Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Гомоморфизм Альбанезе группы Чжоу 0-циклов вещественного алгебраического многообразия, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 1, 76–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1030>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 10:16:24

УДК 513.6

ГОМОМОРФИЗМ АЛЬБАНЕЗЕ ГРУППЫ ЧЖОУ 0-ЦИКЛОВ ВЕЩЕСТВЕННОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ

В. А. Краснов

Изучается гомоморфизм группы Чжоу 0-циклов степени 0 вещественного алгебраического многообразия в группу вещественных точек многообразия Альбанезе, который получается из отображения Альбанезе для соответствующего многообразия. Вычисляется коядро этого гомоморфизма, а также находятся оценки для ядра отображения групп кручения.

Библиография: 11 названий.

1. Формулировка результатов. Далее X – неособое вещественное проективное алгебраическое многообразие, причем предполагается, что $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Фиксируем точку $x_0 \in X(\mathbb{R})$. Тогда определено отображение Альбанезе $\alpha: X \rightarrow A$, которое индуцирует отображения $\alpha_{\mathbb{C}}: X(\mathbb{C}) \rightarrow A(\mathbb{C})$, $\alpha_{\mathbb{R}}: X(\mathbb{R}) \rightarrow A(\mathbb{R})$. Отображение $\alpha_{\mathbb{C}}$ продолжается до гомоморфизма групп $\alpha_{\mathbb{C}}^*: \widetilde{CH}_0(X_{\mathbb{C}}) \rightarrow A(\mathbb{C})$, где $X_{\mathbb{C}} = X \otimes \mathbb{C}$, $CH_0(X)$ – группа Чжоу 0-циклов степени 0 (см. [1], [2]). Пусть $\pi: X_{\mathbb{C}} \rightarrow X$ – проекция. Тогда композиция

$$\widetilde{CH}_0(X) \xrightarrow{\pi^*} \widetilde{CH}_0(X_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{C}}^*} A(\mathbb{C})$$

определяет гомоморфизм $\alpha_{\mathbb{R}}^*: \widetilde{CH}_0(X) \rightarrow A(\mathbb{R})$, который продолжает $\alpha_{\mathbb{R}}: X(\mathbb{R}) \rightarrow A(\mathbb{R})$. В этой заметке мы изучаем гомоморфизм Альбанезе $\alpha_{\mathbb{R}}^*$. Прежде всего заметим, что он может не быть эпиморфизмом, хотя гомоморфизм $\alpha_{\mathbb{C}}^*$ всегда эпиморфен. В заметке [3] показано, что для $GM\mathbb{Z}$ -многообразия X гомоморфизм $\alpha_{\mathbb{R}}^*$ эпиморфен. Здесь мы хотим вычислить $\text{Coker } \alpha_{\mathbb{R}}^*$ в общем случае. Заметим, что группа $\text{Coker } \alpha_{\mathbb{R}}^*$ является 2-элементарной, т.е. $\mathbb{F}_2$ -пространством, а из работ [3], [4] вытекает неравенство

$$\dim \text{Coker } \alpha_{\mathbb{R}}^* \leq \dim H^1(G, \widetilde{H}_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})),$$

где $G = G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ – группа Галуа, $\widetilde{H}_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) / \text{Tors}$. Здесь мы проводим точное вычисление $\dim \text{Coker } \alpha_{\mathbb{R}}^*$. Чтобы сформулировать соответствующий результат, нужно сначала ввести канонический гомоморфизм

$$\beta: \widetilde{H}_0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^1(G, \widetilde{H}_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})),$$

где $\widetilde{H}_0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ – приведенная группа гомологий. Этот гомоморфизм определяется следующим образом. Пусть $\tau: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ – инволюция комплексного сопряжения, $X_0, \dots, X_n$ – компоненты связности множества $X(\mathbb{R})$; зафиксируем точки $x_i \in X_i$,

$i = 0, \dots, n$, и выберем кривые $\Gamma_i \subset X(\mathbb{C})$, соединяющие точку x_0 с точками x_i , $i = 1, \dots, n$. Тогда цикл $\Gamma_i - \tau(\Gamma_i)$ определяет класс гомологий из $\tilde{H}_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, антиинвариантный относительно действия τ . Так как

$$H^1(G, \tilde{H}_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) = \text{Ker}(1 + \tau_*) / \text{Im}(1 - \tau_*),$$

