для решения задачи представления дискретного логарифма данного числа в виде суммы логарифмов малых простых чисел; эта задача является важнейшей составной частью задачи дискретного логарифмирования. Получен ряд результатов, необходимых для построения и обоснования алгоритма представления. Точная формулировка этого алгоритма дается в п. 3. Приводятся некоторые экспериментальные результаты, иллюстрирующие работу алгоритма в случае простых чисел порядков 10^{16} – 10^{31} .

Библиография: 6 названий.

Используемые в работе теоретико-числовые понятия см. в книге [1], терминологию и результаты, касающиеся рациональной аппроксимации, см. в книге [2].

Пусть p – заданное простое, v – любое целое число, $0 < v < p$, t – представитель смежного класса, являющегося образующим элементом мультипликативной группы конечного простого поля $GF(p)$. *Дискретным логарифмом* (или *индексом*) числа v по модулю p называется наименьшее целое положительное число $\lg v$ со свойством

$$t^{\lg v} \equiv v \pmod{p}.$$

Нахождение эффективного способа вычисления $\lg v$ для больших (с несколькими десятками десятичных знаков) чисел p является весьма трудной задачей. Она имеет немаловажное практическое значение, так как на ее большой вычислительной сложности основан целый ряд известных систем защиты информации (см. [3]–[5]). Наиболее распространенные современные алгоритмы основаны на сложных алгебраических и теоретико-числовых конструкциях и включают такие составные части, как разложение на множители больших целых чисел и вероятностные алгоритмы поиска эллиптических кривых над $GF(p)$ с порядком, делящимся лишь на произведения малых простых чисел (см. [5]–[6]). Все они представляют собой вероятностные алгоритмы и имеют субэкспоненциальную по $\log p$ сложность.

Работа выполнена при частичной поддержке государственной программы “Ведущие научные школы”, грант НШ-1758.2003.1.

Мы представляем здесь алгоритм для решения важнейшей составной части задачи дискретного логарифмирования – задачи нахождения представлений $\lg v$ в виде суммы дискретных логарифмов малых простых чисел. В отличие от упомянутых выше алгоритмов он основан лишь на теории рациональной аппроксимации вещественных чисел. Алгоритм также носит вероятностный характер, он имеет весьма простую логическую структуру. Мы полагаем, что представленный алгоритм может послужить основой для построения эффективного вероятностного алгоритма дискретного логарифмирования.

В п. 1 мы вводим и изучаем некоторые новые объекты, связанные с разложениями вещественных чисел в цепную дробь. В п. 2 приводится ряд результатов, необходимых для построения и, вместе с результатами п. 1, обоснования алгоритма представления $\lg v$ в виде суммы логарифмов малых простых чисел. В п. 3 мы формулируем этот алгоритм. Приводятся также иллюстрации действий по нему и некоторые результаты проведенных численных экспериментов для простых чисел p порядков 10^{15} – 10^{30} .

1. Свойства цепных дробей. В наших рассуждениях будем опираться на книгу [2]. Пусть γ – вещественное число, $0 < \gamma < 1$; если γ рационально, то оно берется в своем несократимом представлении. Для γ строятся две последовательности: $a_0 = 0, a_1, a_2, \dots$ и $\gamma_0 = \gamma^{-1}, \gamma_1, \gamma_2, \dots$:

$$a_i = [\gamma_{i-1}^{-1}], \quad \gamma_i = \gamma_{i-1}^{-1} - a_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Члены последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$ называются *элементами* цепной дроби, изображающей γ . Далее рассматривается последовательность $\{k_i/e_i\}, i = 0, 1, 2, \dots$:

$$k_0 = 0, \quad k_1 = 1, \quad e_0 = 1, \quad e_1 = a_1, \quad (1)$$

$$k_n = a_n k_{n-1} + k_{n-2}, \quad (2)$$

$$e_n = a_n e_{n-1} + e_{n-2}, \quad n \geq 2. \quad (3)$$

Получающиеся согласно (1)–(3) несократимые дроби $k_n/e_n, n = 0, 1, 2, \dots$ дают наилучшие приближения γ рациональными числами, т.е. для любого n справедливо $|k_n/e_n - \gamma| < |r/s - \gamma|$, если $s \leq e_n, r/s \neq k_n/e_n$. Дробь k_n/e_n называется *n-й приближающей дробью* для γ , а нахождение последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$ – *разложением γ в цепную дробь*. Справедливы следующие утверждения.

1) Для $n \geq 2$ выполнено

$$e_n k_{n-1} - k_n e_{n-1} = (-1)^n. \quad (4)$$

2) Для $n \geq 2$ выполнено

$$e_n k_{n-2} - k_n e_{n-2} = (-1)^{n-1} a_n. \quad (5)$$

3) Последовательность подходящих дробей для γ конечна тогда и только тогда, когда γ рационально; в этом случае ее последний член совпадает с γ .

4) Для любого четного $n \geq 2$ и целого $r \geq 1$

$$\frac{k_{n-2r}}{e_{n-2r}} < \dots < \frac{k_{n-2}}{e_{n-2}} \leq \gamma \leq \frac{k_{n-1}}{e_{n-1}} < \frac{k_{n-3}}{e_{n-3}} < \dots < \frac{k_{n-2r-1}}{e_{n-2r-1}}; \quad (6)$$

равенство в (6) достигается лишь при рациональном γ – для последней подходящей дроби (см. (3)).

Напомним еще два общих закона рациональной аппроксимации вещественных чисел, установленных с помощью теории цепных дробей.

I. Для любого иррационального числа σ и любого вещественного числа τ неравенство $|\sigma x - y - \tau| < 3/x$ имеет бесконечное число решений в целых числах x и y , $x > 0$.

II. Для того чтобы существовало положительное число C , обладающее тем свойством, что при любых вещественных $n \geq 1$ и τ найдется пара целых чисел x и y , $x > 0$, удовлетворяющих неравенствам

$$x \leq Cn, \quad |\sigma x - y - \tau| < \frac{1}{n},$$

необходимо и достаточно, чтобы σ представлялось цепной дробью с ограниченными элементами.

ЗАМЕЧАНИЕ. Эти общие законы аппроксимации сформулированы для иррациональных чисел σ . Однако они при надлежащей интерпретации имеют отношение и к рассматриваемым в работе рациональным числам γ , $0 < \gamma < 1$, если те имеют большое число знаков в десятичном разложении, так как такие рациональные γ можно фактически задать лишь приближенно, с достаточной для наших целей степенью точности, а это приближенное значение $\tilde{\gamma} \approx \gamma$ с не меньшей степенью точности аппроксимируется бесконечными цепными дробями с ограниченными элементами.

Наряду с подходящими дробями в теории цепных дробей рассматриваются также промежуточные дроби, определяемые для всех $n \geq 2$ при $a_n > 1$. Для $n \geq 2$ рассмотрим последовательность R_n :

$$R_n(i) = \frac{k_{n-2} + ik_{n-1}}{e_{n-2} + ie_{n-1}}, \quad i = 0, 1, \dots, a_n. \quad (7)$$

Ясно, что $R_n(0) = k_{n-2}/e_{n-2}$, $R_n(a_n) = k_n/e_n$ (см. (2), (3)), т.е. в R_n входят $(n-2)$ -я и n -я подходящие дроби. Члены (7) с $i = 1, 2, \dots, a_n - 1$ называются n -ми промежуточными дробями. Из общей теории аппроксимации известно, что любое наилучшее приближение вещественного числа есть либо подходящая, либо промежуточная дробь. Из (7) непосредственно выводится, что

$$\begin{aligned} \frac{k_{n-2}}{e_{n-2}} < R_n(i) < \frac{k_n}{e_n}, & \text{ если } n \text{ четно,} \\ \frac{k_{n-2}}{e_{n-2}} > R_n(i) > \frac{k_n}{e_n}, & \text{ если } n \text{ нечетно,} \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, a_{n-1}.$$

Мы введем теперь обобщенные промежуточные дроби как некоторые бесконечные последовательности положительных рациональных дробей. Они, вообще говоря, не дают наилучших приближений, однако, как мы покажем, позволяют получать бесконечно много приближений заданной точности для любого вещественного числа σ .

