Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Балахнев, Интегрируемые векторные изотропные уравнения, допускающие дифференциальные подстановки первого порядка, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 3, 323–330

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10303>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:33:04

Интегрируемые векторные изотропные уравнения, допускающие дифференциальные подстановки первого порядка

М. Ю. Балахнёв

Представлена симметричная классификация интегрируемых векторных эволюционных уравнений третьего порядка, допускающих преобразования типа Миуры. Найдено авто-преобразование Беклунда для нового уравнения, а так же дифференциальные подстановки, связывающие решения некоторых интегрируемых изотропных уравнений.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm10303

Введение. Рассмотрим векторное эволюционное уравнение третьего порядка

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + f_2 \mathbf{u}_2 + f_1 \mathbf{u}_1 + f_0 \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_t = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \mathbf{u}_i = \frac{\partial^i \mathbf{u}}{\partial x^i}, \quad (\text{VE})$$

где $\mathbf{u}(x, t)$ – неизвестный вектор, принадлежащий некоторому n -мерному векторному пространству V со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, а f_k – неизвестные функции, зависящие от всевозможных скалярных произведений векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$.

Следуя [1], обозначим скалярные произведения $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = u_{[i,j]}$, $0 \leq i \leq j \leq 2$; тогда $f_k = f_k(u_{[0,0]}, u_{[0,1]}, u_{[1,1]}, u_{[0,2]}, u_{[1,2]}, u_{[2,2]})$ и уравнение (VE) в этом случае называют *изотропным*. *Анизотропию* вводят с помощью дополнительного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$, т.е. $f_k = f_k(u_{[i,j]}, \tilde{u}_{[i,j]})$, где $\tilde{u}_{[i,j]} = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle$.

Симметричная классификация интегрируемых уравнений (VE) при различных ограничениях, в том числе и на f_k , проводилась в [1]–[6]. В указанных работах необходимым условием интегрируемости (VE) является существование бесконечной серии законов сохранения

$$D_t \rho_l = D_x \theta_l, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{CL})$$

Здесь ρ_l – канонические сохраняющиеся плотности (подробнее см. [1]), θ_l – неизвестные функции, D_x – полная производная по x , D_t – эволюционная производная, т.е. производная в силу (VE). При этом рекуррентная формула для ρ_l (формула (32) в [1]) позволяет найти явный вид f_k , проверив конечное число условий (CL).

Работа выполнена при поддержке Министерства образования РФ (грант № 1.2.11).

В статье [7] было установлено, что дифференциальную подстановку

$$\mathbf{u} = h_1 \mathbf{v}_1 + h_0 \mathbf{v}, \quad h_i = h_i(v_{[0,0]}, v_{[0,1]}, v_{[1,1]}), \quad h_1 \neq 0, \quad (\text{DS})$$

связывающую решения $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ различных уравнений (VE), могут допускать только уравнения вида

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + \frac{3}{2} D_x(\ln f) \mathbf{u}_2 + (G_2 u_{[0,2]} + G_1) \mathbf{u}_1 + (H_2 u_{[1,2]} + H_1) \mathbf{u}, \quad (\text{VE-DS})$$

где $f = f(u_{[0,0]}, u_{[0,1]})$, $G_i = G_i(u_{[0,0]}, u_{[0,1]}, u_{[1,1]})$, $H_i = H_i(u_{[0,0]}, u_{[0,1]}, u_{[1,1]}, u_{[0,2]})$.

Цель данной работы – симметричная классификация уравнений (VE-DS). Кроме того, в качестве примера, мы вычислили подстановки (DS), связывающие решения известных интегрируемых в $\mathbb{R}^n$ изотропных уравнений [4], [5].

1. Результаты классификации.