где $\tau_*: \tilde{H}_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ – гомоморфизм, индуцированный инволюцией τ , то цикл $\Gamma_i - \tau(\Gamma_i)$ определяет элемент группы $H^1(G, \tilde{H}_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))$, который по определению равен $\beta(x_i - x_0)$, $i = 1, \dots, n$. Оказывается, что справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Существует канонический изоморфизм*

$$\text{Coker } \alpha_{\mathbb{R}}^* = \text{Coker } \beta.$$

Вычислить ядро гомоморфизма Альбанезе $\alpha_{\mathbb{R}}^*$ затруднительно, так как даже для комплексного гомоморфизма Альбанезе $\alpha_{\mathbb{C}}^*$ трудно вычислить ядро, но для гомоморфизма групп кручения

$$(\alpha_{\mathbb{R}}^*)_{\text{tors}}: \widetilde{CH}_0(X)_{\text{tors}} \rightarrow A(\mathbb{R})_{\text{tors}}$$

соответствующая задача упрощается, так как гомоморфизм

$$(\alpha_{\mathbb{C}}^*)_{\text{tors}}: \widetilde{CH}_0(X_{\mathbb{C}})_{\text{tors}} \rightarrow A(\mathbb{C})_{\text{tors}}$$

является изоморфизмом (см. [2]). Ядро гомоморфизма $(\alpha_{\mathbb{R}}^*)_{\text{tors}}$ является 2-элементарной группой, для размерности которого справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Выполняются неравенства*

$$\dim \text{Ker } \beta \leq \dim \text{Ker}[(\alpha_{\mathbb{R}}^*)_{\text{tors}}] \leq \dim \text{Ker } \beta + \dim H^1(G, \tilde{H}_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})).$$

Возникает вопрос о точности неравенств в теореме 2. Заметим сначала, что для кривых $\text{Ker}[(\alpha_{\mathbb{R}}^*)_{\text{tors}}] = 0$ $\text{Ker } \beta = 0$. Первое равенство вытекает из того, что для кривых гомоморфизм

$$\alpha_{\mathbb{R}}^*: \widetilde{CH}_0(X) \rightarrow A(\mathbb{R})$$

является изоморфизмом, что следует из равенств

$$\widetilde{CH}_0(X) = \text{Pic}^{(0)} X = (\text{Pic}^{(0)} X_{\mathbb{C}})^G = \widetilde{CH}_0(X_{\mathbb{C}})^G = A(\mathbb{C})^G = A(\mathbb{R}).$$

Второе равенство, фактически, проверено в [4]. Для поверхностей оказывается справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Если X является M -поверхностью, то выполняется равенство*

$$\dim \text{Ker}[(\alpha_{\mathbb{R}}^*)_{\text{tors}}] = \dim \text{Ker } \beta.$$

С другой стороны, мы приводим пример поверхности, для которой правое неравенство в теореме 2 становится равенством. Таким образом, неравенства в теореме 2 точные.

2. Доказательство результатов. Рассмотрим отображение цикла

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}: CH_0(X) \rightarrow H_0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2),$$

которое переводит цикл $\sum n_P [P]$ в класс гомологий $\sum n_P [P(\mathbb{R})]$. Тогда точна последовательность (см. [5])

$$\widetilde{CH}_0(X_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\pi_*} \widetilde{CH}_0(X) \xrightarrow{\text{cl}_{\mathbb{R}}} \widetilde{H}_0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2). \quad (1)$$

Рассмотрим гомоморфизм

$$\beta: A(\mathbb{R}) \rightarrow H^1(G, H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})),$$

который аналогичен гомоморфизму

$$\beta: \widetilde{H}_0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^1(G, \widetilde{H}_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})),$$

т.е. он устроен следующим образом: если $\theta: A(\mathbb{C}) \rightarrow A(\mathbb{C})$ – инволюция комплексного сопряжения, $x \in A(\mathbb{R})$, Γ – кривая в $A(\mathbb{C})$, соединяющая 0 с точкой x , то $\beta(x) \in H^1(G, H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))$ равен элементу, полученному из цикла $\Gamma - \theta(\Gamma)$. Тогда имеет место точная последовательность (см. [3])

$$A(\mathbb{C}) \xrightarrow{1+\theta} A(\mathbb{R}) \xrightarrow{\beta} H^1(G, H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \rightarrow 0. \quad (2)$$

Отображение $\alpha_{\mathbb{C}}: X(\mathbb{C}) \rightarrow A(\mathbb{C})$ индуцирует изоморфизм

$$(\alpha_{\mathbb{C}})_*: H^1(G, \widetilde{H}_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \rightarrow H^1(G, H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})),$$

