Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Иванов, В. И. Иванов, Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 3, 338–348

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10304>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 12:00:06

Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом

А. В. Иванов, В. И. Иванов

Работа посвящена нахождению оптимальных аргументов в точном неравенстве Джексона в пространстве L_2 на евклидовом пространстве со степенным весом, являющимся произведением модулей координат в неотрицательных степенях. Оптимальные аргументы исследуются в зависимости от геометрии спектра приближающих целых функций и окрестности нуля в определении модуля непрерывности. Оптимальные аргументы найдены в случае, когда первое тело есть l_p^d -шар при $1 \leq p \leq 2$, а второе – параллелепипед.

Библиография: 13 названий.

DOI: 10.4213/mzm10304

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^d$ – d -мерное действительное евклидово пространство со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{j=1}^d x_j y_j$ и нормой $|x|_2 = \sqrt{(x, y)}$, $e_1, \dots, e_d$ – стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$,

$$v_k(x) = \prod_{\alpha \in R_+} |(\alpha, x)|^{2k(\alpha)} \quad (1)$$

– обобщенный степенной вес, определяемый положительной подсистемой R_+ системы корней $R \subset \mathbb{R}^d$ и функцией $k(\alpha): R \rightarrow \mathbb{R}_+$, инвариантной относительно группы отражений $G(R)$, порожденной R (см. [1]),

$$c_k = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|_2^2/2} v_k(x) dx$$

– интеграл Макдональда–Мета–Сельберга, $d\mu_k(x) = c_k^{-1} v_k(x) dx$, $1 \leq p \leq 2$, $L_{p,k}(\mathbb{R}^d)$ – пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^d$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{p,k} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p d\mu_k(x) \right)^{1/p} < \infty,$$

$C_b(\mathbb{R}^d)$ – пространство непрерывных ограниченных функций.

Гармонический анализ в пространствах с обобщенным степенным весом был построен в работах Ч. Данкля, М. Рёслера, М. де Же, К. Тримеш и др. Необходимые

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 10-01-00564, 13-01-00045).

нам факты можно найти в [1]. Гармонический анализ осуществляется с помощью дифференциально-разностных операторов Данкля

$$D_j f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha)(\alpha, e_j) \frac{f(x) - f(\sigma_\alpha(x))}{(\alpha, x)}, \quad j = 1, \dots, d,$$

где σ_α – ортогональное отражение относительно гиперплоскости $(\alpha, x) = 0$.

Для $y \in \mathbb{R}^d$ система

$$D_j f(x) = y_j f(x), \quad f(0) = 1,$$

имеет единственное в $\mathbb{R}^d$ решение $E_k(x, y)$, называемое *ядром Данкля*, которое продолжается до аналитической в $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d$ функции. Для обобщенной экспоненты $e_k(x, y) = E_k(ix, y)$ выполнены свойства, аналогичные свойствам экспоненты $e^{i(x, y)}$.

Обобщенная экспонента позволяет определить преобразование Данкля:

$$\hat{f}^k(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \overline{e_k(x, y)} d\mu_k(y). \quad (2)$$

Обратное преобразование Данкля задается формулой

$$\check{f}^k(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e_k(x, y) d\mu_k(y) = \hat{f}^k(-x).$$

Для преобразования Данкля справедливы обычные L_1 - и L_2 -теории, равенство Парсеваля. Таким образом, преобразование Данкля является линейным ограниченным оператором из $L_{1,k}(\mathbb{R}^d)$ в $C_b(\mathbb{R}^d)$ и из $L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$ в $L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$, поэтому по интерполяционной теореме Рисса–Торина оно продолжается до ограниченного оператора из $L_{p,k}(\mathbb{R}^d)$ в $L_{p',k}(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < 2$, $1/p + 1/p' = 1$.

