Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Селицкий, Пространство начальных данных 2-й краевой задачи для параболического дифференциально-разностного уравнения в липшицевых областях, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 3, 477–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10307>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 13:55:11

Пространство начальных данных 2-й краевой задачи для параболического дифференциально-разностного уравнения в липшицевых областях

А. М. Селицкий

1. Постановка задачи. Пусть Q – ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$. Введем ограниченные разностные операторы $R_{ij}, R_k: L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ по формулам

$$\begin{aligned}(R_{ij}u)(x) &= \sum_{h \in M} a_{ij,h} u(x+h), & i, j = 1, \dots, n, \\ (R_k u)(x) &= \sum_{h \in M} a_{k,h} u(x+h), & k = 0, 1, \dots, n,\end{aligned}$$

$a_{ij,h}, a_{k,h}$ – комплексные числа, множество M состоит из конечного набора векторов $h \in \mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами.

Введем линейные ограниченные операторы: $I_Q: L_2(Q) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ – оператор продолжения функции нулем вне Q ; $P_Q: L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(Q)$ – оператор сужения функции на Q , и операторы $R_{ij,Q}, R_{k,Q}: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, определенные равенствами $R_{ij,Q} = P_Q R_{ij} I_Q$, $R_{k,Q} = P_Q R_k I_Q$.

Будем рассматривать следующую задачу:

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n (R_{ij,Q} u_{x_j})_{x_i} + \sum_{k=1}^n R_{k,Q} u_{x_k} + R_{0,Q} u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$\sum_{ij=1}^n R_{ij,Q} u_{x_j} \cos(\nu, x_i) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_T, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in Q, \quad (3)$$

где $f \in L_2(Q_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$, ν – внешняя единичная нормаль (определенная почти всюду на ∂Q), $Q_T = Q \times (0, T)$, $\Gamma_T = \partial Q \times (0, T)$.

Заметим, что вторая краевая задача для параболических дифференциально-разностных уравнений возникает в теории нелинейных оптических систем с двумерной обратной связью (см. [1] и приведенные там ссылки).

Чтобы сформулировать определение сильного решения задачи (1)–(3), рассмотрим полуторалинейную форму, определенную на пространстве Соболева $H^1(Q)$; через $(\cdot, \cdot)_0, (\cdot, \cdot)_1$ будем обозначать скалярные произведения в $L_2(Q)$ и $H^1(Q)$, соответственно:

$$a[v, w] = \sum_{i,j=1}^n (R_{ij,Q} v_{x_j}, w_{x_i})_0 + \sum_{k=1}^n (R_{k,Q} v_{x_k}, w)_0 + (R_{0,Q} v, w)_0. \quad (4)$$

Так как разностные операторы $R_{ij,Q}, R_{k,Q}$ ограничены в $L_2(Q)$, существует $c_0 > 0$ такое, что

$$|a[v, w]| \leq c_0 \|v\|_1 \|w\|_1, \quad v, w \in H^1(Q).$$

Тогда существует линейный ограниченный оператор $A: H^1(Q) \rightarrow \tilde{H}^{-1}(Q)$ (где $\tilde{H}^{-1}(Q)$ – сопряженное пространство к $H^1(Q)$ относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_0$), действующий по формуле

$$\langle Av, \bar{w} \rangle = a[v, w], \quad v, w \in H^1(Q). \quad (5)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №№ 12-01-00524а, 13-01-00923).

DOI: 10.4213/mzm10307

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор A будем называть *сильно эллиптическим*, если существуют числа $c_1 > 0$ и $c_2 \geq 0$ такие, что

$$\operatorname{Re} a[v, v] \geq c_1 \|v\|_1^2 - c_2 \|v\|_0^2, \quad v \in H^1(Q). \quad (6)$$

Достаточные условия сильной эллиптичности оператора A см., например, в лемме 2.2 в [2] (где второе слагаемое в (2.11) нужно читать $k_2 \|v\|_{L_2(Q)}^2$).

В дальнейшем будем предполагать, что оператор A сильно эллиптический. Заметим также, что вместо оператора A можно рассматривать оператор $A + c_2 I$, что соответствует замене функции u в задаче (1)–(3) на $\tilde{u} = e^{c_2 t} u$, а тогда в неравенстве (6) можно считать $c_2 = 0$.

В силу теоремы 2.1, гл. VI в [3], существует неограниченный оператор $\mathcal{A}: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ с областью определения $D(\mathcal{A}) \subset H^1(Q)$, действующий по формуле

$$(\mathcal{A}v, w)_0 = a[v, w], \quad v \in D(\mathcal{A}), \quad w \in H^1(Q), \quad (7)$$

плотно и непрерывно.

