Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Б. Банару, Аксиома сасакиевых гиперповерхностей
и 6-мерные эрмитовы подмногообразия алгебры октав,
Матем. заметки, 2016, том 99, выпуск 1, 140–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10308>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:36:19

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Аксиома сасакиевых гиперповерхностей и 6-мерные эрмитовы подмногообразия алгебры октав

М. Б. Банару

В память о дорогом Леониде Евгеньевиче Евтушике (1931–2013)

Существование 3-векторных произведений в алгебре Кэли дает исследователю весьма интересные, содержательные и разнообразные примеры почти эрмитовых структур. Каждое из таких 3-векторных произведений индуцирует почти эрмитову структуру на 6-мерном ориентируемом подмногообразии алгебры октав. Подобные почти эрмитовы структуры изучались систематически с 60-х годов прошлого века известнейшим американским геометром Альфредом Греем, затем отечественным специалистом Кириченко и многими другими. Например, Кириченко получил полную классификацию 6-мерных локально симметрических эрмитовых типа Риччи подмногообразий алгебры Кэли [1], имеющих непосредственное отношение к данной работе. Эта тематика ни в коей мере не утратила своего значения и сейчас. Большое количество современных геометров из США, Китая, Японии, Бельгии, Южной Кореи, Польши и других стран каждый год публикует статьи в хороших журналах с результатами, полученными в области геометрии 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав.

Настоящая работа является частью исследований автора, начатых в 90-х годах прошлого века под руководством Кириченко и продолжающихся по настоящее время. В частности, в [2] содержится такой результат относительно 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав: доказано, что если 6-мерное эрмитово подмногообразие M^6 алгебры Кэли удовлетворяет аксиоме u -сасакиевых гиперповерхностей (т.е. если через всякую точку M^6 проходит вполне омбилическая сасакиева гиперповерхность), то M^6 – келерово многообразие.

В данной заметке условие быть вполне омбилической для гиперповерхности Сасаки снято. Цель работы – выяснить, какими свойствами обладает 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры октав, удовлетворяющее аксиоме сасакиевых гиперповерхностей.

1. Как известно [3], *почти эрмитовой* (almost Hermitian, АН-) структурой на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, где J – почти комплексная структура, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{N}(M^{2n}).$$

Здесь $\mathfrak{N}(M^{2n})$ – модуль гладких (класса C^∞) векторных полей на многообразии M^{2n} . Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется *почти эрмитовым* многообразием. С каждой АН-структурой $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ на многообразии связано

поле дважды ковариантного кососимметрического тензора (т.е. 2-формы), определяемого равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{N}(M^{2n})$$

и называемого *фундаментальной* (или *келеровой*) *формой* структуры.

Пусть $(M^{2n}, \{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\})$ – почти эрмитово многообразие. Зафиксируем точку $p \in M^{2n}$. Пусть $T_p(M^{2n})$ – пространство, касательное к многообразию M^{2n} в точке p , $\{J_p, g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ – почти эрмитова структура, порожденная парой $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$. Реперы, адаптированные почти эрмитовой структуре (или *A-реперы*), устроены следующим образом:

$$(p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$$

где ε_a – собственные векторы оператора структуры, соответствующие собственному значению оператора $i = \sqrt{-1}$, а $\varepsilon_{\hat{a}}$ – собственные векторы, соответствующие собственному значению $-i$. Здесь индекс a принимает значения от 1 до n ; $\hat{a} = a + n$. Матрицы оператора структуры, римановой метрики и фундаментальной формы в A-репере в точке p имеют, соответственно, такой вид [3]:

$$(J_j^k) = \left(\begin{array}{c|c} iI_n & 0 \\ \hline 0 & -iI_n \end{array} \right), \quad (g_{kj}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline I_n & 0 \end{array} \right), \quad (F_{kj}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & iI_n \\ \hline -iI_n & 0 \end{array} \right).$$

где I_n – единичная матрица порядка n , $k, j = 1, \dots, 2n$.

Пусть $\mathbf{O} \equiv \mathbf{R}^8$ – алгебра Кэли. Как известно [1], [4], в ней определены два неизоморфных 3-векторных произведения:

$$\begin{aligned} P_1(X, Y, Z) &= \varepsilon \cdot (-X(\bar{Y}Z) + \langle X, Y \rangle Z + \langle Y, Z \rangle X - \langle Z, X \rangle Y), \\ P_2(X, Y, Z) &= \varepsilon \cdot (-(X\bar{Y})Z + \langle X, Y \rangle Z + \langle Y, Z \rangle X - \langle Z, X \rangle Y). \end{aligned}$$

Здесь $X, Y, Z \in \mathbf{O}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbf{O}$, $X \rightarrow \bar{X}$ – оператор сопряжения в $\mathbf{O}$; $\varepsilon = \pm 1$. Отметим, что $X(\bar{Y}Z) \neq (X\bar{Y})Z$ в общем случае, поскольку операция умножения в алгебре Кэли не ассоциативна. При этом любое другое 3-векторное произведение в алгебре октав изоморфно одному из вышеуказанных.