Пусть далее V, U – выпуклые центрально-симметричные компактные в $\mathbb{R}^d$ тела, инвариантные относительно группы отражений $G(R)$, $|x|_V, |x|_U$ – нормы в $\mathbb{R}^d$, определяемые их функционалами Минковского,

$$|x|_p = \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad |x|_\infty = \max_j |x_j|,$$

$$B_p^d = \{x \in \mathbb{R}^d : |x|_p \leq 1\}.$$

Пусть $E_{p,k}^d(\sigma V)$, $1 \leq p \leq 2$, $\sigma > 0$, – класс функций $f \in L_{p,k}(\mathbb{R}^d) \cap C_b(\mathbb{R}^d)$, для которых носитель (спектр) $\text{supp } \hat{f}^k \subset \sigma V$. Функция $f \in E_{p,k}^d(\sigma V)$ допускает продолжение в $\mathbb{C}^d$, задаваемое равенством

$$f(z) = \int_{\sigma V} \hat{f}^k(y) e_k(z, y) d\mu_k(y),$$

из которого вытекает, что $f(z)$ – целая функция и для нее выполняется экспоненциальная оценка

$$|f(z)| \leq c_f e^{\sigma |\text{Im } z|_{V^*}}, \quad c_f > 0, \quad \text{Im } z = (\text{Im } z_1, \dots, \text{Im } z_d),$$

где $V^* = \{x \in \mathbb{R}^d : \max_{y \in V} |(x, y)| \leq 1\}$ – поляр V . Обратное утверждение, называемое теоремой Пэли–Винера, доказано для случаев, когда V – евклидов шар, или $k(\alpha)$

принимает целые значения [2]. Оно также верно, когда V – параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям, а

$$v_k(x) = \prod_{j=1}^d |x_j|^{2\lambda_j+1}, \quad \lambda_j \geq -\frac{1}{2}.$$

Наилучшим приближением функции $f \in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$ классом $E_{2,k}^d(\sigma V)$ назовем величину

$$E(\sigma V, f)_{2,k} = \inf\{\|f - g\|_{2,k} : g \in E_{2,k}^d(\sigma V)\}.$$

По равенству Парсеваля

$$E^2(\sigma V, f)_{2,k} = \int_{|y|_V \geq \sigma} |\widehat{f}^k(y)|^2 d\mu_k(y).$$

Модуль непрерывности функции $f \in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$ определим равенством

$$\omega(\tau U, f)_{2,k} = \sup_{t \in \tau U} \left(2 \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \operatorname{Re} e_k(t, y)) |\widehat{f}(y)|^2 d\mu_k(y) \right)^{1/2}, \quad \tau > 0.$$

Если $k(\alpha) \equiv 0$, то он совпадает с классическим модулем непрерывности

$$\omega(\tau U, f)_2 = \sup\{\|f(x+t) - f(x)\|_2 : t \in \tau U\}.$$

Константу Джексона $D(\sigma V, \tau U)_{2,k}$ определим как точную константу в неравенстве Джексона

$$E(\sigma V, f)_{2,k} \leq D\omega(\tau U, f)_{2,k},$$

т.е. положим

$$D(\sigma V, \tau U)_{2,k} = \sup \left\{ \frac{E(\sigma V, f)_{2,k}}{\omega(\tau U, f)_{2,k}} : f \in L_{2,k}(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

Для любых $\sigma, \tau > 0$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq D(\sigma V, \tau U)_{2,k} < \infty,$$

причем нижняя оценка является точной [3]–[5].

Оптимальный аргумент в неравенстве Джексона или точка Черных определяется равенством

$$\tau_{d,k}(\sigma V, U) = \inf \left\{ \tau > 0 : D(\sigma V, \tau U)_{2,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Задача об оптимальном аргументе связана с задачей Логана для некоторого класса целых функций. Задача Логана для класса действительных функций $\mathfrak{M}$ состоит в вычислении величины

$$\Lambda(\mathfrak{M}, V) = \inf\{\lambda(f, V) : f \in \mathfrak{M}, f \not\equiv 0\},$$

где

$$\lambda(f, V) = \sup\{|x|_V : f(x) > 0\}$$

– радиус наименьшего шара по норме, определяемой телом V , вне которого функция неположительна.

Пусть $W_k^d(\sigma U)$ – класс действительных четных целых функций $f \in E_{1,k}^d(\sigma U)$, для которых $f(0) > 0$, $\widehat{f}^k(y) \geq 0$ на $\mathbb{R}^d$.

Приведем некоторые известные результаты.