Оператор $\mathcal{A}$ является сужением оператора A на $D(\mathcal{A})$. Несложно проверить, что при предположении, что выполняется неравенство (6) с $c_2 = 0$, оператор $(-\mathcal{A})$ (а следовательно, и оператор $\mathcal{A}$) является замкнутым (см., например, теорему 4.5 гл. 1 в [4]), а тогда пространство $D(\mathcal{A})$ является гильбертовым с нормой графика. Введем гильбертово пространство $W(\mathcal{A}) = \{w \in L_2([0, T]; D(\mathcal{A})) : w_t \in L_2(Q_T)\}$.

Из теоремы 3.2 в [2] следует, что задача (1)–(3) эквивалентна абстрактному операторному уравнению

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad u(0) = \varphi,$$

рассматриваемому в $L_2([0, T]; L_2(Q)) = L_2(Q_T)$. Определим оператор $L: W(\mathcal{A}) \rightarrow L_2(Q_T)$ по формуле $Lu(\cdot, t) = Au(\cdot, t)$ при п.в. $t \in (0, T)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Сильным решением задачи (1)–(3)* будем называть функцию $u \in W(\mathcal{A})$, если она удовлетворяет уравнению

$$\frac{du}{dt} + Lu = f \quad \text{при п.в. } t \in (0, T) \quad (8)$$

и начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi. \quad (9)$$

Конормальная производная в (2) для функции из $H^1(Q)$ определяется из первой формулы Грина (ср. [5; п. 11.1]).

Напомним определение комплексной интерполяции, которая будет использоваться при описании пространства начальных данных. Пусть X и Y – банаховы пространства и $Y \subset X$ плотно и непрерывно. Обозначим через S полосу $S = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$. Через $\mathcal{H}(X, Y)$ обозначим пространство непрерывных ограниченных функций $F: \bar{S} \rightarrow Y$, аналитических в S , таких, что $F(iy) \in X$ непрерывна и ограничена, как X -значная функция от y , а $F(1 + iy) \in Y$ непрерывна и ограничена, как Y -значная функция от y , с нормой

$$\|F\|_{\mathcal{H}(X, Y)} = \max \left\{ \sup_{-\infty < y < +\infty} \|F(iy)\|_X, \sup_{-\infty < y < +\infty} \|F(1 + iy)\|_Y \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Интерполяционным пространством $[X, Y]_\theta$* называется образ пространства $\mathcal{H}(X, Y)$ при отображении $F \rightarrow F(\theta)$:

$$[X, Y]_\theta = \{f \in Y : \text{существует } F(z) \in \mathcal{H}(X, Y) \text{ такая, что } F(\theta) = f\},$$

с нормой

$$\|f\|_{[X, Y]_\theta} = \inf_{F(\theta)=f} \|F\|_{\mathcal{H}(X, Y)}.$$

Подробнее о комплексном методе интерполяции см. [6; гл. 1] в или [7].
Сформулируем теорему 4.2 из [2].

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор A сильно эллиптический с $c_2 = 0$. Тогда для любых $f \in L_2(Q_T)$ и $\varphi \in [L_2(Q), D(A)]_{1/2}$ задача (1)–(3) имеет единственное сильное решение, которое определяется по формуле

$$u(x, t) = T_t \varphi(x) + \int_0^t T_{t-s} f(x, s) ds, \quad (10)$$

где $\{T_t\}$ ($t \geq 0$) – аналитическая полугруппа с генератором $(-A)$.

2. Пространство начальных данных. В теореме 1 принадлежность начальной функции пространству $[L_2(Q), D(A)]_{1/2}$ является необходимым и достаточным условием существования сильного решения (см. [8]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть оператор A сильно эллиптический с $c_2 = 0$. Тогда

$$[L_2(Q), D(A)]_{1/2} = H^1(Q). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3.1 в [9] $[L_2(Q), D(A)]_{1/2} = D(A^{1/2})$. Поэтому для доказательства равенства (11) можно воспользоваться теоремой 3.2 из [10]. Для этого покажем, что оператор $A: H^{1+s}(Q) \rightarrow \tilde{H}^{-1+s}(Q)$ является ограниченным при $|s| < 1/2$.