Пусть $s > 0, t$ – целые числа, $\text{НОД}(s, t) = 1, n \geq 2$ – заданное целое число, $k_{n-2}/e_{n-2}, k_{n-1}/e_{n-1}, k_n/e_n$ – подходящие дроби для данного вещественного числа γ . Рассмотрим две последовательности $R_n^{(s,t)} = (R_n^{(s,t)}(i)), R_n'^{(s,t)} = (R_n'^{(s,t)}(i)), i = 1, 2, \dots$, где

$$R_n^{(s,t)}(i) = \frac{isk_{n-1} + tk_{n-2}}{ise_{n-1} + te_{n-2}}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$$R_n'^{(s,t)}(i) = \frac{sk_{n-1} + itk_{n-2}}{se_{n-1} + ie_{n-2}}, \quad i = 1, 2, \dots. \quad (9)$$

Положительные члены последовательностей $R_n^{(s,t)}, R_n'^{(s,t)}$ назовем n -ми (s, t) -промежуточными дробями для γ .

Установим ряд свойств последовательностей $R_n^{(s,t)}, R_n'^{(s,t)}$. Если $t > 0$, то все их члены положительны, следовательно, представляют собой n -е (s, t) -промежуточные дроби.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $t < 0$.

а) Члены последовательности $R_n^{(s,t)}$ положительны всюду, кроме значений i , принадлежащих интервалу

$$\left(\frac{|t|}{s} \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}}, \frac{|t|}{s} \frac{e_{n-2}}{e_{n-1}} \right)$$

при четном n и интервалу

$$\left(\frac{|t|}{s} \frac{e_{n-2}}{e_{n-1}}, \frac{|t|}{s} \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} \right)$$

при n нечетном.

б) Члены последовательности $R_n'^{(s,t)}$ положительны всюду, кроме тех значений i , которые принадлежат интервалу

$$\left(\frac{s}{|t|} \frac{e_{n-1}}{e_{n-2}}, \frac{s}{|t|} \frac{k_{n-1}}{k_{n-2}} \right)$$

при четном n и интервалу

$$\left(\frac{s}{|t|} \frac{k_{n-1}}{k_{n-2}}, \frac{s}{|t|} \frac{e_{n-1}}{e_{n-2}} \right)$$

при n нечетном.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Рассмотрим $R_n^{(s,t)}$. Пусть n четно. Тогда ввиду (6)

$$\frac{k_{n-2}}{e_{n-2}} < \frac{k_{n-1}}{e_{n-1}} \quad (10)$$

и, следовательно,

$$\frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} < \frac{e_{n-2}}{e_{n-1}}, \quad \text{если } n \text{ четно.} \quad (11)$$

Аналогично, если n нечетно, то

$$\frac{k_{n-1}}{e_{n-1}} < \frac{k_{n-2}}{e_{n-2}},$$

и получаем

$$\frac{e_{n-2}}{e_{n-1}} < \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}}, \quad \text{если } n \text{ нечетно.} \quad (12)$$

Из (10)–(11) вытекает, что

$$-\frac{t}{s} \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} = \frac{|t|}{s} \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} < \frac{|t|}{s} \frac{e_{n-2}}{e_{n-1}}$$

при четном n . Аналогично, из (12)

$$\frac{|t|}{s} \frac{e_{n-2}}{e_{n-1}} < \frac{|t|}{s} \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}}$$

при n нечетном. Из (8) следует, что $R_n^{(s,t)}(i)$ может быть отрицательным для $i > 0$ только, если i попадает в интервал

$$\left(\frac{|t|}{s} \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}}, \frac{|t|}{s} \frac{e_{n-2}}{e_{n-1}} \right)$$

при n четном, и в

$$\left(\frac{|t|}{s} \frac{e_{n-2}}{e_{n-1}}, \frac{|t|}{s} \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} \right)$$

при n нечетном.

б) Рассмотрим $R_n'^{(s,t)}$. Из (6) получаем

$$\begin{aligned} \frac{k_{n-1}}{k_{n-2}} &> \frac{e_{n-1}}{e_{n-2}}, & n \text{ четно,} \\ \frac{k_{n-1}}{k_{n-2}} &< \frac{e_{n-1}}{e_{n-2}}, & n \text{ нечетно.} \end{aligned} \quad (13)$$

Из (9) и (13) следует теперь искомый результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $n \geq 2$. Если $t > 0$, то последовательность $R_n^{(s,t)}$ при четном n монотонно возрастает, при нечетном n монотонно убывает.

Пусть $t < 0$. Тогда при четном n $R_n^{(s,t)}$ монотонно убывает всюду, кроме значения $[(|t|/s)(e_{n-2}/e_{n-1})]$ (если оно положительно). При нечетном n $R_n^{(s,t)}$ монотонно возрастает всюду, кроме значения $[(|t|/s)(e_{n-2}/e_{n-1})]$ (если оно положительно).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая свойство 1) (см. выше), имеем

$$R_n^{(s,t)}(i+1) - R_n^{(s,t)}(i) = \frac{(-1)^n st}{((i+1)se_{n-1} + te_{n-2})(ise_{n-1} + te_{n-2})}.$$

Из этого равенства следуют все требуемые утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2'. Пусть $n \geq 2$. Если $t > 0$, то последовательность $R_n^{(s,t)}$ монотонно убывает при четном n и монотонно возрастает при n нечетном.

Пусть $t < 0$. Тогда при четном n $R_n^{(s,t)}$ монотонно возрастает всюду, кроме значения

$$i = \left[\frac{s}{|t|} \frac{e_{n-1}}{e_{n-2}} \right]$$

(если оно положительно). При нечетном n $R_n^{(s,t)}$ монотонно убывает всюду, кроме значения

$$i = \left[\frac{s}{|t|} \frac{e_{n-1}}{e_{n-2}} \right]$$

(если оно положительно).

Это доказывается аналогично предложению 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для последовательности $R_n^{(s,t)}$ справедливо

а) $\lim_{i \rightarrow \infty} R_n^{(s,t)}(i) = k_{n-1}/e_{n-1}$;

б) при четном n $R_n^{(s,t)}(i) > k_{n-2}/e_{n-2}$ (при $t > 0$ и для $i > (|t|/s)(e_{n-2}/e_{n-1})$ при $t < 0$);

в) при нечетном n $R_n^{(s,t)}(i) < k_{n-2}/e_{n-2}$ (при тех же условиях).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая свойство 1) (см. выше), имеем

$$\frac{k_{n-1}}{e_{n-1}} - R_n^{(s,t)}(i) = \frac{(-1)^n t}{e_{n-1}(i s e_{n-1} + t e_{n-2})}.$$

