Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Л. Виноградов, Точные оценки интегралов через второй модуль непрерывности, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 4, 483–495

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10309>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 04:10:43

Точные оценки интегралов через второй модуль непрерывности

О. Л. Виноградов

В работе для некоторого класса ядер найдена точная постоянная в оценке интеграла от произведения двух функций через второй модуль непрерывности одной из них. Из полученных результатов выводятся оценки наилучших приближений целыми функциями конечной степени и сплайнами через второй модуль непрерывности второй производной приближаемой функции. Постоянные в этих оценках меньше, чем ранее известные.

Библиография: 5 названий.

DOI: 10.4213/mzm10309

1. Постановка задачи и предварительные результаты. Далее $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ – множества вещественных, целых, натуральных чисел соответственно, $C(E)$ и $L(E)$ – множества непрерывных и суммируемых на множестве E функций. Если из контекста не следует противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными. Если функция f задана на промежутке E , то

$$\delta_t^2 f(x) = f(x+t) - 2f(x) + f(x-t), \quad \omega_2(f, h) = \sup_{\substack{x \pm t \in E, \\ 0 \leq t \leq h}} |\delta_t^2 f(x)|$$

– ее вторая центральная разность и второй модуль непрерывности.

Рассматривается следующая задача. Пусть $h > 0$, $K \in L[-h, h]$, K четна и выполнено условие $\int_{-h}^h K = 0$. Требуется найти наименьшую постоянную A в неравенстве

$$\left| \int_{-h}^h f K \right| \leq A \cdot \omega_2(f, h), \quad f \in C[-h, h],$$

т.е. величину

$$D(K, h) = \sup_{f \in C[-h, h]} \frac{\left| \int_{-h}^h f K \right|}{\omega_2(f, h)}.$$

Из следующих далее лемм 1.1 и 1.2 вытекает оценка

$$\frac{1}{2} \int_0^h |K| \leq D(K, h) \leq \int_0^h |K|.$$

Затем в леммах 1.3 и 1.4 указывается класс ядер, для которых правое неравенство обращается в равенство. В п. 2 выводятся легко проверяемые достаточные условия принадлежности ядра этому классу. В п. 3 результаты распространяются на свертки. Пункт 4 содержит приложения полученных результатов к неравенствам типа Джексона.

Вопрос о точном значении $D(K, h)$ в общем случае остается открытым.

ЛЕММА 1.1. Пусть $h > 0$, $K \in L[-h, h]$, K четна, $\int_{-h}^h K = 0$, функция f ограничена и измерима на $[-h, h]$. Тогда

$$\left| \int_{-h}^h fK \right| \leq \int_0^h |K| \cdot \omega_2(f, h).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\int_{-h}^h fK = \int_0^h \delta_t^2 f(0) K(t) dt,$$

откуда и вытекает требуемое.

ЛЕММА 1.2. Пусть $h > 0$, $K \in L[-h, h]$, K четна, $\int_{-h}^h K = 0$. Тогда

$$D(K, h) \geq \frac{1}{2} \int_0^h |K|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $f_0 = \text{sign } K$, т.е.

$$f_0 = \frac{|K|}{K} \quad \text{при} \quad K \neq 0 \quad \text{и} \quad f_0 = 0 \quad \text{при} \quad K = 0.$$

Тогда

$$\omega_2(f_0, h) \leq 4, \quad \int_{-h}^h f_0 K = 2 \int_0^h |K|.$$

Остается приблизить функцию f_0 непрерывными. Для этого продолжим f_0 на $\mathbb{R}$ с периодом $2h$ и обозначим через f_τ функции Стеклова f_0 с шагом $\tau > 0$, т.е. положим

$$f_\tau(x) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f_0(x-t) dt.$$

Тогда при всех $\tau > 0$, $x \in \mathbb{R}$ будет $|f_\tau(x)| \leq 1$, откуда $\omega_2(f_\tau, h) \leq 4$. Кроме того, $f_\tau \rightarrow f$ почти везде при $\tau \rightarrow 0$. Следовательно, по теореме Лебега о мажорированной сходимости

$$\int_{-h}^h f_\tau K \rightarrow \int_{-h}^h f_0 K.$$

Далее рассматриваются только вещественнозначные ядра K .

Укажем некоторые ситуации, когда оценка снизу в лемме 1.2 точна. Сначала разберем случай кусочно-постоянного ядра K специального вида. Значения функции K в точках разрыва не существенны.

