Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, О. Ю. Шведов, Об асимптотике матрицы
плотности системы большого числа тождественных частиц,
Матем. заметки, 1999, том 65, выпуск 1, 84–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1031>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 16:21:05

УДК 519

ОБ АСИМПТОТИКЕ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ СИСТЕМЫ БОЛЬШОГО ЧИСЛА ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. П. Маслов, О. Ю. Шведов

Рассматривается уравнение Вигнера для системы большого числа N тождественных частиц, коэффициент взаимодействия между которыми порядка $1/N$. Как в бозонном, так и в фермионном случаях строится асимптотика решения задачи Коши для этого уравнения с учетом обменных эффектов в случае, если постоянная Планка порядка $N^{-1/d}$, где d – размерность пространства. Данная асимптотика интерпретируется в терминах теории комплексного роста на искривленном фазовом пространстве, которое эквивалентно пространству функций со значениями на римановой сфере в ферми-случае и на плоскости Лобачевского в бозе-случае. Классические уравнения движения в обоих случаях сводятся к уравнению Власова, однако из-за бесконечномерности фазового пространства на комплексный росток накладываются дополнительные условия, зависящие от типа статистики.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. В работе [1] рассмотрено построение при $N \rightarrow \infty$ приближенных решений уравнения Вигнера

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}_N^t = [\hat{H}_N, \hat{\rho}_N^t] \quad (1)$$

для зависящего от вещественного параметра t эрмитова положительно определенного оператора $\hat{\rho}_N^t$ со сходящимся следом, действующего в пространстве $L^2(\mathbb{R}^{dN})$, $d \in \mathbb{N}$, функций N аргументов $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$. Оператор $\hat{H}_N$, входящий в уравнение (1), имеет вид

$$\hat{H}_N = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + U(x_i) \right) + \varepsilon \sum_{1 \leq i < j \leq N} V(x_i, x_j),$$

где $\varepsilon = O(1/N)$, U и V – гладкие функции, $x_i \in \mathbb{R}^d$. Под асимптотикой оператора $\hat{\rho}_N^t$, $\text{Tr} \hat{\rho}_N^t = 1$, в [1] подразумевается оператор $\hat{\rho}_N^{t, \text{as}}$, аппроксимирующий оператор $\hat{\rho}_N^t$:

$$\|\hat{\rho}_N^{t, \text{as}} - \hat{\rho}_N^t\|_1 \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad \|\hat{\rho}_N^t\| = 1, \quad (2)$$

по следующей норме в пространстве операторов со сходящимся следом в пространстве $L^2(\mathbb{R}^{dN})$:

$$\|\rho\|_1 = \sup_O \frac{|\text{Tr } O\rho|}{\|O\|},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01544.

где точная верхняя грань берется по всем ограниченным самосопряженным операторам O , а через $\|O\|$ обозначена операторная норма.

Данная постановка отвечает следующей физической задаче. Имеется система N частиц, находящихся во внешнем поле U и взаимодействующих между собой с потенциалом εV . Коэффициент ε , являющийся интенсивностью взаимодействия, обратно пропорционален числу частиц. Оператор $\hat{\rho}_N^t$ является матрицей плотности системы. Так как при $\text{Tr} \hat{\rho}_N = 1$ величина $\text{Tr} O_N \hat{\rho}_N$ является средним значением наблюдаемой O_N в состоянии с матрицей плотности $\hat{\rho}_N$, то требование (2) означает, что разность средних значений наблюдаемой O_N в состояниях $\hat{\rho}_N$ и $\hat{\rho}_N^{\text{ас}}$ стремится при $N \rightarrow \infty$ к 0, если наблюдаемые O_N ограничены равномерно по N .

Построенные в работе [1] с помощью теории комплексного роста [2] в пространстве Фока [3], [4] приближенные решения уравнения (1) имеют ядро $\rho_N^t(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N)$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}^d$, симметричное относительно перестановок пар аргументов (x_i, y_i) , но не обладающее, вообще говоря, свойствами симметрии относительно перестановок аргументов x_i и y_i по отдельности. В то же время, для матрицы плотности системы N тождественных частиц выполнены определенные свойства симметрии относительно перестановок отдельных аргументов. Ядро матрицы плотности для системы N бозонов симметрично отдельно по $x_1, \dots, x_N$ и отдельно по $y_1, \dots, y_N$, а для системы фермионов – антисимметрично.

Таким образом, построенные в [1] приближенные решения отвечают системе N различных частиц. В настоящей работе строятся приближенные решения уравнения (1) для систем бозонов и фермионов.

На первый взгляд, обобщение результатов [1] на случай системы тождественных частиц тривиально: достаточно симметризовать или антисимметризовать ядро матрицы плотности по $x_1, \dots, x_N$, так как уравнение Вигнера (1) инвариантно относительно такого преобразования. Однако, как показывается ниже, такой способ построения асимптотик решений уравнения Вигнера приводит, вообще говоря, к ошибочному результату. Это связано с тем, что формулы (2) для нормы $\|\cdot\|_1$ неинвариантны относительно симметризации или антисимметризации.

Задача о построении асимптотик решений уравнения (1) для системы тождественных частиц требует качественно нового метода, который и развивается в настоящей работе. Соответствующая асимптотика с учетом “обменных эффектов” строится при следующих соотношениях на параметры:

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad N = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \hbar^d = O(\varepsilon).$$

2. Матрица плотности системы тождественных частиц и вторичное квантование. Асимптотическую формулу для решения задачи Коши для уравнения (1) в случае тождественных частиц удобно строить в представлении вторичного квантования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1]. Эрмитов оператор $\hat{\Phi}_N^t$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^{dN})$ называется *полуплотностью*, отвечающей матрице плотности $\hat{\rho}_N^t$, если $\hat{\rho}_N^t = (\hat{\Phi}_N^t)^2$.