ТЕОРЕМА А. *Справедливы равенства*

$$\tau_{d,k}(\sigma V, U) = \Lambda(W_k^d(\sigma U), V) = \frac{\tau_{s,k}(V, U)}{\sigma} = \frac{\Lambda(W_k^d(U), V)}{\sigma}.$$

Теорема А при $k(\alpha) \equiv 0$ была доказана Е. Е. Бердышевой [6], в общем случае – в [5]. Далее полагаем $\sigma = 1$.

Пусть $J_\lambda(x)$ – функция Бесселя первого рода порядка $\lambda \geq -1/2$,

$$j_\lambda(x) = 2^\lambda \Gamma(\lambda + 1) \frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda}$$

– нормированная функция Бесселя, q_λ – ее наименьший положительный нуль.

ТЕОРЕМА В. *Если*

$$\lambda_k = \frac{d}{2} - 1 + \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha),$$

то

$$\tau_{d,k}(B_2^d, B_2^d) = \Lambda(W_k^d(B_2^d), B_2^d) = 2q_{\lambda_k}.$$

Экстремальная функция в задаче Логана имеет вид

$$\frac{j_{\lambda_k}^2(|x|_2/2)}{1 - (|x|_2/(2q_{\lambda_k}))^2}.$$

При $d = 1$ степенной вес имеет вид $v_k(x) = |x|^{2\lambda+1}$, $\lambda \geq -1/2$. При $\lambda = -1/2$ оптимальный аргумент найден Черных (см. [6]), а задача Логана решена Логаном [7]. При $\lambda > -1/2$ теорема В доказана Д. В. Горбачевым [8]. При $d > 1$, $k(\alpha) \equiv 0$ теорема В также доказана Горбачевым, в общем случае – в [4], [5].

Евклидовы шары инвариантны относительно группы всех ортогональных преобразований, поэтому теорема В справедлива для любых весов (1). В других случаях оптимальный аргумент и решение задачи Логана будут зависеть от группы отражений $G(R)$ и связанного с ней веса (1).

Рассмотрим систему корней $R = \{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$. Для нее $R_+ = \{e_1, \dots, e_d\}$, $G(R)$ – группа диагональных матриц порядка d с элементами ± 1 на главной диагонали, изоморфная $\mathbb{Z}_2^d$. Для инвариантной функции $k(\pm e_j) = \lambda + 1/2$, $\lambda_j \geq -1/2$ и степенной вес имеет вид

$$v_k(x) = \prod_{j=1}^d |x_j|^{2\lambda_j+1}. \quad (3)$$

Система обобщенных экспонент имеет вид

$$e_k(x, y) = \prod_{j=1}^d e_{\lambda_j}(x_j y_j), \quad (4)$$

где

$$e_{\lambda_j}(x_j y_j) = j_{\lambda_j}(x_j y_j) - i j'_{\lambda_j}(x_j y_j). \quad (5)$$

Введем обозначение

$$j_{\lambda}(x, y) = \prod_{j=1}^d j_{\lambda_j}(x_j y_j), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d). \quad (6)$$

Инвариантные нормы в $\mathbb{R}^d$ зависят от модулей координат. В качестве тела U будем рассматривать параллелепипед $\Pi_a = \prod_{j=1}^d [-a_j, a_j]$, $a = (a_1, \dots, a_d)$, $a_j > 0$.

ТЕОРЕМА С. Если $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, $\lambda_j \geq -1/2$, $a = (a_1, \dots, a_d)$, $a_j > 0$, вес v_k определен в (3),

$$b_{\lambda, a} = \left(\frac{2q_{\lambda_1}}{a_1}, \dots, \frac{2q_{\lambda_d}}{a_d} \right), \quad (7)$$

то

$$\tau_{d,k}(B_2^d, \Pi_a) = \Lambda(W_k^d(\Pi_a), B_2^d) = |b_{\lambda, a}|_2.$$

Если $1 \leq p < 2$ и

$$\frac{q_{\lambda_1}}{a_1} = \dots = \frac{q_{\lambda_d}}{a_d}, \quad (8)$$

то

$$\tau_{d,k}(B_p^d, \Pi_a) = \Lambda(W_k^d(\Pi_a), B_p^d) = |b_{\lambda, a}|_p.$$