ЛЕММА 1.3. Пусть $0 < a \leq b < c < +\infty$, $2a \leq c - b$,

$$K(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |t| < a, \\ -\frac{1}{2(c-b)}, & b < |t| < c, \\ 0, & a < |t| < b, \end{cases} \quad (1)$$

функция f ограничена и измерима на $[-c, c]$. Тогда

$$\int_{-c}^c fK = -\frac{c-b-2a}{4a(c-b-a)} \int_{-a}^a \delta_{((c-b-a)/a)|x|+b}^2 f(x) dx - \frac{1}{4(c-b-a)} \int_{-a}^a \delta_{c-a}^2 f(x) dx, \quad (2)$$

и

$$\left| \int_{-c}^c fK \right| \leq \frac{1}{2} \omega_2(f, c). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Сначала будем считать, что $2a < c - b$. Записывая по определению вторую разность и делая линейные замены переменных в интегралах, находим

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^a \delta_{((c-b-a)/a)x+b}^2 f(x) dx \\ &= \int_0^a \left(f\left(\frac{c-b}{a}x+b\right) + f\left(-\frac{c-b-2a}{a}x-b\right) - 2f(x) \right) dx \\ &= \frac{a}{c-b} \int_b^c f + \frac{a}{c-b-2a} \int_{2a-c}^{-b} f - 2 \int_0^a f. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \int_{-a}^0 \delta_{(b-(c-b-a)/a)x}^2 f(x) dx = \frac{a}{c-b} \int_{-c}^{-b} f + \frac{a}{c-b-2a} \int_b^{c-2a} f - 2 \int_{-a}^0 f, \\ I_2 &= \int_{-a}^a \delta_{c-a}^2 f(x) dx = \int_{-a}^a \left(f(x+c-a) + f(x-c+a) - 2f(x) \right) dx \\ &= \int_{c-2a}^c f + \int_{-c}^{2a-c} f - 2 \int_{-a}^a f. \end{aligned}$$

Приводя подобные члены, находим

$$-\frac{c-b-2a}{4a(c-b-a)}(I_1 + \tilde{I}_1) - \frac{1}{4(c-b-a)}I_2 = -\frac{1}{2(c-b)}\left(\int_{-c}^{-b} + \int_c^b\right)f + \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f,$$

а это и есть равенство (2). По непрерывности оно верно и при $2a = c - b$.

2. Из равенства (2) получаем

$$\left| \int_{-c}^c fK \right| \leq \left(\frac{c-b-2a}{4a(c-b-a)} \cdot 2a + \frac{1}{4(c-b-a)} \cdot 2a \right) \omega_2(f, c) = \frac{1}{2} \omega_2(f, c).$$

При $2a > c - b$ можно построить функцию f , для которой оценка (3) неверна. Более того, справедлива следующая оценка снизу.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Пусть $0 < a \leq b < c \leq h$, $2a > c - b$, $K \in L[-h, h]$, K четна, $K > 0$ на $(0, a)$, $K < 0$ на (b, c) , $K = 0$ на (a, b) и на (c, h) , $\int_0^h K = 0$. Тогда

$$D(K, h) \geq \frac{1}{2} \int_0^h |K| + \frac{1}{3} \int_{(c-b)/2}^a K.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \in \left[0, \frac{c-b}{2}\right], \\ \frac{5}{3} & \text{при } |x| \in \left(\frac{c-b}{2}, a\right), \\ \frac{1}{3} & \text{при } |x| \in [a, b] \cup [c, h], \\ -1 & \text{при } |x| \in (b, c). \end{cases}$$

Если $x - t \in (-c, -b)$, $x + t \in (b, c)$, то $|x| < (c - b)/2$. Поэтому во вторую разность f_1 не могут последовательно входить значения $-1, 5/3, -1$. То же относится к значениям $5/3, -1, 5/3$. Очевидно, что остальные вторые разности f_1 по модулю не больше 4. Следовательно,

$$\omega_2(f_1, h) = 4, \quad \int_{-h}^h f_1 K = 2 \int_0^h |K| + \frac{4}{3} \int_{(c-b)/2}^a K.$$

Остается приблизить функцию f_1 непрерывными.

Распространим лемму 1.3 на ядра K вида $\int_0^1 K_s ds$, где функции K_s описываются равенством (1).

ЛЕММА 1.4. Пусть $h > 0$, $\Gamma \in L([0, 1] \times [-h, h])$ и при почти всех $s \in [0, 1]$ функция $K_s(\cdot) = \Gamma(s, \cdot)$ выражается равенством (1) с заменой a, b, c на a_s, b_s, c_s соответственно.

$$0 < a_s \leq b_s < c_s \leq h, \quad 2a_s \leq c_s - b_s, \quad a_s \leq b_t \quad \text{при почти всех } s, t \in [0, 1],$$

$K = \int_0^1 K_s ds$ и функция f ограничена и измерима на $[-h, h]$. Тогда $\int_0^h |K| = 1$ и

$$\left| \int_{-h}^h f K \right| \leq \frac{1}{2} \omega_2(f, h).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку при почти всех $x \in [-h, h]$ функция $s \mapsto K_s(x)$ существенно не меняет знака,

$$\int_0^h |K| = \int_0^h \left| \int_0^1 K_s(x) ds \right| dx = \int_0^h \int_0^1 |K_s(x)| ds dx = 1.$$