композицию которого с гомоморфизмом

$$\beta: \widetilde{H}_0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^1(G, \widetilde{H}_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))$$

будем также обозначать через β . Тогда из точных последовательностей (1), (2) получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{CH}_0(X_{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{\pi_*} & \widetilde{CH}_0(X) & \xrightarrow{\text{cl}_{\mathbb{R}}} & \widetilde{H}_0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \alpha_{\mathbb{C}}^* & & \downarrow \alpha_{\mathbb{R}}^* & & \downarrow \beta & & \\ A(\mathbb{C}) & \xrightarrow{1+\theta} & A(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\beta} & H^1(G, H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (3)$$

Для проверки коммутативности этой диаграммы нужно использовать следующие свойства гомоморфизма $\alpha_{\mathbb{R}}^*$. Если $x \in X$ – вещественная точка, т.е. $[\mathbb{R}(x) : \mathbb{R}] = 1$, то $\alpha_{\mathbb{R}}^*(x - x_0) = \alpha_{\mathbb{R}}(x)$. Если $x \in X$ – комплексная точка, т.е. $[\mathbb{R}(x) : \mathbb{R}] = 2$, то $x \otimes \mathbb{C}$ распадается на две точки $x_1, x_2 \in X(\mathbb{C})$ такие, что $\tau(x_1) = x_2$ и $\alpha_{\mathbb{R}}^*(x - 2x_0) = \alpha_{\mathbb{C}}(x_1) + \alpha_{\mathbb{C}}(x_2) = (1 + \theta)\alpha_{\mathbb{C}}(x_1)$. Теперь из определения гомоморфизмов, участвующих в диаграмме (3),

нетрудно убедиться в ее коммутативности. Так как гомоморфизм $\alpha_{\mathbb{C}}^*$ эпиморфен, из диаграммы (3) получаем равенство

$$\mathrm{Coker} \alpha_{\mathbb{R}}^* = \mathrm{Coker} [\beta: \widetilde{H}_0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^1(G, H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))].$$

Таким образом, теорема 1 доказана; переходим к доказательству теоремы 2.

Сначала покажем, что $\mathrm{Ker}[(\alpha_{\mathbb{R}}^*)_{\mathrm{tors}}]$ является 2-элементарной группой. Действительно, гомоморфизм $\alpha_{\mathbb{R}}^*$ равен композиции $\alpha_{\mathbb{C}}^* \circ \pi^*$; поэтому из мономорфности гомоморфизма $(\alpha_{\mathbb{C}}^*)_{\mathrm{tors}}$ получаем равенство

$$\mathrm{Ker}[(\alpha_{\mathbb{R}}^*)_{\mathrm{tors}}] = \mathrm{Ker}[\pi^*: \widetilde{CH}_0(X)_{\mathrm{tors}} \rightarrow \widetilde{CH}_0(X_{\mathbb{C}})_{\mathrm{tors}}].$$

Осталось заметить, что композиция $\pi_* \circ \pi^*$ является умножением на 2. Перейдем к доказательству неравенства

$$\dim \mathrm{Ker}[(\alpha_{\mathbb{R}}^*)_{\mathrm{tors}}] \geq \dim \mathrm{Ker}[\beta: \widetilde{H}_0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^1(G, H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))]. \quad (4)$$

Для этого рассмотрим аналог диаграммы (3) для групп кручения

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{CH}_0(X_{\mathbb{C}})_{\mathrm{tors}} & \xrightarrow{\pi_*} & \widetilde{CH}_0(X)_{\mathrm{tors}} & \xrightarrow{\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}} & \widetilde{H}_0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \alpha_{\mathbb{C}}^* & & \downarrow \alpha_{\mathbb{R}}^* & & \downarrow \beta & & \\ A(\mathbb{C})_{\mathrm{tors}} & \xrightarrow{1+\theta} & A(\mathbb{R})_{\mathrm{tors}} & \xrightarrow{\beta} & H^1(G, H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) & & \end{array} \quad (5)$$