ТЕОРЕМА. *Всякое уравнение (VE-DS), удовлетворяющее шести условиям (CL), либо приводится к треугольной системе $\mathbf{v}_t = \mathbf{K}(\mathbf{v})$, $r_t = H(\mathbf{v}, r)$ в переменных $\mathbf{v} = \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$, $r = |\mathbf{u}|$, либо эквивалентно относительно точечных преобразований $\mathbf{u} = F(v_{[0,0]})\mathbf{v}$ одному из уравнений списка:*

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + u_{[0,0]} \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + u_{[0,0]} \mathbf{u}_1 + u_{[0,1]} \mathbf{u}, \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + \frac{3}{2} \left(\left(\frac{u_{[0,1]}^2}{1 + u_{[0,0]}} - u_{[1,1]} \right) \mathbf{u} \right)_x + a u_{[0,0]} \mathbf{u}_1, \quad (3)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + \frac{3}{2} \left(\frac{u_{[0,1]}^2}{1 + u_{[0,0]}} - u_{[1,1]} \right)_x \mathbf{u} + 3 \left(\frac{u_{[0,1]}^2}{1 + u_{[0,0]}} - u_{[1,1]} \right) \mathbf{u}_1, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + \frac{3}{2} \left(\frac{u_{[0,1]}^2 + a}{1 + u_{[0,0]}} - u_{[1,1]} \right)_x \mathbf{u} \\ - \frac{3}{1 + u_{[0,0]}} \left(u_{[0,2]} - u_{[0,0]} u_{[1,1]} + u_{[0,0]} \frac{u_{[0,1]}^2 + a}{1 + u_{[0,0]}} \right) \mathbf{u}_1, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + \frac{3}{2} \left(\frac{u_{[0,1]}^2}{1 + u_{[0,0]}} - u_{[1,1]} \right)_x \mathbf{u} + \frac{3(1 - u_{[0,0]})}{2(1 + u_{[0,0]})} \left(\frac{u_{[0,1]}^2}{1 + u_{[0,0]}} - u_{[1,1]} \right) \mathbf{u}_1 \\ - \frac{3}{1 + u_{[0,0]}} \left(u_{[0,2]} - a u_{[0,0]} - \frac{u_{[0,1]}^2}{2(1 + u_{[0,0]})} \right) \mathbf{u}_1, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - 3 \frac{u_{[0,1]}}{u_{[0,0]}} \mathbf{u}_2 - \frac{3}{2} \left(\frac{u_{[1,1]}}{u_{[0,0]}} - 2 \frac{u_{[0,1]}^2}{u_{[0,0]}^2} + a u_{[0,0]} \right) \mathbf{u}_1, \quad (7)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - 3 \frac{u_{[0,1]}}{u_{[0,0]}} \mathbf{u}_2 + 3 \left(\frac{u_{[0,1]}^2}{u_{[0,0]}^2} - \frac{u_{[1,1]}}{u_{[0,0]}} + a u_{[0,0]}^2 \right) \mathbf{u}_1 + 3 a u_{[0,0]} u_{[0,1]} \mathbf{u}, \quad (8)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - 3 \frac{u_{[0,1]}}{u_{[0,0]}} \mathbf{u}_2 + \frac{3}{2} \left(5 \frac{u_{[0,1]}^2}{u_{[0,0]}^2} + \frac{a - u_{[1,1]} - 2 u_{[0,2]}}{u_{[0,0]}} \right) \mathbf{u}_1, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - 3 \frac{u_{[0,1]}}{u_{[0,0]}} \mathbf{u}_2 - \frac{3}{2} \left(2 \frac{u_{[0,2]}}{u_{[0,0]}} + \frac{u_{[1,1]}}{u_{[0,0]}} + 5a \frac{u_{[0,1]}}{u_{[0,0]}} \right) \mathbf{u}_1 \\ + 3 \left(\frac{u_{[1,2]}}{u_{[0,0]}} - \frac{u_{[0,1]} u_{[1,1]}}{u_{[0,0]}^2} + \frac{a u_{[1,1]}}{4 u_{[0,0]}} + a \frac{u_{[0,1]}^2}{u_{[0,0]}^2} + \frac{4 u_{[0,1]}^3}{3 u_{[0,0]}^3} \right) \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (10)$$

где a – произвольная постоянная.

СОКРАЩЕННОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Для определения неизвестных функций в (VE-DS) необходимо удовлетворить условиям интегрируемости (CL).