При

$$i > \frac{|t|}{s} \frac{e_{n-2}}{e_{n-1}}$$

все величины в правой части имеют одинаковые знаки. По предложению 2 $R_n^{(s,t)}$ монотонны, и те из них, которые возрастают (т.е. когда $t > 0$, n четно или $t < 0$, n нечетно) ограничены сверху, а те, что монотонно убывают (когда $t < 0$, n четно или $t > 0$, n нечетно) ограничены снизу одной и той же величиной k_{n-1}/e_{n-1} . Предел $\lim_{i \rightarrow \infty} R_n^{(s,t)}(i)$ существует и равен k_{n-1}/e_{n-1} . Далее, аналогично предыдущему, легко увидеть, что

$$R_n^{(s,t)}(i) - \frac{k_{n-2}}{e_{n-2}} = \frac{(-1)^n i s}{e_{n-2}(i s e_{n-1} + t e_{n-2})}.$$

Из этого равенства следуют утверждения б) и в). Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3'. Для последовательности $R_n^{(s,t)}$ справедливо:

а) $\lim_{i \rightarrow \infty} R_n^{(s,t)} = k_{n-2}/e_{n-2}$;

б) при четном n $R_n^{(s,t)}(i) > k_{n-2}/e_{n-2}$ при $t > 0$ и $< k_{n-2}/e_{n-2}$ для $i > (s/|t|) \times (e_{n-1}/e_{n-2})$ при $t < 0$;

в) при n нечетном $R_n^{(s,t)}(i) < k_{n-2}/e_{n-2}$ при $t > 0$ и $> k_{n-2}/e_{n-2}$ для $i > (s/|t|)(e_{n-1}/e_{n-2})$ при $t < 0$.

Это доказывается аналогично предложению 3.

Предложения 3 и 3' дают практический способ, имея всего лишь два последовательных наилучших приближения к данному числу γ , строить непосредственно по ним сколько угодно много приближений примерно той же точности, среди которых заведомо найдутся приближения более точные. Последнее замечание можно конкретизировать. Напомним, что если k_{n-2}/e_{n-2} , k_{n-1}/e_{n-1} , k_n/e_n — подходящие дроби для числа γ , то (см. свойство 4))

$$\begin{aligned} \frac{k_{n-2}}{e_{n-2}} < \frac{k_n}{e_n} < \gamma < \frac{k_{n-1}}{e_{n-1}}, & \text{ если } n \text{ четно,} \\ \frac{k_{n-1}}{e_{n-1}} < \gamma < \frac{k_n}{e_n} < \frac{k_{n-2}}{e_{n-2}}, & \text{ если } n \text{ нечетно.} \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом (14) формулируем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $n \geq 2$ — натуральное число, k_{n-2}/e_{n-2} , k_{n-1}/e_{n-1} , k_n/e_n — подходящие дроби для данного числа γ , $0 < \gamma < 1$. Для любых целых $s, t > 0$ в последовательности $R_n^{(s,t)}$ содержится бесконечно много членов с $R_n^{(s,t)}(i) \in (k_n/e_n, k_{n-1}/e_{n-1})$ при четном n и с $R_n^{(s,t)}(i) \in (k_{n-1}/e_{n-1}, k_n/e_n)$ при n нечетном, а именно, все члены $R_n^{(s,t)}(i)$ с $i > (t/s)a_n$, где a_n — n -й элемент разложения γ в цепную дробь. В последовательности $R_n^{(s,t)}$ с $s > 0$, $t < 0$ таких членов нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно свойствам 1) и 2) имеем

$$R_n^{(s,t)}(i) - \frac{k_n}{e_n} = \frac{(-1)^n i s + (-1)^{n-1} a_n t}{e_n(i s e_{n-1} + t e_{n-2})}, \quad (15)$$

где a_n — n -й элемент разложения γ в цепную дробь. Пусть сначала n четно. Тогда для $t > 0$ в силу предложений 2 и 3

$$R_n^{(s,t)}(i) < \frac{k_{n-1}}{e_{n-1}}, \quad i > 0.$$

Ввиду (15) условие $R_n^{(s,t)}(i) > k_n/e_n$ равносильно

$$i > \frac{t}{s} a_n. \quad (16)$$

Для $t < 0$ ввиду (15) $R_n^{(s,t)}(i) > k_n/e_n$ равносильно

$$i > \frac{|t|}{s} \frac{e_{n-2}}{e_{n-1}}.$$

Но для этих значений i согласно предложениям 2 и 3

$$R_n^{(s,t)}(i) > \frac{k_{n-1}}{e_{n-1}}.$$

Тем самым получаем, что при $t < 0$ в $(k_n/e_n, k_{n-1}/e_{n-1})$ чисел из $R_n^{(s,t)}$ нет.

Пусть теперь n нечетно. Тогда для $t > 0$ выполняется

$$R_n^{(s,t)}(i) > \frac{k_{n-1}}{e_{n-1}}, \quad i > 0.$$

Так как при нечетном n (см. (15))

$$R_n^{(s,t)}(i) - \frac{k_n}{e_n} = \frac{-is + a_nt}{e_n(ise_{n-1} + te_{n-2})},$$

условие $R_n^{(s,t)}(i) < k_n/e_n$ равносильно (16). Для $t < 0$, аналогично предыдущему, убеждаемся, что $R_n^{(s,t)}(i) < k_n/e_n$ лишь тогда, когда $R_n^{(s,t)}(i) < k_{n-1}/e_{n-1}$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4'. Пусть $n \geq 2$ – натуральное число, k_{n-2}/e_{n-2} , k_{n-1}/e_{n-1} , k_n/e_n – подходящие дроби для данного числа γ , a_n – n -й элемент разложения γ в цепную дробь. Для любого целого $s > a_n$ и любого целого t , для которого $0 < t < s/a_n$, в $R_n^{(s,t)}$ найдутся члены такие, что

$$\begin{aligned} R_n^{(s,t)}(i) &\in \left(\frac{k_n}{e_n}, \frac{k_{n-1}}{e_{n-1}} \right) && \text{при четном } n, \\ R_n^{(s,t)}(i) &\in \left(\frac{k_{n-1}}{e_{n-1}}, \frac{k_n}{e_n} \right) && \text{при нечетном } n, \end{aligned}$$

а именно, члены $R_n^{(s,t)}(i)$ для всех $i \in [1, s/(a_nt))$. При $t \geq s/a_n$ и $t < 0$ таких членов в $R_n^{(s,t)}$ нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь свойствами 1), 2), находим

$$R_n^{(s,t)}(i) - \frac{k_n}{e_n} = \frac{(-1)^n s + (-1)^{n-1} i a_n t}{e_n(s e_{n-1} + i t e_{n-2})}. \quad (17)$$

Находим также

$$\frac{k_{n-1}}{e_{n-1}} - R_n^{(s,t)}(i) = \frac{(-1)^n i t}{e_{n-1}(s e_{n-1} + i t e_{n-2})}. \quad (18)$$

Пусть сначала n четно. Тогда из (18) при $t > 0$ следует, что

$$R_n^{(s,t)}(i) < \frac{k_{n-1}}{e_{n-1}}, \quad i > 0.$$

Далее, из (17) ввиду монотонности $R_n^{(s,t)}$, вытекает, что при $t > 0$ $k_n/e_n < R_n^{(s,t)}(i)$ лишь для $i \in [1, s/(a_nt))$. Этот интервал может содержать целые числа лишь при выполнении условия $t < s/a_n$.

При $t < 0$ по (18) имеем $R_n^{(s,t)}(i) > k_{n-1}/e_{n-1}$, когда $i < (s/|t|)(e_{n-1}/e_{n-2})$, и $R_n^{(s,t)}(i) < k_{n-1}/e_{n-1}$ в противном случае. Однако в этом последнем случае, как показано выше,

$$R_n^{(s,t)} < \frac{k_{n-2}}{e_{n-2}} < \frac{k_n}{e_n}.$$

Таким образом, при n четном и t отрицательном членов последовательности $R_n^{(s,t)}$ в $(k_n/e_n, k_{n-1}/e_{n-1})$ нет.