Экстремальная целая функция в задаче Логана имеет вид

$$F(x) = (|b_{\lambda, a}|_2^2 - |x|_2^2) \prod_{j=1}^d \frac{j_{\lambda_j}^2(a_j x_j / 2)}{(1 - (a_j x_j / (2q_{\lambda_j}))^2)^2}.$$

При $k(\alpha) \equiv 0$ и $\Pi_a = B_{\infty}^d$ теорема С была доказана Бердышевой [6], в общем случае – в [5]. Экстремальная целая функция из класса $W_k^d(\Pi_a)$ была построена с помощью метода Юдина [9]. Наша цель – избавиться в теореме С от ограничения (8). Для этого необходимо модифицировать метод Юдина построения экстремальной функции.

2. Основной результат. Вначале в задаче Логана получим общую оценку снизу. Пусть $\lambda \geq -1/2$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\dots < q_{\lambda, -2} < q_{\lambda, -1} < q_{\lambda, 0} < 0 < q_{\lambda, 1} < q_{\lambda, 2} < \dots, \quad q_{\lambda, 1-k} = -q_{\lambda, k}$$

– нули функции Бесселя $j_{\lambda}(x)$.

Если f – целая функция экспоненциального типа $a > 0$ и $f \in L_{1,k}(\mathbb{R})$, $v_k(x) = |x|^{2\lambda+1}$, то для нее справедлива квадратурная формула [10], [11]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) |x|^{2\lambda+1} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_{\lambda}(k, a) f\left(\frac{2q_{\lambda, k}}{a}\right),$$

причем ряд в правой части сходится абсолютно, а

$$r_{\lambda}(k, a) = \frac{2^{2\lambda+3} |q_{\lambda, k}|^{2\lambda}}{a^{2\lambda+2} (J'_{\lambda}(q_{\lambda, k}))^2} > 0.$$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, $\lambda_j \geq -1/2$, $a = (a_1, \dots, a_d)$, $a_j > 0$, $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$,

$$r_\lambda(k, a) = \prod_{j=1}^d r_{\lambda_j}(k_j, a_j), \quad b_a^k = (b_1^{k_1}, \dots, b_d^{k_d}) = \left(\frac{2q_{\lambda_1, k_1}}{a_1}, \dots, \frac{2q_{\lambda_d, k_d}}{a_d} \right),$$

$E^{d,a}$ – класс целых функций d переменных экспоненциального типа a_j по j -й переменной.

В [5] доказан многомерный вариант квадратурной формулы для целых функций экспоненциального типа.

ТЕОРЕМА D. Если вес v_k определен в (3), $f \in E^{d,a} \cap L_{1,k}(\mathbb{R}^d)$, то

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) v_k(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} r_\lambda(k, a) f(b_a^k),$$

причем ряд в правой части сходится абсолютно.

Если

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d) \in (0, 1]^d, \quad b_{a,\theta}^k = \left(\frac{2\theta_1 q_{\lambda_1, k_1}}{a_1}, \dots, \frac{2\theta_d q_{\lambda_d, k_d}}{a_d} \right),$$

$$f \in E^{d,a} \cap L_{1,k}(\mathbb{R}^d), \quad f_\theta(x) = f(\theta_1 x_1, \dots, \theta_d x_d),$$

то $f_\theta \in E^{d,a} \cap L_{1,k}(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_\theta(x) v_k(x) dx = \frac{1}{\prod_{j=1}^d \theta_j^{2(\lambda_j+1)}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) v_k(x) dx,$$

поэтому из теоремы D вытекает следствие

СЛЕДСТВИЕ. Если $f \in E^{d,a} \cap L_{1,k}(\mathbb{R}^d)$, $\theta \in (0, 1]^d$, то

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) v_k(x) dx = \prod_{j=1}^d \theta_j^{2(\lambda_j+1)} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} r_\lambda(k, a) f(b_{a,\theta}^k).$$

Пусть норма $|x|_V = (|x_1|, \dots, |x_d|)_V$ инвариантна относительно группы отражений $G(R)$ для системы корней $R = \{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$. Функция $(|x_1|, \dots, |x_d|)_V$ не убывает по каждой переменной $|x_1|, \dots, |x_d|$.