Строки в этой диаграмме точны, причем они расщепляются (см. подробности в [3], [5], [6]). Заметим теперь, что неравенство (4) вытекает из диаграммы (5), так как по теореме Ройтмана гомоморфизм $\alpha_{\mathbb{C}}^*$ в диаграмме (5) является изоморфизмом. Из диаграммы (5) также следует, что для окончания доказательства теоремы 2 достаточно установить неравенство

$$\dim \mathrm{Ker}[\alpha_{\mathbb{R}}^*: \pi_*(\widetilde{CH}_0(X_{\mathbb{C}})_{\mathrm{tors}}) \rightarrow (1+\theta)(A(\mathbb{C})_{\mathrm{tors}})] \leq \dim H^1(G, H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})). \quad (6)$$

Для доказательства этого неравенства рассмотрим следующую коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}[(\pi_*)_{\mathrm{tors}}] & \longrightarrow & \widetilde{CH}_0(X_{\mathbb{C}})_{\mathrm{tors}} & \xrightarrow{\pi_*} & \pi_*(\widetilde{CH}_0(X_{\mathbb{C}})_{\mathrm{tors}}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_{\mathbb{C}}^* & & \cong \downarrow \alpha_{\mathbb{C}}^* & & \downarrow \alpha_{\mathbb{C}}^* \\ 0 & \longrightarrow & (A(\mathbb{C})_{\mathrm{tors}})^- & \longrightarrow & A(\mathbb{C})_{\mathrm{tors}} & \xrightarrow{1+\theta} & (1+\theta)(A(\mathbb{C})_{\mathrm{tors}}) \longrightarrow 0 \end{array},$$

где $(A(\mathbb{C})_{\mathrm{tors}})^-$ – антиинвариантная относительно θ подгруппа $A(\mathbb{C})_{\mathrm{tors}}$. Из этой диаграммы вытекает изоморфизм

$$\begin{aligned} & \mathrm{Ker}[\alpha_{\mathbb{C}}^*: \pi_*(\widetilde{CH}_0(X_{\mathbb{C}})_{\mathrm{tors}}) \rightarrow (1+\theta)(A(\mathbb{C})_{\mathrm{tors}})] \\ & = \mathrm{Coker}[\alpha_{\mathbb{C}}^*: \mathrm{Ker}[(\pi_*)_{\mathrm{tors}}] \rightarrow (A(\mathbb{C})_{\mathrm{tors}})^-], \end{aligned}$$

поэтому неравенство (6) равносильно неравенству

$$\dim \operatorname{Coker}[\alpha_{\mathbb{C}}^*: \operatorname{Ker}[(\pi_*)_{\operatorname{tors}}] \rightarrow (A(\mathbb{C})_{\operatorname{tors}})^-] \leq \dim H^1(G, H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})). \quad (7)$$

А это неравенство вытекает из следующих соображений. Группа $\operatorname{Ker}[(\pi_*)_{\operatorname{tors}}]$ содержит подгруппу $(1 - \tau_*)(\widetilde{CH}_0(X_{\mathbb{C}})_{\operatorname{tors}})$, которая изоморфно отображается на подгруппу $(1 - \theta)(A(\mathbb{C})_{\operatorname{tors}})$ группы $(A(\mathbb{C})_{\operatorname{tors}})^-$. Остается заметить, что выполняются равенства (см. [4])

$$\begin{aligned} (A(\mathbb{C})_{\operatorname{tors}})^- / (1 - \theta)(A(\mathbb{C})_{\operatorname{tors}}) &= H^2(G, H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})), \\ \dim H^2(G, H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) &= \dim H^1(G, H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})). \end{aligned}$$

Итак, неравенство (7) установлено, а поэтому полностью доказана теорема 2.

Переходим к доказательству третьей теоремы. Итак, X – M -поверхность, и пусть $\mathcal{H}^q$ – пучок на X_{rav} , соответствующий предпучку $U \mapsto H_{\operatorname{et}}^q(U, \mathbb{Z}/2)$. Тогда существует канонический эпиморфизм (см. [7], [8])

$$H^1(X, \mathcal{H}^2) \rightarrow {}_2\widetilde{CH}_0(X) \rightarrow 0.$$

Аналогично, имеем эпиморфизм

$$H^1(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^2) \rightarrow {}_2\widetilde{CH}_0(X_{\mathbb{C}}) \rightarrow 0,$$

где $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^2$ – аналогичный пучок на $X_{\mathbb{C}}$. Из этих эпиморфизмов получается коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} H^1(X, \mathcal{H}^2) & \longrightarrow & {}_2\widetilde{CH}(X) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \pi^* & & \downarrow \pi^* & & \\ H^1(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^2) & \longrightarrow & {}_2\widetilde{CH}_0(X_{\mathbb{C}}) & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (8)$$