Нулевое условие интегрируемости для (VE) выполняется автоматически: так как $\rho_0 = -f_2/3$ (см. формулу (30) в [1]), в случае (VE-DS) имеем

$$D_t \left(-\frac{1}{2} D_x(\ln f) \right) = D_x \theta_0,$$

где, очевидно, следует положить $\theta_0 = -(1/2) D_t(\ln f)$.

Первое и второе условия интегрируемости примут вид (см. (31) и (32) в [1])

$$\begin{aligned} D_t \left([D_x(\ln f)]^2 - \frac{4}{3} (G_2 u_{[0,2]} + G_1) + 2 D_x^2(\ln f) \right) &= D_x \theta_1, \\ D_t \left(2(H_2 u_{[1,2]} + H_1) + D_t(\ln f) + \frac{1}{2} [D_x(\ln f)]^3 - (G_2 u_{[0,2]} + G_1) D_x(\ln f) \right) &= D_x \theta_2. \end{aligned}$$

Этапы вычислений, проводимые при анализе указанных условий, описывались во многих работах, посвященных симметричной классификации интегрируемых уравнений [1]–[3], [8]–[12], поэтому мы остановимся лишь на ключевых моментах.

Первое и второе условия (CL) позволяют найти $\partial f / \partial u_{[0,1]} = 0$. Далее, поскольку точечное преобразование $\mathbf{u} = F(v_{[0,0]}) \mathbf{v}$ не меняет вида (VE-DS) (соответствующие формулы перехода можно получить, положив $h_1 = 0$, $h_0 = h_0(v_{[0,0]})$ в уравнениях (2.8)–(2.12) статьи [7]) и, следовательно, сохраняет возможность существования дифференциальной подстановки (DS) для (VE-DS), при $f = f(u_{[0,0]})$ возможны только два неэквивалентных варианта:

$$(A): \quad f = \text{const},$$

$$(B): \quad f = u_{[0,0]}^{-1}.$$

Отметим, что указанные случаи следуют из требования обратимости точечного преобразования и уравнения (2.9) работы [7].

Случай (A) равносильен $f_2 = 0$ в (VE) (полный список таких уравнений представлен в [4]) и мы имеем уравнения (1)–(6).

Случай (B) при $H_2 = 0$, $\partial H_1 / \partial u_{[0,2]} = 0$, что равносильно $f_0 = f_0(u_{[0,0]}, u_{[0,1]}, u_{[1,1]})$ в (VE) (полный список таких уравнений получен в [5]), приводит к (7)–(9). В остальных случаях находим новое уравнение (10), а также уравнения либо приводящиеся точечными преобразованиями к (1)–(10), либо сводящиеся к треугольному виду в переменных $\mathbf{v} = \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$, $r = |\mathbf{u}|$, так что $\mathbf{v}$ удовлетворяет одному из двух интегрируемых на сфере уравнений (ср. (3.1) или (3.2) в работе [7]).

2. Примеры дифференциальных подстановок. Поиск дифференциальных подстановок для (1)–(10) при условии, что $\mathbf{v}$ в (DS) удовлетворяет (VE) с произвольными f_k , – трудоемкая задача, которая в рамках данной работы не рассматривается. Решение указанной задачи хоть и позволило бы расширить список интегрируемых уравнений, но, в отличие от симметричной классификации, не гарантировало бы его полноту. В этой связи, в качестве примера, мы нашли только те подстановки (DS), которые связывают уравнения теоремы с уравнениями из [4], [5].

Алгоритм вычисления дифференциальных подстановок (DS) был подробно рассмотрен в [7], поэтому здесь мы представляем только конечный результат расчетов. Далее по тексту будем считать, что $\mathbf{u}$ есть решение одного из уравнений списка теоремы и его номер указан в названии подраздела, а уравнение для вектора $\mathbf{v}$ будем записывать в виде $(X)_{[Y]}$, где X – номер уравнения в статье [Y]. Кроме того, обозначим $|\mathbf{u}_i| = \sqrt{u_{[i,i]}}$.