По лемме 1.3

$$\left| \int_{-h}^h f K \right| = \left| \int_0^1 \int_{-h}^h f(x) K_s(x) dx ds \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^h |K_s(x)| dx ds \cdot \omega_2(f, h) = \frac{1}{2} \omega_2(f, h).$$

2. Основные результаты. Установим возможность представления заданного ядра K в виде, описанном в лемме 1.4. Сначала получим подходящее представление неотрицательного ядра; общий случай получится комбинированием положительной и отрицательной частей:

$$K_+ = \max\{K, 0\}, \quad K_- = \max\{-K, 0\}.$$

При этом удобно обобщить ситуацию и считать, что ядро задано на пространстве с мерой.

Пусть $(E, \mathbb{A}, \mu)$ – пространство с мерой, функция $K: E \rightarrow [0, +\infty]$ измерима и $\int_E K d\mu = 1$. При $q \in [0, +\infty]$ обозначим через K_q срезку функции K , т.е. положим $K_q = \min\{K, q\}$. Обозначим еще

$$q_0 = \|K\|_\infty \in (0, +\infty], \quad \varphi(q) = \int_E K_q d\mu.$$

Отметим несколько свойств функции φ .

Свойство 1. Выполнено следующее: $\varphi(0) = 0$, $\varphi(q) = 1$ при $q \in [q_0, +\infty]$, $\varphi(q) \in (0, 1)$ при $q \in (0, q_0)$.

Это свойство очевидно.

Свойство 2. Функция φ выпукла вверх и непрерывна на $[0, +\infty)$.

Действительно, при всех x , для которых $K(x) < +\infty$, т.е. при почти всех x , функция $q \mapsto K_q(x)$ выпукла вверх и непрерывна на $[0, +\infty)$, а семейство K_q имеет суммируемую мажоранту K . Поэтому интеграл $\varphi(q)$ есть выпуклая вверх непрерывная функция параметра q .

Свойство 3. Функция φ строго возрастает на $[0, q_0]$.

Это следует из свойств 1 и 2.

Свойство 4. Существует функция ψ , обратная к сужению $\varphi|_{[0, q_0]}$. Таким образом, $\psi: [0, 1] \rightarrow [0, q_0]$ строго возрастает, ψ выпукла вниз и непрерывна на $[0, 1)$, $\psi(1-) = \psi(1) = q_0$. Если $q_0 < +\infty$, то ψ выпукла вниз и непрерывна на $[0, 1]$.

Напомним (см., например, [1; добавление III, теорема 2]), что непрерывная выпуклая на промежутке функция локально абсолютно непрерывна, а выпуклая на промежутке функция дифференцируема почти всюду. Если же подынтегральная функция выпукла по параметру, то законно одностороннее дифференцирование под знаком интеграла. Последнее легко доказывается с помощью теорем Лебега и Леви о предельном переходе под знаком интеграла.

При $s \in [0, 1]$ обозначим $e_s = E(K \geq \psi(s))$.

ТЕОРЕМА 2.1. При всех $x \in E$

$$K_{q_0}(x) = \int_0^1 \frac{\chi_{e_s}(x)}{\mu e_s} ds.$$

В частности, при почти всех $x \in E$

$$K(x) = \int_0^1 \frac{\chi_{e_s}(x)}{\mu e_s} ds.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку при всех $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(\min\{\alpha, q\})'_q = \begin{cases} 1, & q < \alpha, \\ 0, & q > \alpha, \end{cases}$$

при почти всех $q \in (0, +\infty)$

$$\varphi'(q) = \int_E \chi_{E(K \geq q)}(x) d\mu(x) = \mu E(K \geq q).$$

Поэтому при почти всех $s \in (0, 1)$

$$\psi'(s) = \frac{1}{\varphi'(\psi(s))} = \frac{1}{\mu e_s}.$$

По определению e_s соотношение $x \in e_s$ означает, что $K(x) \geq \psi(s)$ или, что равносильно, $s \leq \varphi(K(x))$. Если $K(x) < q_0$, то

$$\int_0^1 \frac{\chi_{e_s}(x)}{\mu e_s} ds = \int_0^{\varphi(K(x))} \psi' = \psi(\varphi(K(x))) - \psi(0) = K(x) = K_{q_0}(x).$$

Если же $K(x) \geq q_0$, то $x \in e_s$ при всех $s \in [0, 1]$, откуда

$$\int_0^1 \frac{\chi_{e_s}(x)}{\mu e_s} ds = \int_0^1 \psi' = \psi(1) - \psi(0) = q_0 = K_{q_0}(x).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Утверждение теоремы 2.1 останется верным, если заменить множества e_s на $\tilde{e}_s = E(K > \psi(s))$, так как для любого $x \in E$ множество $\{s \in [0, 1] : K(x) = \psi(s)\}$ состоит не более чем из одной точки.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \varphi'_+(q) &= \mu E(K > q), & q \in [0, +\infty), \\ \varphi'_-(q) &= \mu E(K \geq q), & q \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Таким образом, дифференцируемость φ в точке $q \in (0, +\infty)$ равносильна равенству $\mu E(K = q) = 0$.