Мы сначала покажем, что для M -поверхности эпиморфизм гомоморфизм

$$\pi^*: {}_2\widetilde{CH}_0(X) \rightarrow {}_2\widetilde{CH}_0(X_{\mathbb{C}}).$$

Из коммутативной диаграммы (8) следует, что для этого достаточно установить эпиморфность гомоморфизма

$$\pi^*: H^1(X, \mathcal{H}^2) \rightarrow H^1(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^2). \quad (9)$$

С помощью спектральной последовательности

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}^q) \implies H_{\operatorname{et}}^{p+q}(X, \mathbb{Z}/2)$$

в [7] установлено, что группа $H^1(X, \mathcal{H}^2)$ является ядром гомоморфизма ограничения

$$\gamma: H_{\operatorname{et}}^3(X, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\operatorname{et}}^3(\cup x_i, \mathbb{Z}/2),$$

где $x_i \in X_i$, $i = 0, \dots, n$, – фиксированные точки. Аналогичные, но более простые соображения показывают, что группа $H^1(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^2)$ совпадает с группой $H_{\text{et}}^3(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2)$. Таким образом, гомоморфизм (9) совпадает с гомоморфизмом

$$\pi^*: \text{Ker } \gamma \rightarrow H_{\text{et}}^3(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2).$$

Группа $H_{\text{et}}^3(X, \mathbb{Z}/2)$ совпадает с группой $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2)$, а группа $H_{\text{et}}^3(\cup x_i, \mathbb{Z}/2)$ равна $H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$, причем гомоморфизм γ равен композиции гомоморфизмов

$$\begin{aligned} H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2) &\rightarrow H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}/2) = \bigoplus_{q=0}^2 H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2), \\ \bigoplus_{q=0}^2 H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) &\rightarrow H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2), \end{aligned}$$

первый из которых является гомоморфизмом ограничения, а второй – проекцией (см. [9]). Эту композицию будем обозначать через γ' . Тогда получаем, что гомоморфизм (9) совпадает с гомоморфизмом

$$e: \text{Ker } \gamma' \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2), \quad (10)$$

где e – краевой гомоморфизм

$$e: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2) \quad (11)$$

в спектральной последовательности

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)) \implies H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2).$$

Краевой гомоморфизм (11) для M -поверхности эпиморфен, так как для этой поверхности $H^0(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)) = H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)$ и спектральная последовательность $\Pi_r^{p,q}$ вырождается (см. [10]). Чтобы установить эпиморфность гомоморфизма (10) рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\gamma'} & H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \\ \downarrow \cup t & & \parallel \\ H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\gamma'} & H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \end{array}, \quad (12)$$

где t – образующая группы $H^1(\text{pt}; G, \mathbb{F}_2)$, а pt – точка. Верхний гомоморфизм γ' в этой диаграмме является эпиморфизмом (см. [11]), а образ гомоморфизма $\cup t$ совпадает с ядром краевого гомоморфизма (11) (это вытекает из рассмотрения спектральной последовательности $\Pi_r^{p,q}$). Из этих фактов про коммутативную диаграмму (12) следует эпиморфность гомоморфизма (10), тем самым эпиморфность гомоморфизма

$$\pi^*: {}_2\widetilde{CH}_0(X) \rightarrow {}_2\widetilde{CH}(X_{\mathbb{C}})$$

установлена. Следовательно, гомоморфизм

$$\alpha_{\mathbb{R}}^*: {}_2\widetilde{CH}_0(X) \rightarrow {}_2A(\mathbb{R}) \quad (13)$$

также эпиморфен, поскольку $\alpha_{\mathbb{R}}^* = \alpha_{\mathbb{C}}^* \circ \pi^*$, а гомоморфизм

$$\alpha_{\mathbb{C}}^*: {}_2\widetilde{CH}_0(X) \rightarrow {}_2A(\mathbb{C})$$

является изоморфизмом. Вернемся теперь к рассмотрению коммутативной диаграммы (5). Так как ядро гомоморфизма $\alpha_{\mathbb{R}}^*$ в ней состоит из элементов второго порядка, а группы $\pi_*(\widetilde{CH}_0(X_{\mathbb{C}})_{\text{tors}})$, $(1 + \theta)(A(\mathbb{C})_{\text{tors}})$ делимые, то гомоморфизм

$$\alpha_{\mathbb{R}}^*: \pi_*(\widetilde{CH}_0(X_{\mathbb{C}})_{\text{tors}}) \rightarrow (1 + \theta)(A(\mathbb{C})_{\text{tors}})$$

является изоморфизмом (это вытекает из эпиморфности гомоморфизма (13)). Поэтому из диаграммы (5) следует утверждение теоремы 3.