Для n нечетного, рассуждая совершенно аналогично, также приходим к искомому результату. Предложение доказано.

Установленные в предложениях 3, 3' и 4, 4' свойства обобщенных промежуточных дробей мы применим в п. 2 к обоснованию одного алгоритма дискретного логарифмирования в конечном простом поле.

2. Представление дискретного логарифма целого числа в виде суммы логарифмов малых простых чисел. Пусть p – заданное простое, v – целое число, $0 < v < p$. Пусть $\mathcal{B} = \{2, 3, \dots\}$ – конечное множество, состоящее из всех наименьших простых чисел, $|\mathcal{B}|$ – его мощность. Целое число, делящееся лишь на произведения чисел из $\mathcal{B}$, назовем *гладким*. Будем называть *малым* целое число, абсолютная величина которого принадлежит отрезку натурального ряда с достаточно большой плотностью гладких чисел; это определение получает точный смысл, как только мы указываем множество $\mathcal{B}$ и конкретное значение плотности. Мы будем стремиться получать соотношения вида

$$s_1 v \equiv s_2 \pmod{p} \quad (19)$$

с возможно более малыми s_1, s_2 , исходя из которых будем находить соотношения (19) с гладкими s_1 и s_2 . Это и даст решение задачи о представлении.

Сначала приводим задачу к случаю

$$v \in I, \quad \text{где } I = \left(\frac{3}{8}p, \frac{3}{7}p \right).$$

Назовем целые числа v_1 и v_2 *эквивалентными*, $v_1 \sim v_2$, если мы можем эффективно определить такие гладкие числа s' и s'' , что

$$s' v_1 \equiv s'' v_2 \pmod{p}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для любого целого v , $0 < v < p$, не более, чем за $O(\log p)$ операций, можно найти такое целое число v' , что $v' \sim v$ и $v' \in I$. Под операцией мы понимаем здесь умножение на малое (не больше 12) целое число с последующим приведением по модулю p .

Доказательства этого и последующих предложений 6–8 достаточно элементарны, хотя иногда и довольно громоздки. Поэтому в данной работе мы их опускаем.

Ввиду предложения 5 мы в дальнейшем ограничиваемся случаем $v \in I$.

Определим рациональное число $\alpha = \alpha(v)$:

$$\alpha = \frac{p - 2v}{v}. \quad (20)$$

Имеем

$$v(2 + \alpha) = p. \quad (21)$$

Ясно, что $\alpha(v)$ убывает в интервале I от $2/3$ до $1/3$.

Если α в (20), (21) заменить какой-либо рациональной дробью $\tilde{\alpha}$, достаточно мало отличающейся от α , и записать $2 + \tilde{\alpha} = l_1/l_2$, l_1, l_2 целые, $\text{НОД}(l_1, l_2) = 1$, то

$$l_1 v \equiv d \pmod{p}$$

с достаточно малым $d = l_1 v - l_2 p$. Разобьем I на два интервала I_1 и I_2 :

$$I_1 = \left(\frac{3}{8}p, \frac{2}{5}p \right], \quad I_2 = \left(\frac{2}{5}p, \frac{3}{7}p \right);$$

для $v \in I_1$ имеем оценку $2/3 > \alpha > 1/2$, для $v \in I_2$ – оценку $1/2 > \alpha > 1/3$. В целях большей прозрачности изложения ограничимся далее лишь случаем $v \in I_1$. Подчеркнем, что для $v \in I_2$ все последующие рассуждения вполне аналогичны, с изменением, главным образом, коэффициентов в ряде формул.

Итак, далее пусть

$$v \in \left(\frac{3}{8}p, \frac{2}{5}p \right), \quad \frac{2}{3} > \alpha(v) > \frac{1}{2}.$$

Пусть x, e – два целых числа, $x > |e| > 0$. Введем дробно-линейные функции от x, e :

$$\alpha(x, e) = \begin{cases} \frac{x+e}{2x+e}, & e > 0, \\ \frac{2x+e}{3x+e}, & e < 0, \end{cases} \quad (22)$$

а также линейные функции

$$l_1(x, e) = \begin{cases} 5x + 3e, & e > 0, \\ 8x + 3e, & e < 0 \end{cases} \quad (23)$$

и

$$l_2(x, e) = \begin{cases} 2x + e, & e > 0, \\ 3x + e, & e < 0. \end{cases} \quad (24)$$

Ясно, что для функций из (22)–(24) выполняется равенство

$$2 + \alpha(x, e) = \frac{l_1(x, e)}{l_2(x, e)}.$$

Мы будем заменять в (21) число α значениями $\alpha(x, e)$ из (22). Такую замену при конкретных целочисленных значениях x, e , $x > |e| > 0$, назовем (x, e) -заменой: $\alpha \rightarrow \alpha(x, e)$. Скажем, что замена $\alpha \rightarrow \alpha(x, e)$ приводит к соотношению

$$l_1(x, e)v \equiv d(x, e) \pmod{p}, \quad (25)$$

если

$$d(x, e) = l_1(x, e)v - l_2(x, e)p \quad (26)$$

и $l_1(x, e), l_2(x, e)$ – функции из (23), (24). Мы дадим ниже способ получения с использованием описанных выше (x, e) -замен соотношений вида (19) с гладкими s_1, s_2 . При этом производим (x, e) -замены, непременно соблюдая сформулированное ниже правило С. Разобьем I_1 на два интервала:

$$I_1 = I'_1 \cup I''_1, \quad \text{где } I'_1 = \left(\frac{3}{8}p, \frac{5}{13}p \right], \quad I''_1 = \left(\frac{5}{13}p, \frac{2}{5}p \right], \quad (27)$$

ПРАВИЛО С (правило (x, e) -замен). Если $v \in I'_1$, то берем $e > 0$ и

$$\alpha \rightarrow \alpha(x, e) = \frac{x + e}{2x + e};$$

если $v \in I''_1$, то берем $e < 0$ и

$$\alpha \rightarrow \alpha(x, e) = \frac{2x - |e|}{3x - |e|}.$$

Для оценки абсолютной величины чисел $d(x, e)$ из (25), (26), к которым приходим в результате (x, e) -замен, вводим параметр $\beta = \beta(v)$:

$$\beta = \begin{cases} (1 - \alpha)^{-1} - 2, & v \in I'_1, \\ 3 - (1 - \alpha)^{-1}, & v \in I''_1 \end{cases} \quad (28)$$

с α из (20), I'_1 , I''_1 , из (27).

Для последующего существенно свойство

$$1 < \beta^{-1} < 2 \quad (29)$$

при любом $v \in I_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $v \in I_1$. Если мы производим (x, e) -замену с соблюдением правила С, то приходим к соотношению (25) с

$$|d(x, e)| = \left| \beta - \frac{|e|}{x} \right| (1 - \alpha) xv, \quad (30)$$

где $d(x, e)$ из (26), β из (28).

При (x, e) -замене может быть обеспечено условие делимости коэффициента $l_1(x, e)$ в левой части (25) на произвольное целое число q .