ЛЕММА. Если $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, $\lambda_j \geq -1/2$, $a = (a_1, \dots, a_d)$, $a_j > 0$, норма $|\cdot|_V$ – функция, четная по каждой координате, вес v_k определен в (3), вектор $b_{\lambda,a}$ – в (7), то

$$\Lambda(W_k^d(\Pi_a), V) \geq |b_{\lambda,a}|_V.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, что найдутся $\varepsilon > 0$ и функция $f \in W_k^d(\Pi_a)$, для которых

$$f(x) \leq 0, \quad |x|_V \geq (1 - \varepsilon) |b_{\lambda,a}|_V.$$

Так как $\hat{f}^k(0) \geq 0$ и для $\theta \in [1 - \varepsilon, 1]^d$, $k \in \mathbb{Z}^d$,

$$|b_{a,\theta}^k|_V \geq \left| \left(\frac{2\theta_1 q_{\lambda_1, 1}}{a_1}, \dots, \frac{2\theta_d q_{\lambda_d, 1}}{a_d} \right) \right|_V \geq (1 - \varepsilon) |b_{\lambda,a}|_V,$$

по следствию

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^d} f(x) v_k(x) dx = \prod_{j=1}^d \theta_j^{2(\lambda_j+1)} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} r_\lambda(k, a) f(b_{a, \theta}^k) \leq 0.$$

Отсюда $f(\theta_1 2q_{\lambda_1, 1}/a_1, \dots, \theta_d 2q_{\lambda_d, 1}/a_d) = 0$ для $1 - \varepsilon \leq \theta_1 \leq 1, \dots, 1 - \varepsilon \leq \theta_d \leq 1$. Из аналитичности f по каждой переменной вытекает, что $f \equiv 0$, а это противоречит условию $f(0) > 0$. Лемма доказана.

Лемма при $\lambda = (-1/2, \dots, -1/2)$ была доказана Бердышевой [6].

ТЕОРЕМА. Если $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, $\lambda_j \geq -1/2$, $a = (a_1, \dots, a_d)$, $a_j > 0$, $1 \leq p \leq 2$, вес v_k определен в (3), вектор $b_{\lambda, a}$ – в (7), то

$$\tau_{d, k}(B_p^d, \Pi_a) = \Lambda(W_k^d(\Pi_a), B_p^d) = |b_{\lambda, a}|_p.$$

Экстремальная целая функция в задаче Логана имеет вид

$$F_p(x) = \left(|b_{\lambda, a}|_p^p - \sum_{j=1}^d \left(\frac{a_j}{2q_j} \right)^{2-p} x_j^2 \right) \prod_{j=1}^d \frac{j_{\lambda_j}^2(a_j x_j / 2)}{(1 - (a_j x_j / (2q_j))^2)^2}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda \geq -1/2$, $a > 0$, $v_\lambda(x) = |x|^{2\lambda+1}$,

$$d\mu_\lambda(x) = \frac{v_\lambda(x) dx}{2^{\lambda+1} \Gamma(\lambda+1)},$$

$f(x)$ – четная на $\mathbb{R}$ функция,

$$\hat{f}^\lambda(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) j_\lambda(xy) d\mu_\lambda(x)$$

– ее преобразование Данкля (Ганкеля), $c_\lambda = \Gamma(\lambda+1)/(\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda+1/2))$,

$$T^t f(x) = c_\lambda \int_0^\pi f(\sqrt{x^2 + t^2 - 2xt \cos \varphi}) \sin^{2\lambda} \varphi d\varphi, \quad t \in \mathbb{R}$$

– оператор обобщенного сдвига.

