Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Керимов, С. С. Мирзоев, Об одной задаче для операторно-дифференциального уравнения второго порядка с нелокальным краевым условием, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 3, 349–353

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10305>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 05:43:55

Об одной задаче для операторно-дифференциального уравнения второго порядка с нелокальным краевым условием

К. А. Керимов, С. С. Мирзоев

В данной заметке рассматривается на полуоси операторно-дифференциальное уравнение второго порядка с нелокальным краевым условием в нуле. Здесь указаны достаточные условия на операторные коэффициенты краевой задачи, при которых она регулярно разрешима. Более того, найдены условия полноты и минимальности производной цепочки собственных и присоединенных векторов, порожденной исследуемой краевой задачей, а также установлена полнота и минимальность убывающих элементарных решений рассматриваемого операторно-дифференциального уравнения.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm10305

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряженный равномерно положительный оператор в H . Обозначим через H_γ шкалу гильбертовых пространств, порожденную оператором A , т.е. $H_\gamma = D(A^\gamma)$, $(x, y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)$, $x, y \in H_\gamma$, $\gamma \geq 0$. При $\gamma = 0$ считаем, что $H_0 = H$.

Обозначим через $L_2(\mathbb{R}_+; H)$ гильбертово пространство функций $f(t)$, определенных почти всюду в $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, со значениями в H , измеримых, квадратично интегрируемых в смысле Бохнера, с нормой

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} = \left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Следуя монографии [1], определим пространство функций (производные понимаются в смысле теории распределений)

$$W_2^m(\mathbb{R}_+; H) = \{u : u^{(m)} \in L_2(\mathbb{R}_+; H), A^m u \in L_2(\mathbb{R}_+; H)\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^m(\mathbb{R}_+; H)} = (\|u^{(m)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \|A^m u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2)^{1/2}, \quad m \geq 1.$$

В дальнейшем $L(X, Y)$ означает пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y , $\sigma_\infty(H)$ – идеал вполне непрерывных операторов в $L(H, H)$, а $\sigma_p(H)$ – идеал Неймана–Шаттена (см. [2; гл. 3]).

Пусть $K_0(s)$ и $K_1(s)$ при $s \in \mathbb{R}_+$ есть линейные операторы, действующие в H , такие, что операторы

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_0 u &= \int_0^{+\infty} K_0(s) u(s) ds, & u &\in W_2^2(\mathbb{R}_+; H), \\ \mathcal{K}_1 v &= \int_0^{+\infty} K_1(s) v(s) ds, & v &\in W_2^1(\mathbb{R}_+; H),\end{aligned}$$

ограничены из пространства $W_2^2(\mathbb{R}_+; H)$ в $H_{3/2}$ и из пространства $W_2^1(\mathbb{R}_+; H)$ в $H_{3/2}$, соответственно. С использованием теоремы о следах нетрудно получить, что указанные условия на операторы $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ выполнены, например, в случае $K_0(s) = \alpha_0(s)E$, $K_1(s) = \alpha_1(s)E$, где E – тождественный оператор, а α_0 , α_1 и α'_1 – суммируемые скалярные функции.

Определим следующее подпространство в $W_2^2(\mathbb{R}_+; H)$:

$$W_{2,\mathcal{K}}^2(\mathbb{R}_+; H) = \{u : u \in W_2^2(\mathbb{R}_+; H), \mathcal{K}u(t) := u(0) - \mathcal{K}_0 u(t) - \mathcal{K}_1 u'(t) = 0\}.$$

Из теоремы о следах и теоремы о промежуточных производных [1; гл. 1] следует корректность этого определения.

Рассмотрим в H краевую задачу

$$-u''(t) + A^2 u(t) + A_1 u'(t) + A_2 u(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

$$\mathcal{K}u = u(0) - \mathcal{K}_0 u(t) - \mathcal{K}_1 u'(t) = \varphi, \quad (2)$$

где $\varphi \in H_{3/2}$, $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$, а операторные коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

- 1) A – самосопряженный равномерно положительный оператор;
- 2) операторы A_j линейны, причем $B_j = A_j A^{-j} \in L(H, H)$, $j = 1, 2$;
- 3) $\mathcal{K}_0 \in L(W_2^2(\mathbb{R}_+; H), H_{3/2})$, $\mathcal{K}_1 \in L(W_2^1(\mathbb{R}_+; H), H_{3/2})$, т.е. определены числа

$$\chi_0 = \|\mathcal{K}_0\|_{W_2^2(\mathbb{R}_+; H) \rightarrow H_{3/2}}, \quad \chi_1 = \|\mathcal{K}_1\|_{W_2^1(\mathbb{R}_+; H) \rightarrow H_{3/2}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что задача (1), (2) *регулярно разрешима*, если при любых $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$ и $\varphi \in H_{3/2}$ существует функция $u(t)$, удовлетворяющая уравнению (1) почти при всех $t \in \mathbb{R}_+$, краевому условию (2) в смысле сходимости