Пусть ядро K меняет знак, $\int_E K_{\pm} d\mu = 1$. Применяя теорему 2.1 к K_+ и K_- , при почти всех x получаем представления

$$\begin{aligned} K_{\pm}(x) &= \pm \int_0^1 \frac{\chi_{e_s^{\pm}}(x)}{\mu e_s^{\pm}} ds, \\ K(x) &= \int_0^1 \left(\frac{\chi_{e_s^+}(x)}{\mu e_s^+} - \frac{\chi_{e_s^-}(x)}{\mu e_s^-} \right) ds, \end{aligned} \quad (4)$$

где $e_s^{\pm}$ – множества e_s , соответствующие функциям $K_{\pm}$.

Далее рассматриваются ядра K следующего вида. Пусть $0 < a \leq b < c$, функция K четна, $K > 0$ на $(0, a)$, $K = 0$ на (a, b) , $K < 0$ на (b, c) (значения K в отдельных точках несущественны), K убывает на $[0, a]$, а на $[b, c]$ функция K или монотонна,

или меняет монотонность один раз с убывания на возрастание. Тогда множества $e_s^\pm$ имеют вид (тип промежутков не играет роли)

$$e_s^+ = \langle -a_s, a_s \rangle, \quad e_s^- = \langle -c_s, -b_s \rangle \cup \langle b_s, c_s \rangle,$$

а $\mu e_s^+ = 2a_s$, $\mu e_s^- = 2(c_s - b_s)$.

Выведем условия, достаточные для выполнения неравенств

$$2a_s \leq b_s - c_s \quad \text{при всех } s \in [0, 1].$$

Напомним, что эти неравенства играли ключевую роль в леммах 1.3 и 1.4. При изучении этого вопроса удобно снова рассматривать положительную и отрицательную части ядра отдельно, причем лишь для неотрицательных значений аргумента. Мы по-прежнему будем обозначать функции буквой K . Вместо a_s будем писать также $a_K(s)$, и аналогично для b_s и c_s .

ЛЕММА 2.1. Пусть $a > 0$, $K: (0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $K > 0$ на $(0, a)$, $K(a) = 0$, K выпукла вниз на $(0, a]$, $\int_0^a K = 1$. Тогда $a_K(s) \leq (1-s)a$ при всех $s \in [0, 1)$, причем если $s \in (0, 1)$, а функция K нелинейна, то неравенство строгое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через L линейную функцию, подграфик которой – треугольник с основанием $[0, a]$ и площадью 1, т.е. положим

$$L(x) = \frac{2(a-x)}{a^2}, \quad x \in [0, a].$$

Тогда $a_L(s) = (1-s)a$, и доказываемое неравенство можно переписать в виде $a_K(s) \leq a_L(s)$.

Очевидно, что $a_K(0) = a_L(0) = a$.

Пусть $K \neq L$, $s \in (0, 1)$, число $q \in (0, 2/a)$ таково, что площадь подграфика срезки L равна s , т.е. $\varphi_L(q) = s$, $q = L(a_L(s))$. Кроме точки $(a, 0)$ графики K и L имеют еще одну общую точку; обозначим ее (x^*, q^*) . Тогда $K > L$ на $[0, x^*)$, $K < L$ на (x^*, a) .

Если $q \leq q^*$, то $x^* \leq a_L(s) < a$ и $K_q \leq L_q$, причем вблизи точки a неравенство строгое. Отсюда $\varphi_K(q) < \varphi_L(q) = s$ и

$$K(a_L(s)) \leq L(a_L(s)) = q < \varphi_K^{-1}(s) = K(a_K(s)).$$

Поэтому $a_K(s) < a_L(s)$ в силу убывания K .

Пусть $q > q^*$, $x \in (0, a_L(s))$. В силу выпуклости K

$$\frac{K(x) - K(a_L(s))}{x - a_L(s)} < \frac{K(x^*) - K(a)}{x^* - a} = \frac{L(x^*) - L(a)}{x^* - a} = \frac{L(x) - L(a_L(s))}{x - a_L(s)},$$

откуда

$$K(x) - K(a_L(s)) > L(x) - L(a_L(s)).$$

Интегрируя, получаем

$$1 - s = \int_0^{a_L(s)} (L - L(a_L(s))) < \int_0^{a_L(s)} (K - K(a_L(s))) = 1 - \varphi_K(K(a_L(s))).$$

Отсюда находим

$$\varphi_K(K(a_L(s))) < s, \quad K(a_L(s)) < \psi_K(s) = K(a_K(s)).$$

Поэтому снова $a_K(s) < a_L(s)$ в силу убывания K .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Если доопределить $K(0) = K(0+) \in (0, +\infty]$, то будет $a_K(1) = 0$. Мы не будем пользоваться этим замечанием.