Отметим следующие свойства оператора обобщенного сдвига [12], [13]:

$$\bullet \text{ если } f(x) \geq 0, \text{ то } T^t f(x) \geq 0; \quad (10)$$

$$\bullet \text{ функция } T^t f(x) \text{ – четная по } x \text{ и } t; \quad (11)$$

$$\bullet \widehat{(T^t f)}^\lambda(y) = j_\lambda(ty) \hat{f}^\lambda(y); \quad (12)$$

$$\bullet \text{ если } \operatorname{supp} f \subset [-\delta, \delta], \text{ то } \operatorname{supp} T^t f \subset [-|t| - \delta, |t| + \delta]. \quad (13)$$

Рассмотрим функцию

$$u_\lambda(x) = \begin{cases} j_\lambda\left(\frac{2q_\lambda}{a} x\right), & |x| \leq \frac{a}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{a}{2}. \end{cases} \quad (14)$$

Пользуясь формулой [10]

$$\int_0^a x J_\lambda(\mu x) J_\lambda(\nu x) dx = \frac{a}{\mu^2 - \nu^2} \{ \mu J_{\lambda+1}(\mu a) J_\lambda(\nu a) - \nu J_\lambda(\mu a) J_{\lambda+1}(\nu a) \},$$

находим

$$\widehat{u}_\lambda^\lambda(x) = -\frac{q_\lambda a^{2\lambda} j'_\lambda(q_\lambda)}{2^{3\lambda} \Gamma(\lambda+1)} \cdot \frac{j_\lambda((a/2)x)}{(2q_\lambda/a)^2 - x^2}. \quad (15)$$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, $\lambda_j \geq -1/2$, $a = (a_1, \dots, a_d)$, $a_j > 0$, $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$u_\lambda(x) = \prod_{j=1}^d u_{\lambda_j}(x_j), \quad T^t u_\lambda(x) = \prod_{j=1}^d T^{t_j} u_{\lambda_j}(x_j).$$

Согласно (2), (4)–(6), (10), (12), (14)

$$\widehat{u}_\lambda^k(x) = \prod_{j=1}^d \widehat{u}_{\lambda_j}^{\lambda_j}(x_j), \quad (\widehat{T^t u_\lambda})^k(x) = j_\lambda(t, x) \widehat{u}_\lambda^k(x), \quad T^t u_\lambda(x) \geq 0. \quad (16)$$

Если $|t_j| \leq \delta_j$, $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_d)$, $\delta_j > 0$, то из (13)

$$\text{supp } T^t u_\lambda(x) \subset \Pi_{a/2+\delta}. \quad (17)$$

По методу Юдина искомая экстремальная функция в [5] получалась как преобразование Данкля функции

$$G(x) = - \int_{\partial \Pi_{a/2}} T^t u_\lambda(x) \frac{\partial u_\lambda(t)}{\partial n} v_k(t) d\sigma_\lambda(t), \quad (18)$$

где $\partial u_\lambda(t)/\partial n$ – производная по направлению внешней нормали к границе $\partial \Pi_{a/2}$ параллелепипеда $\Pi_{a/2}$, $v_k(t)$ – вес (3), $d\sigma(t)$ – элемент площади поверхности на $\partial \Pi_{a/2}$,

$$d\sigma_\lambda(t) = \frac{d\sigma(t)}{\prod_{j=1}^d 2^{\lambda_j+1} \Gamma(\lambda_j+1)}.$$

Мы введем под интеграл (18) специально выбранную кусочно-постоянную положительную функцию.

Для $t \in \partial \Pi_{a/2}$ положим

$$h(t) = \mu_j > 0, \quad t_j = \pm \frac{a_j}{2}, \quad j = 1, \dots, d, \quad (19)$$

и рассмотрим функцию

$$g(x) = - \int_{\partial \Pi_{a/2}} T^t u_\lambda(x) \frac{\partial u_\lambda(t)}{\partial n} h(t) v_k(t) d\sigma_\lambda(t). \quad (20)$$

Функция $g(x)$ в силу (11) четная по каждой переменной. Так как из (14)

$$\left. \frac{\partial u_\lambda(t)}{\partial n} \right|_{t_j = \pm a_j/2} = \frac{2q_{\lambda_j}}{a_j} j'_{\lambda_j}(q_{\lambda_j}) \prod_{i \neq j} u_{\lambda_i}(t_i) \leq 0, \quad (21)$$

согласно (16), (19) $g(x) \geq 0$. В силу (17) $\text{supp } g \subset \Pi_a$. Далее из (16)

$$\begin{aligned}\widehat{g}^k(y) &= - \int_{\partial \Pi_{a/2}} \frac{\partial u_\lambda(t)}{\partial n} h(t) v_k(t) (\widehat{T^t u_\lambda})^k(y) d\sigma_\lambda(t) \\ &= - \int_{\partial \Pi_{a/2}} \frac{\partial u_\lambda(t)}{\partial n} h(t) j_\lambda(t, y) v_k(t) d\sigma_\lambda(t) \widehat{u}^k(y).\end{aligned}\quad (22)$$