Пусть $M^6 \subset \mathbf{O}$ – 6-мерное ориентируемое подмногообразие алгебры Кэли. Хорошо известно, что каждое из указанных выше 3-векторных произведения порождает на M^6 почти эрмитову структуру [1].

Подмногообразие M^6 называется *эрмитовым*, если индуцируемая на нем почти эрмитова структура интегрируема, и *келеровым*, если его фундаментальная форма удовлетворяет условию $\nabla F = 0$. Напомним [1], [2], что точка $p \in M^6$ называется *общей*, если $e_0 \notin T_p(M^6)$, где e_0 – единица алгебры Кэли. Подмногообразия, состоящие только из общих точек, называются *подмногообразиями общего типа* [1], [2]. Все рассматриваемые далее подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ подразумеваются подмногообразиями общего типа.

2. Напомним [3], [5], [6], что *почти контактной метрической структурой* на многообразии N называется система тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ на этом многообразии, для которой выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= 1, & \Phi(\xi) &= 0, & \eta \circ \Phi &= 0, & \Phi^2 &= -\text{id} + \xi \otimes \eta, \\ \langle \Phi X, \Phi Y \rangle &= \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), & X, Y &\in \mathfrak{N}(N). \end{aligned}$$

(Здесь Φ – поле тензора типа $(1, 1)$, ξ – векторное поле, η – ковекторное поле, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – риманова метрика, $\mathfrak{N}(N)$ – модуль гладких векторных полей на многообразии N , id – тождественное преобразование.)

Хорошо известно, что многообразие, допускающее почти контактную метрическую структуру, нечетномерно и ориентируемо. Примером почти контактной метрической структуры является косимплектическая структура, которую можно охарактеризовать тождеством

$$\nabla \eta = \nabla \Phi = 0,$$

где ∇ – риманова связность метрики $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ [3]. Многообразия, наделенные такой структурой, локально эквивалентны произведению келерова многообразия на вещественную прямую [6]. Почти контактные метрические структуры тесно связаны с почти эрмитовыми структурами. Например, если $(N, \{\Phi, \xi, \eta, g\})$ – почти контактное метрическое многообразие, то на многообразии $N \times R$ индуцируется почти эрмитова структура [7]. Если эта почти эрмитова структура интегрируема, то исходная почти контактная метрическая структура называется *нормальной*. Нормальная контактная метрическая структура называется *сасакиевой* [7]. Сасакиевы структуры можно определить и с помощью тождества, связывающего их структурные тензоры [3]:

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle X, Y \rangle \xi - \eta(Y)X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(N).$$

Сасакиевы структуры индуцируются, например, на вполне омбилических гиперповерхностях келеровых многообразий [7]. Они обладают многими замечательными свойствами и играют фундаментальную роль в контактной геометрии.

3. Прежде чем мы сформулируем и докажем основной результат данной заметки, напомним, что почти эрмитово многообразие удовлетворяет аксиоме сасакиевых гиперповерхностей, если через его каждую точку проходит гиперповерхность Сасаки. Также напомним, что в уже упомянутой выше работе Кириченко [1] введены в рассмотрение и исследованы 6-мерные типа Риччи эрмитовы подмногообразия алгебры Кэли. Приведем определение таких подмногообразий. Для этого напомним, что точка $p \in M^6$ называется *специальной*, если

$$T_p(M^6) \subset L(e_0)^\perp,$$

где $L(e_0)^\perp$ – ортогональное дополнение единицы алгебры октав. В противном случае точка p называется *простой*. Ясно, что совокупность всех простых точек M^6 представляет собой открытое подмногообразие $M_0^6 \subset M^6$, на котором канонически индуцируется распределение Z , порожденное ортогональными проекциями вектора e_0 на касательное пространство $T_p(M^6)$, $p \in M_0^6$. Такое распределение Z , а также одномерное пространство $Z_p \in T_p(M^6)$, $p \in M_0^6$, называют *исключительными* [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [1]. Эрмитово подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ называется *подмногообразием типа Риччи*, если кривизна Риччи в каждой точке $p \in M_0^6$ в направлении исключительного пространства Z_p принимает минимальное значение.