Уравнение (1):

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\mathbf{v}_1 - \frac{v_{[0,1]}}{1 + v_{[0,0]}} \mathbf{v} \right) + \sqrt{\frac{3a}{1 + v_{[0,0]}}} \mathbf{v}, \quad i^2 = -1,$$

где $\mathbf{v}$ – решение (6);

$$\mathbf{u} = i \frac{\sqrt{6}}{2} \left(|\mathbf{v}|^{-1} \mathbf{v}_1 + \sqrt{a} \mathbf{v} \right),$$

где $\mathbf{v}$ – решение (7).

Уравнение (2):

$$\mathbf{u} = \sqrt{3} \left(\mathbf{v}_1 - \frac{v_{[0,1]} + i\sqrt{a}}{1 + v_{[0,0]}} \mathbf{v} \right),$$

где $\mathbf{v}$ – решение (5);

$$\mathbf{u} = \sqrt{3} (i|\mathbf{v}|^{-1} \mathbf{v}_1 + \sqrt{a} |\mathbf{v}| \mathbf{v}),$$

где $\mathbf{v}$ – решение (8).

Уравнение (3):

$$\mathbf{u} = i\mathbf{v}_1 + h_0 \mathbf{v}, \quad h_0^2 = \frac{2}{3} a (1 + (i\mathbf{v}_1 + h_0 \mathbf{v})^2),$$

где $\mathbf{v}$ – решение (3.14)_[5], с членом “ $c\mathbf{u}_1$ ” в правой части,

$$\mathbf{u} = i\mathbf{v}_x + \sqrt{1 - v_{[1,1]} + \frac{v_{[0,1]}^2}{v_{[0,0]} + 1}} \mathbf{v}, \quad a = 0,$$

где $\mathbf{v}$ – решение (12)_[4],

$$\mathbf{u} = i|\mathbf{v}_1|^{-1} \left(\mathbf{v}_1 - \frac{2v_{[0,1]}}{v_{[0,0]} + A} \mathbf{v} \right), \quad A \neq 0,$$

где $\mathbf{v}$ – решение (3.10)_[5], с членом “ $c\mathbf{u}_1$ ” в правой части;

$$\mathbf{u} = A|\mathbf{v}|^{-1} \mathbf{v}_1, \quad a = -\frac{3}{2} A^{-2},$$

где $\mathbf{v}$ – решение (3.17)_[5];

$$\mathbf{u} = k|\mathbf{v}|^{-1}\mathbf{v}_1 + h_0\mathbf{v}, (1 + ch_0^2)v_{[0,0]} + (k\mathbf{v}_1 + h_0|\mathbf{v}|\mathbf{v})^2 = 0, \quad a = -\frac{3}{2}k^{-2},$$

где $\mathbf{v}$ – решение (3.19)_[5];

$$\mathbf{u} = \sqrt{\frac{v_{[0,0]}}{v_{[0,1]}^2 - v_{[0,0]}v_{[1,1]}}} \left(\mathbf{v}_1 - \frac{Av_{[0,1]}}{|\mathbf{v}| + Av_{[0,0]}} \mathbf{v} \right), \quad a = -\frac{3}{2}c_1,$$

где $\mathbf{v}$ – решение (3.21)_[5], с членом “ $c\mathbf{u}_1$ ” в правой части.

Уравнение (4):

$$\mathbf{u} = i|\mathbf{v}|^{-1} \left(\mathbf{v}_1 - \frac{2v_{[0,1]}}{v_{[0,0]} + A} \mathbf{v} \right),$$

где $\mathbf{v}$ – решение (3.11)_[5];

$$\mathbf{u} = \sqrt{\frac{v_{[0,0]}}{v_{[0,1]}^2 - v_{[0,0]}v_{[1,1]}}} \left(\mathbf{v}_1 - \frac{Av_{[0,1]}}{|\mathbf{v}|(1 + A|\mathbf{v}|)} \mathbf{v} \right),$$

где $\mathbf{v}$ – решение (3.23)_[5];

$$\mathbf{u} = h_1\mathbf{v}_1 + h_0\mathbf{v}, \quad h_0 = \frac{i - 2v_{[0,1]}h_1^2}{2(v_{[0,0]} + A)h_1}, \quad h_1^{-2} = 2(1 - p)(v_{[0,0]} + A),$$

где $\mathbf{v}$ – решение (3.25)_[5].