Пусть

$$l = l(v) = \begin{cases} 5, & v \in I'_1, \\ 8, & v \in I''_1. \end{cases} \quad (31)$$

Через $\rho(q)$ будем обозначать наименьший неотрицательный вычет по модулю l рационального числа q со знаменателем, взаимно простым с l . Предполагая производить далее (x, e) -замены (с соблюдением правила С), определяем

$$\mu = \mu(q) = \rho(3q^{-1} \operatorname{sgn} e) \quad (32)$$

для целого q , взаимно простого с v ; если v фиксировано, то l и $\operatorname{sgn} e$ также фиксированы, и μ зависит только от q . Полагаем далее

$$m = m(q) = \frac{\mu q - 3 \operatorname{sgn} e}{l} \quad (33)$$

с l из (31), μ из (32). Легко увидеть, что для любого $v \in I_1$ и любого целого $e \neq 0$ число $m(q)$ целое и $0 < m(q) < q$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $v \in I_1$ целое, $q > 3$ – натуральное число, $\text{НОД}(q, l) = 1$, где l – число из (31). Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Если в результате (x, e) -замены мы приходим к (25) с $q \mid l_1(x, e)$, то

$$x = |e|t + kq \quad (34)$$

для t из (33) и некоторого целого k .

2) Обратно, пусть e, k – любые целые числа, $e, k \neq 0$, а x вычисляется по формуле (34) с t из (33). Если при этом $x > |e|$, то в результате (x, e) -замены мы приходим к (25) с $q \mid l_1(x, e)$.

Заметим, что условие $x > |e|$ в последнем утверждении выполняется, как легко убедиться, не менее, чем для половины всех возможных пар чисел (k, e) .

Мы укажем теперь способ получения для данного целого $v \in I$ и какого-либо целого q , $\text{НОД}(q, l(v)) = 1$, соотношений вида (25) с $q \mid l_1(x, e)$ и с достаточно малым $d(x, e)$. Соотношения вида (19) с гладкими s_1 и s_2 мы будем стремиться получать в виде линейных комбинаций пар таких соотношений, найденных для какого-либо q , достаточно близкого к p .

При фиксированном v и заданном q , $\text{НОД}(q, l(v)) = 1$, определяем

$$\gamma = \gamma(q) = \frac{\beta^{-1} - m}{q}, \quad (35)$$

где β – число из (28), m – число из (33). Так как $0 < m(q) < q$, $1 < \beta^{-1} < 2$, имеем $-1 < \gamma(q) < 0$. Для целых, взаимно простых чисел $k < 0$ и e определяем

$$\delta = \delta(q) = \gamma - \frac{k}{|e|}. \quad (36)$$

Укажем сначала условия, обеспечивающие возможность (x, e) -замены с $q \mid l_1(x, e)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть p – простое число и выполняются условия:

- а) $v \in I_1$ – целое число,
- б) q – натуральное число, $\text{НОД}(q, l(v)) = 1$ с $l(v)$ из (31),
- в) $k < 0$, e – целые числа, не равные нулю,
- г) $m(q)$ находится по (33), x – по (34),
- д) $\gamma(q)$ – число из (35) и для $\delta(q)$ из (36) выполнено

$$|\delta| < \frac{r}{pq} \quad (37)$$

с малым целым $r \ll p$.

Тогда

1) справедливы неравенства

$$1 - \frac{r}{p} < \frac{x}{\beta^{-1}|e|} < 1 + \frac{r}{p}; \quad (38)$$

2) справедливо неравенство

$$x > |e|$$

для любого v при $\delta < 0$ и почти для всех v , когда $\delta > 0$ (если $r \leq 23$, то возможны лишь два исключения – когда $v - 3p/8 < 1$ и когда $2p/5 - v < 1$).

СЛЕДСТВИЕ. Если выполнены условия а)–г), $|\delta| < 1/(pq)$ и $q < 23p$, то (x, e) -замена с соответствующими e и x , всегда приводит к соотношению (25) с $q \mid l_1(x, e)$ (с единственным возможным исключением).

ТЕОРЕМА 1. В условиях предложения 8 предположим дополнительно, что

$$\frac{|e|}{q} \leq \nu, \quad (39)$$

где ν – малое целое число. Тогда в результате (x, e) -замены мы приходим к соотношению (25) с $q \mid l_1(x, e)$, в котором

$$\frac{l_1(x, e)}{q} \leq 13\nu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in I'_1$. Тогда по правилу С берется $e > 0$ и согласно (38)

$$x < \beta^{-1}e \left(1 + \frac{r}{p}\right),$$

где $r \ll p$ – малое целое число. Так как $\beta^{-1} < 2$ (см. (29)), отсюда следует, что

$$l_1(x, e) = 5x + 3e < 13e + 10r\frac{e}{p},$$

или

$$\frac{l_1(x, e)}{e} < 13 + \frac{10r}{p}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{l_1(x, e)}{q} < 13\frac{e}{q} + 10\frac{re}{(pq)},$$

и ввиду условия (39)

$$\frac{l_1(x, e)}{q} \leq 13\nu.$$

Аналогично рассуждаем и в случае $v \in I''_1$. Теорема доказана.

Далее в качестве чисел q , участвующих в формулировках предложения 8 и теоремы 1, будем использовать числа вида $q = p + q_0$, где q_0 – гладкое число или, по крайней мере, число из области с большой плотностью гладких чисел. Для таких q мы рассматриваем $\gamma(q)$, точнее, его приближенное с точностью до $1/100p^2 - 1/10\,000p^2$ значение $\tilde{\gamma}$. Это $\tilde{\gamma}$ мы аппроксимируем числами $k/|e|$ по методу цепных дробей. Из теории цепных дробей следует, что нужное приближение достигается при значении знаменателя $|e|$ подходящей дроби, не превосходящего νp , где ν – малое целое число. Но для таких q и $\delta = \gamma - k/|e|$ оказываются выполненными условие д) предложения 8 и условие (39) теоремы 1. Тем самым, мы в результате произведенной (x, e) -замены приходим к соотношению (25) с $q \mid l_1(x, e)$ и $l_1(x, e)/q \leq 13\nu$. Мы покажем ниже, что указанный выбор чисел q и уровня приближений к $\gamma(q)$ оказывается благоприятным также и для получения искомых соотношений (25) с относительно малыми $d(x, e)$.

Сначала преобразуем равенство (30) из предложения 6.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть выполнены условия а)–д) предложения 8. Тогда справедливо

$$|d(x, e)| = \beta_1 |\delta| |e| q p, \quad (40)$$

где

$$\beta_1(v) = \beta_1 = \begin{cases} (2\alpha - 1)(2 + \alpha)^{-1}, & v \in I'_1, \\ (2 - 3\alpha)(2 + \alpha)^{-1}, & v \in I''_1, \end{cases} \quad (41)$$

с $\delta = \gamma - k/|e|$, γ из (35), α из (20).

Функция $\beta_1(v)$ монотонно убывает в I'_1 от $1/8$ до $1/13$ и монотонно возрастает в I''_1 от $1/13$ до $1/5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\Delta = \delta|e|$. Из (36) и (35) получаем

$$\gamma|e| = k + \Delta \quad \text{и} \quad \beta^{-1}|e| - |e|m = kq + \Delta q,$$

т.е.

$$\beta^{-1}|e| = x + \Delta q.$$

Нетрудно убедиться, что из условия д) в предложении 8 вытекает, что $x + \Delta q \neq 0$. Поэтому

$$\beta = \frac{|e|}{x + \Delta q}.$$

Отсюда получаем, что

$$\beta - \frac{|e|}{x} = \frac{|e|\Delta q}{x(x + \Delta q)} = \frac{\beta\delta|e|q}{x}.$$

Подставляя это выражение в (30), получаем

$$|d(x, e)| = \beta|\delta| |e| q (1 - \alpha)v.$$

Учитывая, что $v = (2 + \alpha)^{-1}p$, и обозначая

$$\beta_1(v) = \beta(1 - \alpha)(2 + \alpha)^{-1},$$

приходим к (40).