ТЕОРЕМА. *Всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли, состоящее из простых точек и удовлетворяющее аксиоме сасакиевых гиперповерхностей, является локально симметрическим подмногообразием типа Риччи.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся структурными уравнениями Картана почти контактной метрической структуры на гиперповерхности N^{2n-1} эрмитова многообразия M^{2n} [2], [8]:

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + B_\gamma^{\alpha\beta} \omega^\gamma \wedge \omega_\beta + (\sqrt{2}B_\beta^{\alpha n} + i\sigma_\beta^\alpha) \omega^\beta \wedge \omega + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} B_n^{\alpha\beta} + i\sigma^{\alpha\beta}\right) \omega_\beta \wedge \omega, \\ d\omega_\alpha &= -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta}^\gamma \omega_\gamma \wedge \omega^\beta + (\sqrt{2}B_{\alpha n}^\beta - i\sigma_\alpha^\beta) \omega_\beta \wedge \omega + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} B_{\alpha\beta}^n - i\sigma_{\alpha\beta}\right) \omega^\beta \wedge \omega, \\ d\omega &= (\sqrt{2}B_\beta^{\alpha n} - \sqrt{2}B_{n\beta}^\alpha - 2i\sigma_\beta^\alpha) \omega^\beta \wedge \omega_\alpha + (B_{n\beta}^n + i\sigma_{n\beta}) \omega \wedge \omega^\beta + (B_n^{\beta\beta} - i\sigma_n^\beta) \omega \wedge \omega_\beta, \end{aligned} \quad (1)$$

где системы функций $\{B_c^{ab}\}$ и $\{B_{ab}^c\}$ служат компонентами тензоров Кириченко [2], [9], [10] почти эрмитовой структуры на многообразии M^{2n} . Здесь $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n-1$, $a, b, c = 1, \dots, n$, $\hat{a} = a + n$, σ – вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в эрмитово многообразие M^{2n} .

Сопоставляя (1) со структурными уравнениями сасакиевой структуры [2], [3]:

$$d\omega^\alpha = \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta - i\omega \wedge \omega^\alpha, \quad d\omega_\alpha = -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + i\omega \wedge \omega_\alpha, \quad d\omega = -2i\omega^\alpha \wedge \omega_\alpha,$$

в силу линейной независимости базисных форм получаем условия, одновременное выполнение которых есть критерий того, чтобы почти контактная метрическая структура, индуцированная на гиперповерхности 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры октав, являлась сасакиевой:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sqrt{2}B_3^{\alpha 3} + i\sigma_\beta^\alpha = i\delta_\beta^\alpha; \quad 2) \quad B_\gamma^{\alpha\beta} = 0; \quad 3) \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}B_3^{\alpha\beta} + i\sigma^{\alpha\beta} = 0; \\ 4) \quad & \sqrt{2}B_\beta^{3\alpha} - \sqrt{2}B_{3\beta}^\alpha - 2i\sigma_\beta^\alpha = -2i\delta_\beta^\alpha; \quad 5) \quad B_3^{3\beta} - i\sigma_3^\beta = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

и формулы комплексного сопряжения, запись которых мы опустим.

В [11] Кириченко получил структурные уравнения почти эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{abh}D_{hc}\omega^c \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ah[b}D_{h}^{c]}\omega_b \wedge \omega_c, \\ d\omega_a &= -\omega_b^a \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{abh}D^{hc}\omega_c \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ah[b}D_{c]}^h\omega^b \wedge \omega^c, \\ d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2}\delta_{bg}^{ah}D_{h[k}D_{j]}^g + \sum_\varphi T_{\hat{a}[k}^\varphi T_{j]b}^\varphi \right) \omega^k \wedge \omega^j, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\{\omega^k\}$ – компоненты форм смещения, $\{\omega_j^k\}$ – компоненты форм римановой связности. Условимся, что здесь и далее $\varphi = 7, 8$, $a, b, c, d, g, h = 1, 2, 3$, $\hat{a} = a + 3$, $k, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Как и в [1], [2], [11] $\omega_a = \omega_{\hat{a}}$. При этом $\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc}^{123}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}^{abc}$ – компоненты тензора Кронекера порядка три, $\delta_{bg}^{ah} = \delta_b^a \delta_g^h - \delta_g^a \delta_b^h$,

$$\begin{aligned} D^{hc} &= D_{\hat{h}\hat{c}}, \quad D_h^c = D_{h\hat{c}}, \quad D_c^h = D_{\hat{h}c}, \\ D_{cj} &= \mp T_{cj}^8 + iT_{cj}^7, \quad D_{\hat{c}j} = \mp T_{\hat{c}j}^8 - iT_{\hat{c}j}^7, \end{aligned}$$

где $\{T_{kj}^\varphi\}$ – компоненты конфигурационного тензора (в терминологии Грея), или второй основной формы погружения подмногообразия M^6 .