Уравнения (5)–(8). Анализ уравнений (2.8)–(2.11) из [7] показал, что (5)–(8) вообще не допускают подстановок (DS) в (VE): при попытке удовлетворить указанным условиям получаем $h_1 = 0$.

Как можно видеть выше, решения уравнений (5)–(8) связаны с решениями (1) и (2). Скорее всего отсутствие подстановок (DS) для (5)–(8) объясняется тем, что для (1) и (2) не существует дифференциальных подстановок второго порядка. Проверка данного предположения, а так же изучение дифференциальных подстановок произвольного вида в (1) и (2) – возможное направление для будущих исследований.

Уравнение (9):

$$\mathbf{u} = \frac{-v_{[0,0]}\mathbf{v}_1}{\sqrt{v_{[0,0]}(1 - v_{[1,1]}) + v_{[0,1]}^2 + v_{[0,1]}}} + \mathbf{v}, \quad a = -1,$$

где $\mathbf{v}$ – решение (11)_[4];

$$\mathbf{u} = \frac{iv_{[0,0]}\sqrt{a(1 + v_{[0,0]})}}{(1 + v_{[0,0]})\xi + v_{[0,1]}} \left(\mathbf{v}_1 - \frac{v_{[0,1]} + \xi}{v_{[0,0]}} \mathbf{v} \right), \quad \xi^2 = v_{[0,0]}(1 - v_{[1,1]}) + v_{[0,1]}^2,$$

где $\mathbf{v}$ – решение (12)_[4];

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}_1}{v_{[0,1]}},$$

где $\mathbf{v}$ – решение (3.8)_[5];

$$\mathbf{u} = \frac{v_{[0,0]}}{v_{[0,1]}} \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v},$$

где $\mathbf{v}$ – решение (3.10)_[5];

$$\mathbf{u} = \frac{v_{[0,0]}}{v_{[0,1]}} \mathbf{v}_1 - \mathbf{v},$$

где $\mathbf{v}$ – решение (3.22)_[5].

Уравнение (10):

$$\mathbf{u} = |\mathbf{v}_1|^{-1} \left(2 \frac{|\mathbf{v}_1| + \sqrt{v_{[1,1]} + Av_{[0,0]}^2}}{v_{[0,0]}} \right)^{\sqrt{5}/5} \left(\mathbf{v}_1 - \frac{2v_{[0,1]}}{v_{[0,0]}} \mathbf{v} \right), \quad a = 0,$$

где $\mathbf{v}$ – решение (3.9)_[5] при $b = c = 0$.

3. Заключительные замечания. Уравнения (1) и (2) – известные векторные обобщения уравнения мКдФ, (3)–(6) впервые получены в [4] и при $a = 0$ в (3) имеем уравнение (9)_[2].

Точечное преобразование

$$\mathbf{u} = \frac{i}{2} \left(\frac{2a}{\sqrt{1 + av_{[0,0]}} - 1} \right)^{1/2} \mathbf{v}$$

связывает решение $\mathbf{u}$ уравнения (4) с решением $\mathbf{v}$ уравнения (12)_[2]. Кроме того, уравнения (11)_[2] при $a = 0$, (13)_[2] и (14)_[2] суть треугольные системы в переменных $\mathbf{v} = \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$, $r = |\mathbf{u}|$.

Уравнения (7) и (9) _{$a=-1$} теоремы связаны с (18)_[6] и (17)_[6] соответственно преобразованиями $\mathbf{u} = |\mathbf{v}|\mathbf{v}$ и $\mathbf{u} = |\mathbf{v}|^{-3}\mathbf{v}$.