3. Пример. А теперь мы приведем пример поверхности X , для которой правое неравенство в теореме 2 становится равенством. Пусть Y – эллиптическая M -кривая. Тогда существует вложение тела Y^3 в $\mathbb{P}^N$, для которого найдется гиперплоское сечение X с множеством вещественных точек $X(\mathbb{R})$, гомеоморфным сфере (см. [10]). Для такой поверхности X $\dim \text{Ker } \beta = 0$ ввиду $\tilde{H}_0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = 0$, а $\dim H^1(G, \tilde{H}_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) = 3$, так как инволюция

$$\tau_*: H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)$$

тривиальна. В силу равенств (см. [10])

$$\begin{aligned} \dim \Pi_{\infty}^{5,0} &= \dim \Pi_{\infty}^{1,4} = 1, \\ \sum_{p+q=5} \dim \Pi_{\infty}^{p,q} &= \dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = 2 \end{aligned}$$

имеем равенство $\dim \Pi_{\infty}^{1,3} = 0$. Используя умножение на образующую $t \in H^1(\text{pt}; G, \mathbb{Z}/2)$, получим равенство $\dim \Pi_{\infty}^{0,3} = 0$. А это равенство означает, что краевой гомоморфизм (11) нулевой. Тогда из диаграммы (8) мы получим, что гомоморфизм

$$\alpha_{\mathbb{R}}^*: {}_2\widetilde{CH}_0(X) \rightarrow {}_2A(\mathbb{R})$$

равен 0. Осталось заметить, что из диаграммы (5) вытекает равенство

$$\dim {}_2\widetilde{CH}_0(X) = \dim_{\mathbb{C}} A(\mathbb{C}) = 3.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как группы $\pi_*(\widetilde{CH}_0(X_{\mathbb{C}})_{\text{tors}})$, $(1 + \theta)(A(\mathbb{C})_{\text{tors}})$ делимые и существует изоморфизм

$$(1 + \theta)(A(\mathbb{C})_{\text{tors}}) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^q,$$

где $q = \dim_{\mathbb{C}} A(\mathbb{C})$, из диаграммы (5) выводится существование изоморфизма

$$\widetilde{CH}_0(X)_{\text{tors}} = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^q \oplus \tilde{H}_0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

для многообразия любой размерности.

Вполне возможно, что теорема 3 справедлива для GM -поверхности. По крайней мере она справедлива для GM -поверхности со свободной группой $H_*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$; доказательство этого утверждения почти полностью повторяет доказательство теоремы 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ройтман А. А. Рациональная эквивалентность нульмерных циклов // Матем. сб. 1972. Т. 89. № 4. С. 569–585.
- [2] Roitman A. The torsion of the group of 0-cycles modulo rational equivalence // Ann. of Math. (2). 1980. V. 111. № 3. P. 553–569.
- [3] Краснов В. А. Отображение Альбанезе для GMZ -многообразий // Матем. заметки. 1984. Т. 35. № 5. С. 739–747.
- [4] Краснов В. А. Отображение Альбанезе для вещественных алгебраических многообразий // Матем. заметки. 1982. Т. 32. № 3. С. 365–373.
- [5] Colliot-Thélène J.-L., Ischebeck F. L'équivalence rationnelle sur les cycles de dimension zéro des variétés algébriques réelles // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1981. V. 292. P. 723–725.
- [6] Colliot-Thélène J.-L., Sansuc J.-J., Soulé C. Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux // Duke Math. J. 1983. V. 50. P. 763–801.
- [7] Colliot-Thélène J.-L., Parimala R. Real components of algebraic varieties and étale cohomology // Invent. Math. 1990. V. 101. P. 81–99.
- [8] Bloch S. Lectures on Algebraic Cycles. Durham (N.C.): Duke Univ. Press, 1980.
- [9] Nikulin V. V. On the Brauer group of real algebraic surfaces // Algebraic Geometry and its Applications. Yaroslavl', 1992. P. 114–136.
- [10] Краснов В. А. Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 2. С. 268–297.
- [11] Краснов В. А. Об эквивариантных когомологиях Гротендика вещественного алгебраического многообразия и их приложениях // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 36–52.

Ярославский государственный университет

Поступило
04.08.97