ЛЕММА 2.2. Пусть $b < c$, K непрерывна в точках b и c и выпукла вверх на $[b, c]$, $K(b) = K(c) = 0$, $K > 0$ на (b, c) , $\int_b^c K = 1$, $m_K(s) = c_K(s) - b_K(s)$. Тогда

$$m_K(s) \geq (1-s)(c-b) \quad \text{при всех } s \in [0, 1],$$

причем если $s \in (0, 1)$, а подграфик K – не треугольник, то неравенство строгое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через L какую-нибудь кусочно-линейную функцию, подграфик которой – треугольник с основанием $[b, c]$ и площадью 1. Тогда $m_L(s) = (1-s)(c-b)$, и доказываемое неравенство можно переписать в виде $m_K(s) \geq m_L(s)$. Очевидно, что $m_K(0) = m_L(0) = c-b$. Остается разобрать случай, когда функция K не имеет указанного вида, т.е. подграфик K – не треугольник.

Не уменьшая общности, построим треугольник так, что его боковые стороны имеют, кроме точек $(b, 0)$ и $(c, 0)$, еще по одной общей точке с графиком K , причем их ординаты одинаковы. Существование такого треугольника следует из теоремы о промежуточном значении. Обозначим эти точки через

$$(b^*, q^*), \quad (c^*, q^*), \quad b^* < c^*,$$

и положим $m^* = c^* - b^*$. Тогда

$$K > L \quad \text{на} \quad (b, b^*) \cup (c^*, c) \quad \text{и} \quad K < L \quad \text{на} \quad (b^*, c^*).$$

Пусть $s \in (0, 1)$, число $q \in (0, 2/(b-c))$ таково, что площадь подграфика срезки L равна s , т.е.

$$q = L(b_L(s)) = L(c_L(s)).$$

Если $q \leq q^*$, то $b < b_L(s) \leq b^*$, $c^* \leq c_L(s) < c$ и $K_q \geq L_q$, причем вблизи точек b и c неравенство строгое. Отсюда $\varphi_K(q) < \varphi_L(q) = s$ и

$$K(b_L(s)) \geq L(b_L(s)) = q > \varphi_K^{-1}(s) = K(b_K(s)).$$

Поэтому $b_K(s) < b_L(s)$ в силу возрастания K на $[b, b^*]$. Аналогично, в силу убывания K на $[c^*, c]$ получаем, что $c_K(s) > c_L(s)$. Следовательно, $m_K(s) > m_L(s)$.

Если $q > q^*$, то рассмотрим горизонтальную хорду длины $m_L(s)$, соединяющую точки графика K , и обозначим абсциссы ее концов через $\beta_L(s)$ и $\gamma_L(s)$, так что $\beta_L(s) < \gamma_L(s)$. Тогда

$$\gamma_L(s) - \beta_L(s) = m_L(s), \quad K(\gamma_L(s)) = K(\beta_L(s)).$$

Такая хорда найдется по теореме о промежуточном значении, но может быть не единственна, если график K содержит горизонтальный участок.

Обозначим через x^* точку максимума L , а для $x \in (b_L(s), c_L(s))$ положим $u = x - b_L(s) + \beta_L(s)$; тогда $u \in (\beta_L(s), \gamma_L(s))$. В силу выпуклости K при всех $x \in (b_L(s), x^*]$

$$\frac{L(x) - L(b_L(s))}{x - b_L(s)} = \frac{L(b^*) - L(b)}{b^* - b} = \frac{K(b^*) - K(b)}{b^* - b} > \frac{K(u) - K(\beta_L(s))}{u - \beta_L(s)},$$

а при всех $x \in [x^*, c_L(s))$

$$\frac{L(x) - L(c_L(s))}{x - c_L(s)} = \frac{L(c^*) - L(c)}{c^* - c} = \frac{K(c^*) - K(c)}{c^* - c} > \frac{K(u) - K(\gamma_L(s))}{u - \gamma_L(s)}.$$

В обоих случаях $K(u) - K(\beta_L(s)) < L(x) - L(b_L(s))$. Интегрируя, получаем

$$1 - s = \int_{b_L(s)}^{c_L(s)} (L(x) - L(b_L(s))) dx > \int_{\beta_L(s)}^{\gamma_L(s)} (K(u) - K(\beta_L(s))) du = 1 - \varphi_K(K(\beta_L(s))).$$

Отсюда находим

$$\varphi_K(K(\beta_L(s))) > s, \quad K(\beta_L(s)) > \varphi_K^{-1}(s) = K(b_K(s)) = K(c_K(s)).$$

Поскольку точки $b_K(s)$ и $c_K(s)$ расположены по разные стороны от точки (или промежутка) максимума K , верны неравенства $\beta_L(s) > b_K(s)$, $\gamma_L(s) < c_K(s)$, откуда $m_K(s) > m_L(s)$.