Решения $\mathbf{u}$ уравнения (10) _{$a=0$} связаны с решениями $\mathbf{v}$ уравнений (10)_[2] и (11)_[2] соответственно преобразованиями

$$\mathbf{u} = |\mathbf{v}|^{-(1+\sqrt{5}/5)} \mathbf{v}, \quad \mathbf{u} = \left(1 + 2Av_{[0,0]} + 2\sqrt{Av_{[0,0]}(1 + Av_{[0,0]})} \right)^{\sqrt{5}/10} |\mathbf{v}|^{-1} \mathbf{v}.$$

Доказательством точной интегрируемости нового уравнения (10) является его авто-преобразование Беклунда (определение см. в [1], примеры в [2]–[6]):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 = & \frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v}_1 + \left(\frac{|\mathbf{v}|(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) - |\mathbf{u}|(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)}{((\mathbf{u}, \mathbf{v}) - |\mathbf{u}||\mathbf{v}|)^2(\mathbf{v}, \mathbf{v})} + \frac{k_1|\mathbf{u}|^B|\mathbf{v}|^{-B} + k_2|\mathbf{u}|^{-A}|\mathbf{v}|^A}{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - |\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \right) (|\mathbf{v}|\mathbf{u} - |\mathbf{u}|\mathbf{v}) \\ & - \left(2 \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}, \mathbf{v})} + a \right) \mathbf{u} + \left(k_1 \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \frac{|\mathbf{u}|^A}{|\mathbf{v}|^B} + k_2 \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \frac{|\mathbf{v}|^A}{|\mathbf{u}|^B} \right) ((\mathbf{u}, \mathbf{v}) - |\mathbf{u}||\mathbf{v}|) \mathbf{u}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ – решения (10), k_1, k_2 – произвольные константы, $AB = 1$, $A - B = -1$.

В заключение приведем два новых уравнения, которые помогут понять читателю почему в рамках данной работы не получен полный список подстановок (DS).

Первое уравнение

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t = & \mathbf{v}_3 + \left(\frac{v_{[0,1]}}{v_{[0,0]}} + \frac{\eta}{\xi} \right) \mathbf{v}_2 - \left(\frac{3av_{[0,0]}v_{[2,2]}}{4\xi} - \frac{3v_{[1,2]}}{v_{[0,0]}} + \frac{3(av_{[0,0]} + 4v_{[0,1]})v_{[1,1]}}{4v_{[0,0]}^2} - \frac{4v_{[0,1]}^3}{v_{[0,0]}^3} \right. \\ & + \frac{3av_{[0,1]}^2}{v_{[0,0]}^2} + \frac{3(v_{[0,2]}\varphi + v_{[1,2]}\eta)(av_{[0,0]} - 4v_{[0,1]})}{4\xi^2} - \frac{3(2v_{[0,1]}\varphi + v_{[0,0]}v_{[0,2]}v_{[1,2]})}{v_{[0,0]}\xi} \Big) \mathbf{v} \\ & + \frac{3}{2} \left(\frac{v_{[0,0]}v_{[2,2]}}{\xi} + \frac{(v_{[0,0]}\eta + 2v_{[0,1]}\xi)^2 - \xi(v_{[0,0]}v_{[0,2]} + \xi)^2}{v_{[0,0]}^2\xi^2} \right. \\ & \left. \left. - \frac{5(v_{[0,1]} - av_{[0,0]})v_{[0,1]}}{v_{[0,0]}^2} \right) \mathbf{v}_1, \end{aligned}$$

$$\eta = v_{[0,1]}v_{[0,2]} - v_{[0,0]}v_{[1,2]}, \quad \varphi = v_{[0,1]}v_{[1,2]} - v_{[1,1]}v_{[0,2]}, \quad \xi = v_{[0,0]}v_{[1,1]} - v_{[0,1]}^2,$$

полученное дифференциальной подстановкой

$$\mathbf{u} = (v_{[0,0]}v_{[1,1]} - v_{[0,1]}^2)^{-1/2} \left(\mathbf{v}_1 - \frac{v_{[0,1]}}{v_{[0,0]}} \mathbf{v} \right)$$