Если $\Pi_{a/2}^j = \prod_{i \neq j} [-a_i/2, a_i/2]$, то из (19), (22)

$$\begin{aligned}g_1(y) &= \int_{\partial \Pi_{a/2}} \frac{\partial u_\lambda(t)}{\partial n} h(t) j_\lambda(t, y) v_k(t) d\sigma_\lambda(t) \\ &= -4 \sum_{j=1}^d \frac{q_{\lambda_j}}{a_j} j'_{\lambda_j}(q_{\lambda_j}) \mu_j j_{\lambda_j} \left(\frac{a_j}{2} y_j \right) \frac{1}{2^{\lambda_j+1} \Gamma(\lambda_j + 1)} \left(\frac{a_j}{2} \right)^{2\lambda_j+1} \\ &\quad \times \int_{\Pi_{a/2}^j} \prod_{i \neq j} u_{\lambda_i}(t_i) j_{\lambda_j}(t_i y_i) \prod_{i \neq j} d\mu_{\lambda_i}(t_i) \\ &= -4 \sum_{j=1}^d \frac{q_{\lambda_j}}{a_j} j'_{\lambda_j}(q_{\lambda_j}) \mu_j j_{\lambda_j} \left(\frac{a_j}{2} y_j \right) \frac{1}{2^{\lambda_j+1} \Gamma(\lambda_j + 1)} \left(\frac{a_j}{2} \right)^{2\lambda_j+1} \\ &\quad \times \prod_{i \neq j} \widehat{u}_{\lambda_i}^{\lambda_i}(y_i) = -4 \widehat{u}_\lambda^k(y) \sum_{j=1}^d \frac{q_{\lambda_j}}{a_j} j'_{\lambda_j}(q_{\lambda_j}) \mu_j \\ &\quad \times j_{\lambda_j} \left(\frac{a_j}{2} y_j \right) \frac{1}{2^{\lambda_j+1} \Gamma(\lambda_j + 1)} \left(\frac{a_j}{2} \right)^{2\lambda_j+1} \frac{1}{\widehat{u}_{\lambda_j}^{\lambda_j}(y_j)}.\end{aligned}$$

Подставляя в последнюю сумму выражения для $\widehat{u}_{\lambda_j}^{\lambda_j}(y_j)$ (14), получим

$$g_1(y) = \widehat{u}_\lambda^k(y) \sum_{j=1}^d \mu_j \left(\left(\frac{2q_{\lambda_j}}{a_j} \right)^2 - y_j^2 \right).$$

Отсюда и из (22)

$$\widehat{g}^k(y) = \sum_{j=1}^d \mu_j \left(\left(\frac{2q_{\lambda_j}}{a_j} \right)^2 - y_j^2 \right) (\widehat{u}_\lambda^k(y))^2. \quad (23)$$

Пусть $1 \leq p \leq 2$, $b_{\lambda,a} = (b_1, \dots, b_d)$,

$$b_j = \frac{2q_{\lambda_j}}{a_j}, \quad \mu_j = \left(\frac{|b_{\lambda,a}|_p}{b_j} \right)^{2-p}.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^d \mu_j b_j^2 = |b_{\lambda,a}|_p^{2-p} \sum_{j=1}^d b_j^p = |b_{\lambda,a}|_p^2.$$