Поскольку почти эрмитово подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ является эрмитовым тогда и только тогда [12], когда $D_{\hat{a}b} = D_{a\hat{b}} = 0$, то уравнения (3) для 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли примут вид:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{abh}D_{hc}\omega^c \wedge \omega_b, \\ d\omega_a &= -\omega_b^a \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{abh}D^{hc}\omega_c \wedge \omega^b, \\ d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2}\delta_{bg}^{ah}D_{hd}D^{gc} + \sum_\varphi T_{\hat{a}\hat{c}}^\varphi T_{bd}^\varphi \right) \omega_c \wedge \omega^d. \end{aligned} \quad (4)$$

Принимая во внимание (4), из (2) мы получаем

$$B_\gamma^{\alpha\beta} = 0 \iff \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{\alpha\beta 3}D_{3\gamma} = 0 \iff D_{3\gamma} = 0.$$

Воспользуемся тождествами, установленными для 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав в [13]:

$$(D_{12})^2 = D_{11}D_{22}, \quad (D_{13})^2 = D_{11}D_{33}, \quad (D_{23})^2 = D_{22}D_{33}.$$

Получаем, что матрица (D_{ab}) при соответствующем выборе репера в каждой точке 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Но это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы эрмитово $M^6 \subset \mathbf{O}$ являлось локально симметрическим многообразием типа Риччи [1]. Теорема полностью доказана.

Отметим, что особый интерес, разумеется, представляет лишь случай, соответствующий некелерову 6-мерному локально симметрическому подмногообразию типа Риччи. В этом случае согласно [1] $M^6 \subset \mathbf{O}$ локально голоморфно изометрично произведению келеровых многообразий C^2 и CH^1 “скрученному” вдоль CH^1 . (Здесь через C^2 обозначено двумерное комплексное евклидово пространство, а через CH^1 – комплексное гиперболическое пространство).

Заметим также, что в [2] доказано (теорема 5 на с. 23), что сасакиева гиперповерхность некелерова 6-мерного эрмитова локально симметрического подмногообразия типа Риччи не может быть вполне омбилической. В келеровом же случае согласно [2] и уже упомянутым выше построениям Блэра [7] сасакиева гиперповерхность будет с необходимостью вполне омбилической.

Поскольку ранее было доказано [14], что 6-мерные локально симметрические подмногообразия типа Риччи являются уплощающимися, то из доказанной теоремы вытекает такое

СЛЕДСТВИЕ. *Всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли, удовлетворяющее аксиоме сасакиевых гиперповерхностей, является уплощающимся подмногообразием.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Ф. Кириченко, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1994, №3, 6–13.
 [2] М. Б. Банару, *Матем. сб.*, **194**:8 (2003), 13–24. [3] В. Ф. Кириченко, *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*, МПГУ, М., 2003. [4] A. Gray, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **141** (1969), 465–504. [5] D. E. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, Progr. Math., **203**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002. [6] V. F. Kiritchenko, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **295**:12 (1982), 673–676. [7] D. E. Blair, *J. Differential Geometry*, 1967, 331–345. [8] Л. В. Степанова, *Научн. тр. МПГУ им. В. И. Ленина*, 1995, 187–191. [9] A. Abu-Saleem, M. Banaru, *An. Univ. Oradea Fasc. Mat.*, **17**:2 (2010), 201–208. [10] M. Banaru, *J. Sichuan Univ. Sci. Eng.*, **25**:4 (2012), 1–5. [11] В. Ф. Кириченко, *Изв. вузов. Матем.*, 1980, №8, 32–38. [12] M. Banaru, *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.*, **95** (2004), 125–131. [13] М. Б. Банару, *Сиб. матем. журн.*, **44**:5 (2003), 981–991. [14] M. Banaru, *Kyungpook Math. J.*, **43**:1 (2003), 27–35.

М. Б. Банару

Смоленский государственный университет

E-mail: mihaile.banaru@yahoo.com

Поступило

24.04.2013

Исправленный вариант

26.03.2015