Сопоставляя лемму 1.4, теорему 2.1 и леммы 2.1 и 2.2, приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $0 < a \leq b < h$, $2a \leq h - b$, $K \in C([-h, h] \setminus \{0\}) \cap L[-h, h]$, K четна, $K > 0$ на $(0, a)$, $K < 0$ на (b, h) , $K = 0$ на $[a, b]$, $K(h) = 0$, K выпукла вниз на $(0, a]$ и на $[b, h]$, $\int_0^h K = 0$, функция f ограничена и измерима на $[-h, h]$. Тогда

$$\left| \int_{-h}^h f K \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^h |K| \cdot \omega_2(f, h).$$

3. Оценки свертков. Результаты предыдущих пунктов автоматически распространяются на оценки полунорм свертков

$$\varphi * K(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x - t) K(t) dt$$

в пространствах класса $\mathcal{B}$, который определяется далее. Для их доказательства надо применить тождества к функции $f(t) = \varphi(x - t)$, а затем внести полунорму под знак интеграла. При этом надо учесть, что $\delta_u^2 f(t) = \delta_u^2 \varphi(x - t)$.

Далее $UCB(\mathbb{R})$ – пространство равномерно непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с равномерной нормой, пространства $L_p(\mathbb{R})$, $W_{p, \text{loc}}^{(s)}(\mathbb{R})$ и пространства 2π -периодических функций C , L_p , $W_p^{(s)}$ определяются стандартно. Индекс p у величины указывает на норму в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ или L_p . Пусть $\mathfrak{M}$ – замкнутое подпространство пространства $L_p(\mathbb{R})$ при $p \in [1, +\infty)$ или пространства $UCB(\mathbb{R})$ при $p = +\infty$, P – полунорма, заданная на $\mathfrak{M}$, и выполняются следующие условия:

- 1) пространство $(\mathfrak{M}, P)$ инвариантно относительно сдвига, т.е. для любых $f \in \mathfrak{M}$ и $h \in \mathbb{R}$ будет $f(\cdot + h) \in \mathfrak{M}$ и $P(f(\cdot + h)) = P(f)$;
- 2) существует такая постоянная B , что $P(f) \leq B \|f\|_p$ для всех $f \in \mathfrak{M}$.

Тогда будем говорить, что пространство $(\mathfrak{M}, P)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$. Примерами пространств класса $\mathcal{B}$ являются: $(UCB(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $(L_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ при $p \in [1, +\infty)$, пространства периодических функций $(C, \|\cdot\|_p)$ при $p \in [1, +\infty]$, а также более общие пространства равномерно непрерывных почти-периодических функций, показатели

которых принадлежат фиксированному множеству, с различными нормами. При $s \in \mathbb{N}$ полагаем

$$\mathfrak{M}^{(s)} = \{f \in W_{1,\text{loc}}^{(s)}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{M} : f^{(s)} \in \mathfrak{M}\}.$$

Далее, $A_\sigma(f)_P$ и $A_{\sigma-0}(f)_P$ – наилучшие приближения функции f множествами $\mathbf{E}_\sigma$ и $\mathbf{E}_{\sigma-0}$ целых функций степени не больше (меньше) $\sigma > 0$;

$$\omega_2(f, h)_P = \sup_{0 \leq t \leq h} P(\delta_t^2 f)$$

– второй модуль непрерывности функции $f \in \mathfrak{M}$ относительно полунормы P .

ЛЕММА 3.1. Пусть $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $K \in L(\mathbb{R})$, $\text{supp } K \subset [-h, h]$, K четна, $\int_{-h}^h K = 0$, $\varphi \in \mathfrak{M}$. Тогда

$$P(\varphi * K) \leq \int_0^h |K| \cdot \omega_2(\varphi, h)_P dt.$$

Лемма 3.1 очевидна и содержится в [2]. Для полноты изложения дадим ее доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$f * K = \int_0^h \delta_t^2 \varphi K(t) dt,$$

откуда и вытекает требуемое.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В случае равномерной нормы при каждом $\tau \geq 2h$ лемма 1.2 сохраняет силу, даже если ограничиться функциями с периодом τ . Замечание 1.1 для равномерной нормы сохраняет силу, если τ достаточно велико по сравнению с h .