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|u(t) - \mathcal{K}_0 u(t) - \mathcal{K}_1 u'(t) - \varphi\|_{3/2} = 0$$

и подчиненная оценке

$$\|u\|_{W_2^2(\mathbb{R}_+; H)} \leq \text{const}(\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} + \|\varphi\|_{3/2}).$$

В этой заметке мы укажем достаточные условия на операторные коэффициенты, при которых задача (1), (2) регулярно разрешима. Отметим, что при $K_0(s) = K_1(s) \equiv 0$ эта задача рассмотрена многими авторами (см., например, [3]–[8]). В работе [9] подобная задача изучена для уравнения (1) с краевым условием $u(0) = Tu'(0)$, $T \in L(H_{1/2}, H_{3/2})$ или $u'(0) = Tu(0)$, $T \in L(H_{3/2}, H_{1/2})$. А в работе [10] такая задача исследована для уравнения (1) с разрывным коэффициентом при выполнении краевого условия $u'(0) = Tu(0)$, $T \in L(H_{3/2}, H_{1/2})$. Наряду с этими работами укажем и работу [11], в которой рассмотрена такого рода задача на конечном отрезке.

Справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия 1) и 3), причем $\chi := \chi_0 + \chi_1 < 1$. Тогда задача

$$-u''(t) + A^2u(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (3)$$

$$\mathcal{K}u = \varphi \quad (4)$$

регулярно разрешима.

Обозначим через P_0 оператор, действующий из пространства $W_{2,\mathcal{K}}^2(\mathbb{R}_+; H)$ в пространство $L_2(\mathbb{R}_+; H)$ и порожденный левой частью уравнения (3).

Имеет место

ЛЕММА. Пусть выполняются условия 1) и 3), причем $\chi = \chi_0 + \chi_1 < 1/2$. Тогда при любом $u(t) \in W_{2,\mathcal{K}}^2(\mathbb{R}_+; H)$ справедливы следующие неравенства:

$$\|Au'\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1+2\chi}{1-2\chi} \right)^{1/2} \|P_0u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)},$$

$$\|A^2u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \leq \left(\frac{1}{1-2\chi} \right)^{1/2} \|P_0u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}.$$

С помощью теоремы 1 и леммы доказывается следующая теорема о регулярной разрешимости задачи (1), (2).

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются условия 1)–3), причем $\chi = \chi_0 + \chi_1 < 1/2$ и имеет место неравенство

$$\alpha(\chi) = \frac{1}{2} \left(\frac{1+2\chi}{1-2\chi} \right)^{1/2} \|B_1\| + \left(\frac{1}{1-2\chi} \right)^{1/2} \|B_2\| < 1. \quad (5)$$

Тогда задача (1), (2) регулярно разрешима.

При $\chi = 0$ ($K_0(s) = K_1(s) = 0$) из теоремы 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполняются условия 1), 2) и число

$$\alpha(0) = \frac{1}{2} \|B_1\| + \|B_2\| < 1.$$

Тогда задача

$$\begin{aligned} -u''(t) + A^2u(t) + A_1u'(t) + A_2u(t) &= f(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(0) &= \varphi \end{aligned}$$

регулярно разрешима.

Этот результат ранее получен в работах [3], [4].

Однородному уравнению

$$-u''(t) + A^2u(t) + A_1u'(t) + A_2u(t) = 0 \quad (6)$$

поставим в соответствие пучок операторов

$$P(\lambda) = -\lambda^2 E + A^2 + \lambda A_1 + A_2.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Ненулевой вектор $\varphi_{n,0} \in H_2$ называется *собственным вектором пучка* $P(\lambda)$, отвечающим *собственному значению* λ_n , если выполнено равенство $P(\lambda_n)\varphi_{n,0} = 0$. Набор векторов $\varphi_{n,0}, \varphi_{n,1}, \dots, \varphi_{n,m_n}$ из пространства H_2 образуют цепочку собственного и присоединенных векторов, если выполнены равенства

$$\sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} P^{(k)}(\lambda_n) \varphi_{n,h-k} = 0, \quad h = 0, 1, \dots, m_n.$$

Конечно, собственному значению λ_n могут отвечать несколько цепочек собственных и присоединенных векторов. Их выбор неоднозначен, но мы предполагаем, что выбираются так называемые канонические системы (см. [12]). Из определения следует, что при $\operatorname{Re} \lambda_n < 0$ вектор-функции

$$u_{n,h}(t) = \left(\varphi_{n,h} + \frac{t}{1!} \varphi_{n,h-1} + \dots + \frac{t^h}{h!} \varphi_{n,0} \right) e^{\lambda_n t}, \quad h = 0, 1, \dots, m_n,$$

удовлетворяют однородному уравнению (6) и принадлежат $L_2(\mathbb{R}_+; H)$. Эти функции называются его *элементарными решениями*.