Пусть теперь $v \in I_1$. Тогда

$$\beta_1 = \frac{2\alpha - 1}{2 + \alpha} = \frac{2p - 5v}{p} \quad \text{для } v \in I'_1$$

и

$$\beta_1 = \frac{8v - 3p}{p} \quad \text{для } v \in I''_1.$$

Отсюда следуют требуемые утверждения для β_1 . Предложение доказано.

Подытожим наши рассуждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия предложения 8. Если мы производим (x, e) -замену с соответствующими e, x , при которой $q \mid l_1(x, e)$ и

а) $q = p + q_0$, где q_0 – малое целое число,

б) $\beta_1 |e| \cdot |\delta| = (1 + \lambda)/p$, где λ – рациональное число со знаменателем, взаимно простым с p , такое, что $\lambda \approx r/p$, r – малое целое число,

то в результате этой замены приходим к соотношению

$$\frac{l_1(x, e)}{q} q_0 v \equiv d(x, e) \pmod{p}$$

с малыми целыми $l_1/q, q_0, d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим предложение 9. По формуле (40), учитывая а) и б), получаем

$$|d(x, e)| = \frac{1}{p}(1 + \lambda)qp = (1 + \lambda)(p + q_0) = p + \lambda(p + q_0) + q_0.$$

Отсюда следует, что $\lambda(p + q_0)$ – целое число. Его величина по условию примерно равна $r(p + q_0)/p = r + (q_0/p)r$, т.е. меньше, чем на 1, отличается от малого целого r . Таким образом, $|d(x, e)|$ по модулю p представляется как сумма малых целых чисел:

$$|d(x, e)| \equiv \lambda(p + q_0) + q_0,$$

т.е. сравнимо с малым целым числом. Итак, в результате (x, e) -замены мы приходим к соотношению

$$\frac{l_1}{q} q_0 v \equiv d \pmod{p}$$

с малыми целыми $l_1/q, q_0, d$. Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 показывают, что получение с помощью (x, e) -замен соотношений (19) с гладким s_1 практически обеспечивается, если брать $q = p + q_0$ с малым гладким q_0 и установить уровень приближения к $\gamma(q)$, гарантирующий его достижение подходящими дробями со знаменателями $|e| = \nu p$, где ν не превышает малого целого числа. Покажем, что общий закон аппроксимации I (см. п. 1) гарантирует для каждого такого выбранного q существование бесконечно многих пар $(|e|, k)$ целых чисел, для которых выполнено также условие б) теоремы 2 с $\delta = \gamma(q) - k/|e|$, β_1 из (41).

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия предложения 8 и при этом берем число $q = p + q_0$, где q_0 – малое целое число (т.е. выполнено условие а) теоремы 2). Тогда существует бесконечно много пар целых чисел $(|e|, k)$ со свойством

$$\beta_1 |e| |\delta| = \frac{1}{p}(1 + \lambda),$$

где $\lambda \approx r/p$ с малым целым числом r , $\delta = \gamma(q) - k/|e|$, β_1 – число из (41) (т.е. выполнено условие б) теоремы 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть λ – положительное рациональное число. Рассмотрим неравенство

$$\left| z\gamma - y - \frac{\lambda}{\beta_1 p} \right| < \frac{1}{\beta_1 p} \quad (42)$$

с β_1 из (41).

Согласно первому из цитированных в начале п. 1 общих законов аппроксимации, неравенство (42) имеет бесконечно много решений в целых числах при $3/z \leq 1/(\beta_1 p)$, или $3\beta_1 p \leq z$. Но мы рассматриваем такой уровень приближений к $\gamma(p)$, что знаменатели подходящих дробей при наилучшем приближении имеют величину вида νp с $\nu > 1$. Так как $\beta_1 < 1/5$ по предложению 9, для значений z из этой области условие $3\beta_1 p \leq z$ выполняется. Для любого целочисленного решения $(z, y) = (|e|, k)$ неравенства (42) выполнено

$$\left| |e|\gamma - k - \frac{\lambda}{\beta_1 p} \right| < \frac{1}{\beta_1 p},$$

и пусть

$$|e|\gamma - k - \frac{\lambda}{\beta_1 p} < \frac{1}{\beta_1 p}$$

(в другом случае, когда $|e|\gamma - k - \lambda/(\beta_1 p) > -1/(\beta_1 p)$ рассуждаем аналогично). Тогда

$$|e|\gamma - k - \frac{1}{\beta_1 p} < \frac{\lambda}{\beta_1 p} \quad \text{и} \quad |e|\gamma - k - \frac{1}{\beta_1 p} = \frac{\lambda_1}{\beta_1 p}$$

с рациональным λ_1 , $\lambda_1/\lambda < 1$. Следовательно,

$$\beta_1 |e| |\delta| = \frac{1}{p} + \frac{\lambda_1}{p}.$$

Полагая $\lambda_1 \approx r/p$ с малым целым r , приходим к утверждению теоремы.

Отметим также, что общий закон аппроксимации II, цитированный в п. 1, гарантирует существование решения любого сравнения вида (42) при значениях $z = |e| \leq C\beta_1 p$, где C – некоторое положительное число.

Итак, действуя по изложенному выше методу (см. предложение 8), нам при данном q нужно искать такие приближения $k/|e|$ к $\gamma(q)$, чтобы для $|e|, \delta = \gamma - k/|e|$ удовлетворялось условие б) теоремы 2. Возможный способ нахождения таких приближений дают результаты п. 1 (предложения 3, 3' и 4, 4'). В них бесконечное множество достаточно хороших приближений к числу γ получается из двух данных последовательных приближений в результате построения их всевозможных линейных комбинаций. Если эти исходные приближения приводят к соотношениям $\lambda_1(q_0 v) \equiv d_1, \lambda_2(q_0 v) \equiv d_2 \pmod{p}$, где $\lambda_i = l_1(x_i, e_i)/q$, то для любых целых s, t

$$(\lambda_1 s + \lambda_2 t)(q_0 v) \equiv \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \pmod{p}.$$

Если при этом мы приходим к гладкому $\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$, то, разумеется, $\lambda_1 s + \lambda_2 t$ не обязательно гладкое. Однако принятый метод обеспечивает получение исходных соотношений с весьма малыми λ_1 и λ_2 (см. теорему 1). Поэтому значения линейных комбинаций $\lambda_1 s + \lambda_2 t$ часто остаются в области с высокой плотностью гладких чисел и сами оказываются гладкими. На этих соображениях основывается вероятностный алгоритм получения рассматриваемых в этом пункте представлений, который мы дадим в п. 3.

3. Формулировка алгоритма представления. Примеры и численные результаты. Пусть p – большое (с несколькими десятками знаков в десятичном представлении) простое, v – целое число, $0 < v < p$. Напомним, что в п. 2 мы (предложение 5) свели задачу к случаю $v \in I = (\frac{3}{8}p, \frac{3}{7}p)$. Затем мы рассматривали лишь случай $v \in I_1 = (\frac{3}{8}p, \frac{2}{5}p]$ отметив, что при $v \in (\frac{2}{5}p, \frac{3}{7}p)$ все рассуждения проводятся совершенно аналогично, с изменением, главным образом, вида некоторых формул. Здесь в целях экономии места мы сосредоточимся на случае $v \in I'_1 = (\frac{3}{8}p, \frac{5}{13}p]$; для $v \in (\frac{5}{13}p, \frac{2}{5}p]$ все действия по алгоритму производятся совершенно так же, все выводы и результаты сохраняются.

Итак, пусть $v \in (\frac{3}{8}p, \frac{5}{13}p]$. Ищем пары гладких целых чисел (λ, d) , для которых

$$\lambda v \equiv d \pmod{p}.$$

Разобьем алгоритм на несколько шагов.