ЛЕММА 3.2. Пусть $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $0 < a \leq b < c < +\infty$, $2a \leq c - b$,

$$K(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |t| < a, \\ -\frac{1}{2(c-b)}, & b < |t| < c, \\ 0, & a < |t| < b \text{ или } |t| > c, \end{cases} \quad (5)$$

$\varphi \in \mathfrak{M}$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi * K(x) = & -\frac{c-b-2a}{4a(c-b-a)} \int_{-a}^a \delta_{((c-b-a)/a)|t|+b}^2 \varphi(x-t) dt \\ & - \frac{1}{4(c-b-a)} \int_{-a}^a \delta_{c-a}^2 \varphi(x-t) dt, \end{aligned} \quad (6)$$

и

$$P(\varphi * K) \leq \frac{1}{2} \omega_2(\varphi, c)_P. \quad (7)$$

ЛЕММА 3.3. Пусть $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $h > 0$, $\Gamma \in L([0, 1] \times [-h, h])$; при почти всех $s \in [0, 1]$ функция $K_s(\cdot) = \Gamma(s, \cdot)$ выражается равенством (5) с заменой a, b, c на a_s, b_s, c_s , причем

$$0 < a_s \leq b_s < c_s \leq h, \quad 2a_s \leq c_s - b_s, \quad a_s \leq b_t \quad \text{при почти всех } s, t \in [0, 1],$$

$K = \int_0^1 K_s ds, \varphi \in \mathfrak{M}$. Тогда

$$P(\varphi * K) \leq \frac{1}{2} \omega_2(\varphi, h)_P.$$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $0 < a \leq b < h$, $K \in L(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, K четна, $K > 0$ на $(0, a)$, $K < 0$ на (b, h) , $K = 0$ на $[a, b]$ и на $[h, +\infty)$, K выпукла вниз на $(0, a]$ и на $[b, h]$, $\int_0^h K = 0$, $\varphi \in \mathfrak{M}$. Тогда

$$P(\varphi * K) \leq \frac{1}{2} \int_0^h |K| \cdot \omega_2(\varphi, h)_P.$$

Доказательства лемм 3.2 и 3.3 и теоремы 3.1 не требуют новых пояснений.

4. Неравенства типа Джексона. В этом пункте оценки свертки применяются к неравенствам типа Джексона, а именно, к оценкам приближений целыми функциями конечной степени (в частности, тригонометрическими многочленами) и сплайнами через второй модуль непрерывности производных приближаемой функции. Различные способы получения таких неравенств содержатся, в частности, в статье [3] и монографиях [4; с. 253, п. 105] и [5; главы 3 и 7]. В работе [2] был предложен новый способ получения этих неравенств. Там же авторы перечислили предшествующие результаты и установили, что полученные ими константы меньше ранее известных. Уточним результаты из [2], касающиеся второй производной.

При $r \in \mathbb{N}$ положим

$$\psi_{2r}(u) = -\frac{B_{2r}(u)}{(2r)!}(1-u) - 2r \frac{B_{2r+1}(u)}{(2r+1)!}, \quad u \in [0, 1],$$

и

$$K_{h,2r}(t) = 2\pi h^{2r-1} \psi_{2r}\left(\frac{t}{h}\right), \quad t \in [0, h].$$

Здесь B_n — многочлены Бернулли, которые определяются соотношениями $B_0 = 1$, $B'_n = nB_{n-1}$, $\int_0^1 B_n = 0$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\int_0^h K_{h,2r} = 0, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^h |K_{h,2r}| = h^{2r} \int_0^1 |\psi_{2r}|.$$

Продолжим $K_{h,2r}$ четно на $[-h, 0]$ и нулем на $\mathbb{R} \setminus [-h, h]$.

В работе [2] при $r \in \mathbb{N}$, $h > 0$ рассматривались свертки с ядрами $K_{h,2r}$. Ядро $K_{h,2r}$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1 при $r = 1$. В самом деле, функция

$$-\psi_2(u) = \frac{1}{12}(1-u)(1-4u+2u^2)$$

имеет на $(0, 1)$ единственную точку перемены знака $x_1^* = 1 - 1/\sqrt{2} < 1/3$ и выпукла вниз. При этом $\int_0^1 |\psi_2| = 1/48$.

Можно показать, что при $r \geq 2$ точка перемены знака функции ψ_{2r} больше $1/3$, так что теорему 3.1 применить не удастся.

Уточнение при $r = 1$ состоит в оценке остаточного члена, который с точностью до нормирующего множителя представляет собой свертку f'' с ядром $K_{h,2}$ с помощью

теоремы 3.1. В [2] остаточный член оценивался по лемме 3.1, т.е. с константой, в два раза большей. Все остальные детали доказательств остаются без изменений, поэтому повторять их нет необходимости.

Множество полуаддитивных функционалов $\Phi: \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty)$, т.е. таких, что

$$\Phi(f + g) \leq \Phi(f) + \Phi(g) \quad \text{для всех } f, g \in \mathfrak{M},$$

обозначим через $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$. Величины

$$m_s(\Phi)_P = \sup_{f \in \mathfrak{M}^{(s)}} \frac{\Phi(f)}{P(f^{(s)})}$$

называются *моментами* функционала Φ относительно полунормы P .