в (10), и второе

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t = & \mathbf{v}_3 - \frac{3}{2} \left(v_{[1,1]} - \frac{v_{[0,1]}^2}{q} \right)_x \mathbf{v} \\ & + \frac{3}{2} \left(v_{[2,2]} + v_{[1,1]} - \frac{v_{[0,1]}^2}{q} - \frac{2}{3}a - 1 \right. \\ & + \frac{(q^2(v_{[0,0]} + A)v_{[1,2]} - q(q + A)v_{[0,1]}v_{[0,2]} + Av_{[0,1]}^3 - qv_{[0,1]}(q + Av_{[1,1]}))^2}{q^3(v_{[0,0]} + A)((q + A)v_{[0,1]}^2 - q(v_{[0,0]} + A)(v_{[1,1]} - 1))} \\ & \left. - \frac{(q(q + A)v_{[0,2]} + Aqv_{[1,1]} - Av_{[0,1]}^2 + q^2)^2}{q^3(q + A)(v_{[0,0]} + A)} + A \frac{(v_{[0,1]}^2 + q(1 - v_{[1,1]}))^2}{q^2(q + A)} \right) \mathbf{v}_1, \\ & q = 1 + v_{[0,0]}, \quad A = -\frac{3}{2}a^{-1}, \end{aligned}$$

результат следующей подстановки в уравнение (3):

$$\mathbf{u} = i\mathbf{v}_x + h_0\mathbf{v}, \quad 1 - v_{[1,1]} + \frac{v_{[0,1]}^2}{1 + v_{[0,0]}} = h_0^2 - \frac{2}{3}a(1 + (i\mathbf{v}_1 + h_0\mathbf{v})^2).$$

Автор благодарит рецензента за комментарии и замечания, которые позволили улучшить качество статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. G. Meshkov, V. V. Sokolov, “Integrable evolution equations on the N -dimensional sphere”, *Comm. Math. Phys.*, **232**:1 (2002), 1–18.
- [2] А. Г. Мешков, В. В. Соколов, “Классификация интегрируемых дивергентных N -компонентных эволюционных систем”, *ТМФ*, **139**:2 (2004), 192–208.

- [3] A. G. Meshkov, M. Ju. Balakhnev, “Integrable anisotropic evolution equations on a sphere”, *SIGMA*, **1** (2005), 027, 11 pp.
- [4] М. Ю. Балахнёв, “Об одном классе интегрируемых эволюционных векторных уравнений”, *ТМФ*, **142**:1 (2005), 13–20.
- [5] М. Ju. Balakhnev, A. G. Meshkov, “On a classification of integrable vectorial evolutionary equations”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **15**:2 (2008), 212–226.
- [6] М. Ю. Балахнев, А. Г. Мешков, “Интегрируемые векторные эволюционные уравнения, имеющие сохраняющиеся плотности нулевого порядка”, *ТМФ*, **164**:2 (2010), 207–213.
- [7] М. Ю. Балахнев, “Дифференциальные подстановки первого порядка для уравнений интегрируемых в $\mathbb{S}^n$ ”, *Матем. заметки*, **89**:2 (2011), 178–189.
- [8] H. H. Chen, Y. C. Lee, C. S. Liu, “Integrability of nonlinear hamiltonian systems by inverse scattering method”, *Phys. Scr.*, **20**:3–4 (1979), 490–492.
- [9] Н. Х. Ибрагимов, А. Б. Шабат, “О бесконечных алгебрах Ли–Беклунда”, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:4 (1980), 79–80.
- [10] V. V. Sokolov, A. B. Shabat, “Classification of integrable evolution equations”, *Mathematical Physics Reviews*, Vol. 4, Soviet Sci. Rev. Sect. C Math. Phys. Rev., **4**, Harwood Academic Publ., Chur, 1984, 221–280.
- [11] А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, В. В. Соколов, “Симметричный подход к классификации интегрируемых уравнений”, *Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов*, Наукова думка, Киев, 1990, 213–279.
- [12] A. G. Meshkov, “Necessary conditions of the integrability”, *Inverse Problems*, **10**:3 (1994), 635–653.

М. Ю. Балахнёв

Государственный университет –

учебно-научно-производственный комплекс, г. Орел

E-mail: balakhnev@yandex.ru

Поступило

30.03.2012

Исправленный вариант

19.10.2012