Шаг 0 (выбор базы). Берем “базу” $\mathcal{B}$ – множество всех наименьших простых чисел $\{2, 3, \dots\}$ в количестве $|\mathcal{B}| = c \lceil \log_2 p \rceil$. (В наших экспериментах было $c = 5$).

Шаг 1. Вычисляем (см. (20) и (28)) $\alpha(v) = (p - 2v)/v$, $\beta^{-1}(v) = (1 - \alpha)/(2\alpha - 1)$ с точностью до $1/100p^2$.

Шаг 2. Вводим переменный параметр q . При каждом возвращении к шагу 2 берем следующее (не делящееся на 5, иначе – пропускаем) число в таблице

$$\begin{aligned} & p \pm 1, p \pm 11, p \pm 21, \dots, \\ & p \pm 2, p \pm 12, p \pm 22, \dots, \\ & \dots\dots\dots \\ & p \pm 10, p \pm 20, p \pm 30, \dots; \end{aligned}$$

последнее число в каждой строке не превышает $p + 5P$ по абсолютной величине, где P – максимальное число в $\mathcal{B}$.

Шаг 3. а) Находим целое число $\mu = \mu(q)$ (см. (32)) по таблице

$$\mu = \begin{cases} 1, & \text{если } q \equiv 3 \pmod{5}, \\ 2, & \text{если } q \equiv 4 \pmod{5}, \\ 3, & \text{если } q \equiv 1 \pmod{5}, \\ 4, & \text{если } q \equiv 2 \pmod{5}, \end{cases}$$

а затем $m(q)$ (см. (33)):

$$m = \frac{\mu(q)q - 3}{5}.$$

б) Находим число $\gamma = (\beta^{-1} - m)/q$ с точностью до $1/(10\,000p^2)$. Это приближенное значение обозначаем $\tilde{\gamma}$.

Шаг 4. Строим последовательность приближений к $|\tilde{\gamma}|$ методом цепных дробей (см. п. 1), т.е. последовательность

$$\tilde{R} \equiv \left(\frac{k_0}{e_0}, \frac{k_1}{e_1}, \dots, \frac{k_f}{e_f} = |\tilde{\gamma}| \right),$$

состоящую из конечного числа (см. свойство 3) п. 1) несократимых рациональных дробей (“подходящих дробей” для $|\tilde{\gamma}|$). Длина f последовательности $\tilde{R}$ оценивается в среднем как $3 \log p$.

В итоге получаем определяющие искомые приближения три целочисленные последовательности:

$$A = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_f), \quad K = (k_0, k_1, k_2, \dots, k_f), \\ E = (e_0, e_1, e_2, \dots, e_f).$$

Шаг 5 (нахождение множества LD). Обозначаем $E_0 = \{e \in E, e \in (p/10, 12p)\}$, $R_0 = \{k/e \in \tilde{R}, e \in E_0\}$. Для каждой дроби $k/e \in R_0$ находим

- а) $x = et - kq$ (см. (34)),
- б) $l_1(x, e) = 5x + 3e$ (см. (23)),
- в) целое (см. предложение 8) $l_1(x, e)/q$,
- г) $l_2(x, e) = 2x + e$ (см. (24)),
- д) $l_1(x, e)v/q$,
- е) $l_2(x, e) - l_1(x, e)v/q$

и, наконец,

$$d(x, e) = \frac{l_1(x, e)}{q}(q - p)v - \left(l_2(x, e) - \frac{l_1(x, e)}{q}v\right)p.$$

Обозначаем $\lambda = \lambda(x, e) = l_1(x, e)/q$,

$$LD = \left\{(\lambda(x, e), d(x, e)) : \frac{k}{e} \in R_0\right\}.$$

Для $\lambda(x, e)$, $d(x, e)$ справедливо $\lambda(x, e)q_0v \equiv d(x, e) \pmod{p}$, где $q_0 = q - p$.

Шаг 6. Берем две (последовательные) пары чисел (λ_1, d_1) и (λ_2, d_2) из LD с наименьшими по абсолютной величине d_1, d_2 . Для них образуем все возможные пары

$$(\lambda, d) = (s\lambda_1 + t\lambda_2, sd_1 + td_2),$$

с целыми числами $s > 0, t, s \leq |c_1|, |t| \leq c_2$ (в примерах ниже $c_1 = c_2$ и $c_1 = 750$ для p порядка 10^{16} , $c_1 = 1000$ для p порядка 10^{21} , $c_1 = 1500$ для p порядка 10^{31}). Отбираем те пары, в которых как λ , так и d являются гладкими (т.е. делятся лишь на произведения чисел из $\mathcal{B}$). Если общее количество таких неколлинеарных пар (полученных к данному времени) меньше $2|\mathcal{B}|$, то переходим к шагу 2 и берем следующее значение параметра q . Работа алгоритма прекращается тогда, когда либо набрано $2|\mathcal{B}|$ пар (λ, d) с гладкими λ и d (т.е. фактически $2|\mathcal{B}|$ соотношений (19) с гладкими $s_1 = \lambda$ и $s_2 = d$), либо будут исчерпаны все значения q .

Для выяснения степени эффективности представленного алгоритма и поиска возможных путей ее повышения были проведены на ЭВМ некоторые эксперименты. Подчеркнем, что они не имели достаточно систематического характера, а их целью было, прежде всего, стремление проиллюстрировать развитые в работе теоретические рассуждения. Были взяты три группы значений простого числа p : а) порядка 10^{15} – 10^{16} , б) порядка 10^{20} – 10^{21} , в) порядка 10^{30} – 10^{31} . Более или менее подробно рассматривались лишь случаи а) и б).

а) В результате экспериментов с числами p порядков 10^{15} – 10^{16} получалось, что современный компьютер, действуя, по описанному алгоритму, при базе из 250 чисел (максимальное число в базе – 1583) находим 1000 независимых (т.е. неколлинеарных) соотношений (19)

$$s_1 v \equiv s_2 \pmod{p}$$

с гладкими s_1, s_2 за время менее 20 минут. За это время “пробегается” 1% значений q ; искомые соотношения обнаруживаются практически при любом взятом q (в 100% или иногда чуть в меньшем, > 90% случаев).

Приведем примеры.

Рассмотрим $p = 147000\,2300000951$, $v = 55431\,8181250360$ ($v \in (\frac{3}{8}p, \frac{5}{13}p)$).

Шаг 0. Берем базу $\mathcal{B} = \{2, 3, \dots, 1583\}$ из $250 \approx 5 \lceil \log_2 p \rceil$ наименьших простых чисел, $P = 1583$.

Шаг 1. Вычисляем $\alpha(v)$ (см. (20)) и $\beta^{-1}(v)$ (см. (28)).

Шаг 2. Берем $q = p + 1$: $q = 147000\,2300000952$.

Шаг 3. Находим $\mu(q)$ (см. (32)), $m(q)$ (см. (33)) и $\gamma(q)$ (см. (35)), беря затем его приближенное значение $\tilde{\gamma}$:

$$\tilde{\gamma} = -0.3999\,9999999999\,9406224055\,9346477321$$

(34 знака после запятой).

Шаг 4. Методом цепных дробей, как описано в п. 1, строим последовательности $A, K, E, k_i/e_i \approx |\tilde{\gamma}|$, $i = 1, 2, \dots, f$, $k_i \in K, e_i \in E$. При этом $f = 51$.