Краевое условие (2) порождает производные векторы собственных и присоединенных векторов пучка $P(\lambda)$ следующего вида:

$$\psi_{n,h} = \mathcal{K} u_{n,h} = \varphi_{n,h} - \mathcal{K}_0 u_{n,h}(t) - \mathcal{K}_1 u'_{n,h}(t).$$

Очевидно, полнота системы векторов такого вида в пространстве $H_{3/2}$ влечет возможность приближенного решения однородной задачи (1) с правой частью $f = 0$, и краевым условием (2) с помощью системы элементарных решений (т.е. построения решения $u_\varepsilon(t)$, являющегося конечной линейной комбинацией элементарных решений, такого, что $\|\mathcal{K} u_\varepsilon(t) - \varphi\|_{3/2} < \varepsilon$ для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$).

Отметим, что если $A^{-1} \in \sigma_\infty(H)$ и выполняется неравенство (5), то операторный пучок $P(\lambda)$ имеет только дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности. Если же $A^{-1} \in \sigma_p(H)$, то $A^2 P^{-1}(\lambda)$ представляется в виде отношения двух целых функций порядка не выше p и минимального типа при порядке p [12]. Принимая во внимание этот факт и пользуясь методикой работ [3], [6], [9], доказывается полнота системы $\{\varphi_{n,h}\}_{n=1}^\infty$ в пространстве $H_{3/2}$. Далее можно построить оператор S , действующий в пространстве $H_{3/2}$, который имеет ограниченный обратный и $S\varphi_{n,h} = \psi_{n,h}$. Аналогично получается

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия теоремы 2 и имеет место одно из следующих условий:

а) $A^{-1} \in \sigma_p(H)$, $0 < p \leq 1$;

б) $A^{-1} \in \sigma_p(H)$, $0 < p < \infty$, $B_j \in \sigma_\infty(H)$, $j = 1, 2$.

Тогда система $\{\psi_{n,h}\}_{n=1}^\infty$ полна в пространстве $H_{3/2}$.

Используя теоремы 2 и 3, доказывается

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда система убывающих элементарных решений полна в пространстве всех регулярных решений уравнения (6).

В условиях теоремы 2 при $A^{-1} \in \sigma_{\infty}(H)$ можно утверждать также минимальность системы $\{\psi_{n,h}\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $H_{3/2}$. Система убывающих элементарных решений уравнения (6) также минимальна в $W_2^2(\mathbb{R}_+; H)$. Это получается так же, как в работе [6].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Т. 1, Мир, М., 1971.
- [2] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.
- [3] М. Г. Гасымов, “К теории полиномиальных операторных пучков”, *Докл. АН СССР*, **199**:4 (1971), 747–750.
- [4] С. С. Мирзоев, “Условия корректной разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений”, *Докл. АН СССР*, **273**:2 (1983), 292–295.
- [5] А. А. Шкалик, “Некоторые вопросы теории полиномиальных операторных пучков”, *УМН*, **38**:3(231) (1983), 189–190.
- [6] А. А. Шкаликов, “Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **14**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1989, 140–224.
- [7] А. Р. Алиев, “Краевые задачи для одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами”, *Матем. заметки*, **74**:6 (2003), 803–814.
- [8] А. Р. Алиев, С. С. Мирзоев, “К теории разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка”, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:3 (2010), 63–65.
- [9] М. Г. Гасымов, С. С. Мирзоев, “О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка”, *Дифференц. уравнения*, **28**:4 (1992), 651–661.
- [10] С. С. Мирзоев, А. Р. Алиев, Л. А. Рустамова, “Об условиях разрешимости краевой задачи для эллиптического операторно-дифференциального уравнения с разрывным коэффициентом”, *Матем. заметки*, **92**:5 (2012), 789–793.
- [11] С. С. Мирзоев, М. Ю. Салимов, “О разрешимости краевой задачи для уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве с операторным коэффициентом в краевом условии”, *Матем. заметки*, **91**:6 (2012), 861–869.
- [12] М. В. Келдыш, “О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов”, *УМН*, **26**:4(160) (1971), 15–41.

К. А. Керимов

Институт математики и механики
НАН Азербайджана, г. Баку
E-mail: kamil_kerimov1971@mail.ru

Поступило
24.04.2013

С. С. Мирзоев

Бакинский государственный университет,
Институт математики и механики
НАН Азербайджана, г. Баку
E-mail: mirzoyevsabir@mail.ru