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $h > 0$, $\Phi \in \mathcal{F}(\mathfrak{M})$, $m_{2k}(\Phi)_P < +\infty$ при всех $k \in \{0, 1, 2\}$, $f \in \mathfrak{M}^{(2)}$. Тогда

$$\Phi(f) \leq \left(\frac{h^2}{96} m_0(\Phi)_P + \frac{1}{12} m_2(\Phi)_P + \frac{1}{h^2} m_4(\Phi)_P \right) \omega_2(f'', h)_P.$$

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $\sigma, \gamma > 0$, $f \in \mathfrak{M}^{(2)}$. Тогда

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leq \frac{\pi^2}{\sigma^2} \left(\frac{\gamma^2}{96} + \frac{1}{96} + \frac{5}{384\gamma^2} \right) \omega_2 \left(f'', \frac{\gamma\pi}{\sigma} \right)_P.$$

В частности,

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leq \frac{13\pi^2}{384\sigma^2} \omega_2 \left(f'', \frac{\pi}{\sigma} \right)_P.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Справедлива более тонкая оценка, в которой модуль непрерывности берется относительно полунормы $A_{\sigma-0}(\cdot)_P$. Для доказательства надо воспользоваться неравенствами (6) из [2]. Аналогичное утверждение выполняется, когда в обеих частях участвует полунорма $A_\sigma(\cdot)_P$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Оценка в теореме 4.2 реализуется с помощью линейного оператора свертки $\mathcal{U}_{\sigma, \gamma\pi/\sigma, 2}$ со значениями в $\mathbf{E}_\sigma$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Неравенства теорем 4.1, 4.2 и замечания 4.2 стандартным образом (например, с помощью интегралов Фейера) переносятся с множеств непрерывных функций на множества $L_\infty(\mathbb{R})$ и L_p , $1 \leq p \leq +\infty$, с полунормами $\|\cdot\|_p$, $\omega_m(\cdot, u)_p$, $A_\sigma(\cdot)_p$, $A_{\sigma-0}(\cdot)_p$. Как частные случаи при $\sigma \in \mathbb{N}$ получаются оценки приближений периодических функций тригонометрическими многочленами степени меньше σ .

Далее при $n \in \mathbb{N}$ через $\mathbf{S}_{2n, \mu}$ обозначается $2n$ -мерное пространство 2π -периодических сплайнов порядка $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ дефекта 1 по равномерному разбиению $k\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$, $E_{n, \mu}$ – наилучшее приближение пространством $\mathbf{S}_{2n, \mu}$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $p \in [1, +\infty]$, $\gamma > 0$, $n, \mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geq 3$, $f \in W_p^{(2)}$. Тогда

$$E_{n, \mu}(f)_p \leq \frac{\pi^2}{n^2} \left(\frac{\gamma^2}{96} + \frac{1}{96} + \frac{5}{384\gamma^2} \right) \omega_2 \left(f'', \frac{\gamma\pi}{n} \right)_p.$$

В частности,

$$E_{n, \mu}(f)_p \leq \frac{13\pi^2}{384n^2} \omega_2 \left(f'', \frac{\pi}{n} \right)_p.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Оценка реализуется с помощью построенного в [2] линейного оператора $\mathcal{Y}_{n,\gamma\pi/n,2,\mu}$ со значениями в $\mathbf{S}_{2n,\mu}$. Если $\mu \geq 4$, то оператор $\mathcal{Y}_{n,\gamma\pi/n,2,\mu}$ действует в $(2n-1)$ -мерное подпространство пространства $\mathbf{S}_{2n,\mu}$, состоящее из сплайнов вида

$$s(t) = \beta + \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j d_{\mu+1}\left(t - \frac{j\pi}{n}\right), \quad \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j = \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \beta_j = 0,$$

где

$$d_{\mu+1}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{ikt}}{(ik)^{\mu+1}}$$

– ядро Бернулли порядка $\mu + 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Для сравнения укажем, что последние неравенства теорем 4.2 и 4.3 установлены в [2] с константой $17/384$ вместо $13/384$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука, М., 1974.
- [2] О. Л. Виноградов, В. В. Жук, “Оценки функционалов через второй модуль непрерывности четных производных”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*, 41, Зап. научн. сем. ПОМИ, **416**, ПОМИ, СПб., 2013, 70–90.
- [3] С. Б. Стечкин, “О порядке наилучших приближений непрерывных функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **15**:3 (1951), 219–242.
- [4] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, М., 1965.
- [5] В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций*, Изд-во ЛГУ, Л., 1982.

О. Л. Виноградов

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: olvin@math.spbu.ru

Поступило

23.04.2013

Исправленный вариант

09.07.2013