Шаг 5. Находим, множество LD пар (λ, d) , т.е. фактически следующие 7 соотношений вида (25) с $V = (q - p)v$:

- 1) $V \equiv 55431\,8181250360 \pmod{p}$,
- 2) $2V \equiv -36136\,5937500231 \pmod{p}$,
- 3) $3V \equiv 19295\,2243750129 \pmod{p}$,
- 4) $5V \equiv -16841\,3693750102 \pmod{p}$,
- 5) $8V \equiv 2453\,8550000027 \pmod{p}$,
- 6) $53V \equiv -2118\,2393749940 \pmod{p}$,
- 7) $61V \equiv 335\,6156250087 \pmod{p}$.

Шаг 6. Берем два последних соотношения $\lambda_1 V \equiv d_1, \lambda_2 V \equiv d_2$ с $\lambda_1 = 61, \lambda_2 = 53$, полученные на предыдущем шаге, и образуем всевозможные пары с $s > 0$: $(\lambda_1 s + \lambda_2 t, d_1 s + d_2 t)$, $s, |t| \leq 750$. Находим в результате 7 искомым соотношений (25) с гладкими s_1 и s_2 :

- 1) $3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 71V = 13419V \equiv 184036193768780$
 $= 2 \times 2 \times 5 \times 37 \times 109 \times 139 \times 167 \times 227 \times 433 \pmod{p}$
 $(s = 200, \quad t = +23),$
- 2) $71 \times 313V = 22223V \equiv -633\,2081219100$
 $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 13 \times 293 \times 367 \times 719 \pmod{p}$
 $(s = 320, \quad t = +51),$
- 3) $5 \times 19 \times 379V = 36005V \equiv 4888806300073 = 101 \times 191 \times 359 \times 727 \times 971 \pmod{p}$
 $(s = 519, \quad t = +82),$

- 4) $47 \times 863V = 40561V \equiv 14571181306415$
 $= 5 \times 19 \times 59 \times 59 \times 251 \times 349 \times 503 \pmod{p}$
 $(s = 585, \quad t = +92),$
- 5) $2 \times 73 \times 293V = 42778V \equiv 1605\,6212559499$
 $= 7 \times 19 \times 31 \times 53 \times 89 \times 661 \times 1249 \pmod{p}$
 $(s = 617, \quad t = +97),$
- 6) $71 \times 617V = 43807V \equiv 48572318810951$
 $= 13 \times 13 \times 43 \times 43 \times 61 \times 67 \times 73 \times 521 \pmod{p}$
 $(s = 633, \quad t = +98),$
- 7) $89 \times 569V = 50641V \equiv 63095881320464$
 $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 59 \times 293 \times 373 \times 599 \times 1021 \pmod{p}$
 $(s = 732, \quad t = +113).$

б) Для простых чисел p порядка 10^{20} – 10^{21} эксперименты проводились до момента получения нескольких соотношений (19) с гладкими s_1 и s_2 . База, как и прежде, составляла $\approx 5 \lceil \log_2 p \rceil$ наименьших простых чисел ($|\mathcal{B}| = 330$, $P = 2213$). В результате для таких p 3–4 искомым соотношения находились за 11–28 минут работы компьютера. Хотя такие соотношения в этих условиях получались не при каждом q , а в 10–20% случаев (испытывались лишь 13–31 значений q), среди них бывали несколько соотношений при одном и том же q , что особенно перспективно при последующем составлении и решении линейных систем уравнений над кольцом $\mathbb{Z}_{p-1}$, решая которые и получаем $\lg v$.

Вот пример соотношения для p порядка 10^{21} .

Пусть $p = 1\,4500000000\,3800000637$, $v = 5502211538\,6058654087$.

Берем $q = 1\,4500000000\,3800000638$.

Исходя из получаемых в ходе работы алгоритма соотношений ($V = (q - p)v$)

$$\begin{aligned}\lambda_1 V &= 29V \equiv 64134615\,3900961516 \equiv d_1 \pmod{p}, \\ \lambda_2 V &= -21V \equiv 453557692\,3168269269 \equiv d_2 \pmod{p},\end{aligned}$$

приходим к соотношению

$$\begin{aligned}(\lambda_1 s + \lambda_2 t)V &= 3044V = 2 \times 2 \times 761V \equiv 1231923077\,3542305093 \\ &= 3 \times 13 \times 67 \times 113 \times 139 \times 149 \times 607 \times 1553 \times 2137 \\ &\equiv d_1 s + d_2 t \pmod{p} \quad (\text{при } s = 97, \quad t = 11).\end{aligned}$$

в) Для простых чисел порядка 10^{30} – 10^{31} рассматривались лишь единичные примеры. В них бралась база $\mathcal{B}$ с $|\mathcal{B}| = 500$ и $P = p_{\max} = 3571$. Работа велась до получения первого соотношения (19) с гладкими s_1 и s_2 . Такие соотношения получались после многочасовой (до полусуток) работы компьютера.

Приведем пример.

Пусть

$$\begin{aligned}p &= 1\,3800000000\,7600000000\,4200000847, \\ v &= 5247346154\,1348076923\,2364423398.\end{aligned}$$

Берем $q = 1\,380\,000\,000\,760\,000\,000\,420\,000\,2358$.

Исходя из получаемых в ходе работы алгоритма соотношений ($V = (q - p)v$)

$$\lambda_1 V = -97V \equiv 16269279\,2009615411\,3803029491 \equiv d_1 \pmod{p},$$

$$\lambda_2 V = -86V \equiv 156692350\,6396153869\,8878974609 \equiv d_2 \pmod{p},$$

приходим при $s = 1259$, $t = -130$ к соотношению

$$\begin{aligned} (s\lambda_1 + t\lambda_2)V &= -110943V = -3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 587V \\ &\equiv 113016930\,8605799842\,3747429999 \equiv (sd_1 + td_2) \\ &\equiv 11 \times 43 \times 47 \times 59 \times 61 \times 283 \times 359 \times 1009 \times 1447 \times 1483 \times 2269 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Мы видим, таким образом, что попытка ограничиться весьма маленькой базой делает в случае в) алгоритм менее эффективным, чем в случаях а) и б).

Вообще, достаточно умеренное увеличение базы составляет один из резервов повышения эффективности алгоритма. Действительно, в этом случае ситуация приблизится к случаю а), когда практически для каждого из рассматриваемых значений q мы получали несколько соотношений (19) с гладкими s_1 и s_2 . Тем самым, скорее составитя система линейных уравнений над кольцом $\mathbb{Z}_{p-1}$, из которой определится $\lg v$. Другим существенным резервом повышения эффективности алгоритма является в перспективе уход от чистого перебора в шаге 6.

Автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность заведующему отделом “Дискретная математика” МИРАН А.М. Зубкову за чрезвычайно ценные советы и замечания. Автор благодарен сотрудникам лаборатории № 22 Института проблем управления РАН (руководитель – Д.В. Тюкавкин, ведущий научный сотрудник – С.Э. Шаронов) за создание компьютерной программы, реализующей изложенный в работе алгоритм, и проведение вычислительных экспериментов. Автор благодарит также Л.К. Мишину за большую помощь при проведении ручных экспериментов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Борович З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1964.
- [2] Хинчин А.Я. Цепные дроби. М.: ОНТИ НКТП, 1935.
- [3] Коблиц Н. Курс теории чисел и криптографии. М.: ТВП, 2001.
- [4] Adleman L. M. A subexponential algorithm for discrete logarithm problem with applications to cryptography // Proc. of the 20th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 1979. P. 55–60.
- [5] Coppersmith D., Odlyzko A., Schroeppe R. Discrete logarithms in $GF(p)$ // Algorithmica. 1986. V. 1. P. 1–15.
- [6] Schirokauer O. Discrete logarithms and local units // Proc. Trans. Roy. Sci. London Ser. A. 1993. V. 345. P. 409–423.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
21.07.2003