Если

$$\sum_{j=1}^d \mu_j (b_j^2 - y_j^2) \geq 0,$$

то

$$\sum_{j=1}^d \mu_j y_j^2 \leq |b_{\lambda,a}|_p^2$$

и в силу неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned} |y|_p &= \sum_{j=1}^d \mu_j^{p/2} |y_j|^p \mu_j^{-p/2} \leq \left(\sum_{j=1}^d \mu_j y_j^2 \right)^{p/2} \left(\sum_{j=1}^d \mu_j^{-p/(2-p)} \right)^{1-p/2} \\ &\leq |b_{\lambda,a}|_p^p \left(|b_{\lambda,a}|_p^{-p} \sum_{j=1}^d b_j^p \right)^{1-p/2} = |b_{\lambda,a}|_p^p. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно (23) при $1 \leq p \leq 2$

$$\lambda(\widehat{g}^k, B_p^d) \leq |b_{\lambda,a}|_p.$$

С точностью до нормировки функция F_p (9) совпадает с функцией $\widehat{g}^k$. Значит, для нее $\text{supp } \widehat{F}_p^k \subset \Pi_a$, $\widehat{F}_p^k(y) \geq 0$ ($y \in \mathbb{R}^d$). Так как [12]

$$\left| \frac{j\lambda_j(a_j x_j/2)}{1 - (a_j x_j/(2q_j))^2} \right| \leq \frac{c(\lambda_j, a_j)}{(1 + |x_j|)^{\lambda_j+5/2}},$$

то

$$|F_p(x)| v_k(x) \leq \frac{c(\lambda, a)(1 + |x|_2^2)}{\prod_{j=1}^d (1 + |x_j|)^4} \leq \frac{c_1(\lambda, a)}{\prod_{j=1}^d (1 + |x_j|)^2}$$

и $F_p \in L_{1,k}(\mathbb{R}^d)$. Итак, $F_p \in W_k^d(\Pi_a)$ и для нее $\lambda(F_p, B_p^d) \leq |b_{\lambda,a}|_p$, поэтому

$$\Lambda(W_k^d(\Pi_a), B_p^d) \leq |b_{\lambda,a}|_p.$$

Отсюда и из леммы вытекает справедливость теоремы.

Отметим, что при $1 \leq p < 2$ экстремальная целая функция (9) является новой и в безвесовом случае. При $p > 2$ оптимизация по функциям (19) ничего не дает. Мы полагаем, что при $p > 2$ справедливо равенство

$$\tau_{d,k}(B_p^d, \Pi_a) = \Lambda(W_k^d(\Pi_a), B_p^d) = |b_{\lambda,a}|_2.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Rösler, “Dunkl operators: theory and applications”, *Orthogonal Polynomials and Special Functions*, Lecture Notes in Math., **1817**, Springer-Verlag, Berlin, 2003, 93–135.
- [2] M. de Jeu, “Paley–Wiener theorems for the Dunkl transform”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **358**:10 (2006), 4225–4250.
- [3] А. В. Иванов, В. И. Иванов, “Теория Данкля и теорема Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом”, Тр. ИММ УрО РАН, **16**, 2010, 180–192.
- [4] А. В. Иванов, “Некоторые экстремальные задачи для целых функций в весовых пространствах”, *Изв. ТулГУ. Естественные науки*, 2010, № 1, 26–44.
- [5] А. В. Иванов, “Задача Логана для целых функций многих переменных и константы Джексона в весовых пространствах”, *Изв. ТулГУ. Естественные науки*, 2011, № 2, 29–58.

- [6] Е. Е. Бердышева, “Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных”, *Матем. заметки*, **66**:3 (1999), 336–350.
- [7] B. F. Logan, “Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. I. Eventually positive functions with zero integral”, *SIAM J. Math. Anal.*, **14**:2 (1983), 249–252.
- [8] Д. В. Горбачев, “Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа”, *Матем. заметки*, **68**:2 (2000), 179–187.
- [9] В. А. Юдин, “Многомерная теорема Джексона в L_2 ”, *Матем. заметки*, **29**:2 (1981), 309–315.
- [10] C. Frappier, P. Olivier, “A quadrature formula involving zeros of Bessel functions”, *Math. Comp.*, **60**:201 (1993), 303–316.
- [11] G. R. Grozev, Q. I. Rahman, “A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes”, *Math. Comp.*, **64**:210 (1995), 715–725.
- [12] Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, Ч. 1, ИЛ, М., 1949.
- [13] Б. М. Левитан, “Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье”, *УМН*, **6**:2(42) (1951), 102–143.

А. В. Иванов

Тульский государственный университет

E-mail: d_bringer@mail.ru

Поступило

10.02.2013

В. И. Иванов

Тульский государственный университет

E-mail: ivaleryi@mail.ru