Рассмотрим форму $a[v, w]$ на $H^{1+s}(Q) \times H^{1-s}(Q)$:

$$a[v, w] = \sum_{i,j=1}^n \langle R_{ij,Q} v_{x_j}, \bar{w}_{x_i} \rangle + \sum_{k=1}^n \langle R_{k,Q} v_{x_k}, \bar{w} \rangle + \langle R_{0,Q} v, \bar{w} \rangle.$$

Если $v \in H^{1+s}(Q)$ и $w \in H^{1-s}(Q)$, то $v_{x_j} \in H^s(Q)$ и $w_{x_i} \in H^{-s}(Q)$. При $-1/2 < s < 0$ пространства H^s совпадают с $\tilde{H}^s$. Операторы $R_{ij,Q}$, $R_{k,Q}$ ограничены в $H^s(Q)$ при $|s| < 1/2$, так как продолжение нулем – ограниченный оператор (при $s \geq 0$ см. теорему 3.33 [11], при $s < 0$ см. следствие 3.6.4 в [5]). Таким образом, при каждом $|s| < 1/2$ существует $C_s > 0$, такое что

$$|a[v, w]| \leq C_s \|v\|_{H^{1+s}(Q)} \|w\|_{H^{1-s}(Q)}.$$

Тогда оператор A определяется снова по формуле:

$$\langle Av, \bar{w} \rangle = a[v, w], \quad v \in H^{1+s}(Q), \quad w \in H^{1-s}(Q),$$

а $f = Av$ принадлежит $\tilde{H}^{-1+s}(Q)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В [12] Като была сформулирована проблема для m -секториального оператора A : “Верно ли, что $D(A^{1/2})$ и $D(A^{*1/2})$ совпадают?” В [9] был построен пример оператора, не удовлетворяющего данному условию. Тогда вопрос остался, но для более узкого класса m -секториальных операторов – для операторов, заданных коэрцитивной формой. В [13] был построен контрпример и для такого класса операторов. Тем не менее, положительное решение этого вопроса для операторов, связанных с сильно эллиптическими системами дифференциальных уравнений с измеримыми ограниченными коэффициентами в липшицевых областях, получено в [14]. В статье [10] гипотеза Като была доказана для широкого класса операторов, заданных секториальной формой. Из теоремы 2 следует, что для операторов A , рассмотренных в настоящей работе, справедливо равенство $D(A^{1/2}) = D(A^{*1/2})$ (оператор A^* определяется по полуторалинейной форме $a[w, v]$), что является ответом на вопрос, поставленный в замечании 4.1 в [2]. В одномерном случае данный вопрос был решен положительно в [15]. Для дифференциально-разностных операторов с первым краевым условием данный вопрос решен положительно в [16].

Автор выражает благодарность А. Л. Скубачевскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе, М. С. Аграновичу за дилетантское и плодотворное обсуждение вопросов, связанных с проблемой Т. Като, а также за прочтение рукописи и сделанные замечания, и А. А. Шкаликову за устранение неточности в заключительном замечании.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. L. Skubachevskii, *Nonlinear Anal.*, **32**:2 (1998), 261–278. [2] А. М. Селицкий, А. Л. Скубачевский, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **26**, Изд-во Моск. ун-та, М., 2007, 324–347. [3] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972. [4] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Appl. Math. Sci., **44**, Springer-Verlag, Berlin, 1983. [5] М. С. Агранович, *Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей*, МЦНМО, М., 2013. [6] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Т. 1, Мир, М., 1971. [7] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980. [8] A. Ashyralyev, P. E. Sobolevskii, *Well-Posedness of Parabolic Difference Equations*, Oper. Theory Adv. Appl., **69**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1994. [9] J. L. Lions, *J. Math. Soc. Japan*, **14**:2 (1962), 233–241. [10] М. С. Агранович, А. М. Селицкий, “Дробные степени операторов, отвечающих коэрцитивным задачам в липшицевых областях”, *Функц. анализ и его прил.*, **47**:2 (2013), 2–17. [11] W. McLean, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000. [12] Т. Като, *J. Math. Soc. Japan*, **13**:3 (1961), 246–274. [13] A. McIntosh, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **32** (1972), 430–434. [14] A. Axelsson, S. Keith, A. McIntosh, *J. London Math. Soc.* (2), **74**:1 (2006), 113–130. [15] А. М. Селицкий, *Матем. заметки*, **92**:4 (2012), 636–640. [16] Р. В. Шамин, *Матем. сб.*, **194**:9 (2003), 141–156.

А. М. Селицкий

Вычислительный центр

им. А. А. Дородницына РАН, г. Москва

Российский университет дружбы народов, г. Москва

E-mail: selitsky@mail.ru

Поступило

15.04.2013