В работе [1] доказана

ЛЕММА 1. Пусть $\Phi_N^t(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N)$ и $\Phi_N^{t,as}(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N)$ – ядра полуплотностей $\widehat{\Phi}_N^t$ и $\widehat{\Phi}_N^{t,as}$, отвечающих плотностям $\hat{\rho}_N^t$ и $\hat{\rho}_N^{t,as}$ соответственно. Тогда из свойства

$$\|\Phi_N^{t,as} - \Phi_N^t\|_{L^2(\mathbb{R}^{2dN})} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad \|\Phi_N^t\|_{L^2(\mathbb{R}^{2dN})}^2 = 1, \quad (3)$$

вытекает свойство (2).

Таким образом, для построения приближенного решения уравнения (1) достаточно построить аппроксимацию для полуплотности по норме $L^2(\mathbb{R}^{2dN})$.

Рассмотрим построение асимптотик для системы тождественных частиц. Положим $\sigma = \pm 1$ в зависимости от типа статистики:

$$\sigma = \begin{cases} 1 & \text{в бозе-случае,} \\ -1 & \text{в ферми-случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим пространство функций $\Phi_N(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N)$ из $L^2(\mathbb{R}^{2dN})$, удовлетворяющих свойству симметрии относительно перестановок пар (x_i, y_i) и соотношению

$$\begin{aligned} & \Phi_N(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N) \\ &= \sigma \Phi_N(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N) \end{aligned}$$

как подпространство пространства Фока $\mathcal{F}_{xy}$, состоящего из наборов функций $\Phi = \{\Phi_{mn} \in L^2(\mathbb{R}^{d(m+n)}), m, n = 0, 1, 2, \dots\}$, каждая из которых удовлетворяет свойству симметрии:

$$\begin{aligned} & \Phi_{mn}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) \\ &= \sigma \Phi_{mn}(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n), \\ & \Phi_{mn}(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_{i-1}, y_j, y_{i+1}, \dots, y_{j-1}, y_i, y_{j+1}, \dots, y_n) \\ &= \sigma \Phi_{mn}(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Введем в пространстве Фока $\mathcal{F}_{xy}$ скалярное произведение

$$\begin{aligned} (\Phi, \Psi) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \int dx_1 \cdots dx_m dy_1 \cdots dy_n \Phi_{mn}^*(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) \\ &\quad \times \Psi_{mn}(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (4)$$

и операторы рождения и уничтожения $a^{\pm}(x)$, $b^{\pm}(y)$, $x, y \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} (a^-(x)\Phi)_{m-1,n}(x_1, \dots, x_{m-1}; y_1, \dots, y_n) &= \sqrt{m}\Phi_{mn}(x, x_1, \dots, x_{m-1}; y_1, \dots, y_n), \\ (a^+(x)\Phi)_{mn}(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) &= \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{k=1}^m \sigma^k \delta(x - x_k) \\ &\quad \times \Phi_{m-1,n}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n), \\ (b^-(y)\Phi)_{m,n-1}(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_{n-1}) &= \sqrt{n}\sigma^{m+n-1} \\ &\quad \times \Phi_{mn}(x_1, \dots, x_m; y, y_1, \dots, y_{n-1}), \end{aligned}$$

$$(b^+(y)\Phi)_{mn}(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \sigma^{m+n-1-j} \\ \times \Phi_{m,n-1}(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n) \delta(y - y_j).$$

Обозначим через $\Phi^{(0)}$ вакуумный вектор пространства Фока, компонента $\Phi_{00}^{(0)}$ которого равна 1, а остальные компоненты равны 0.

Согласно [5] введенные операторы удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям

$$\{a^\pm(x), a^\pm(y)\}_{-\sigma} = \{a^\pm(x), b^\pm(y)\}_{-\sigma} = \{a^\pm(x), b^\mp(y)\}_{-\sigma} = \{b^\pm(x), b^\pm(y)\}_{-\sigma} = 0, \\ \{a^-(x), a^+(y)\}_{-\sigma} = \{b^-(x), b^+(y)\}_{-\sigma} = \delta(x - y),$$

где через $\{A, B\}_\sigma = AB - \sigma BA$ обозначен коммутатор операторов A, B при $\sigma = 1$ и антикоммутатор при $\sigma = -1$. Напомним также представление [5] произвольного вектора пространства $\mathcal{F}_{xy}$ через вакуумный вектор и операторы рождения:

$$\Phi = \sum_{mn=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \int dx_1 \dots dx_m dy_1 \dots dy_n a^+(x_1) \dots a^+(x_m) b^+(y_n) \dots b^+(y_1) \\ \times \Phi_{mn}(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) \Phi^{(0)}.$$

Отождествим полуплотность Φ_N^t для системы тождественных частиц с вектором пространства Фока Φ^t , N -я компонента которого равна Φ_N^t , а остальные компоненты равны 0. Частным случаем полученных в [5] результатов является

ЛЕММА 2. Уравнение (1) равносильно следующему уравнению на $\Phi^t \in \mathcal{F}_{xy}$:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Phi^t = L \Phi^t, \quad (5)$$

где L – оператор в $\mathcal{F}_{xy}$ вида

$$L = \int dx a^+(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \right) a^-(x) + \frac{\varepsilon}{2} \int dx dy a^+(x) a^+(y) V(x, y) a^-(y) a^-(x) \\ - \int dx b^+(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \right) b^-(x) - \frac{\varepsilon}{2} \int dx dy b^+(x) b^+(y) V(x, y) b^-(y) b^-(x).$$

Для доказательства леммы 2 достаточно заметить, что уравнение для полуплотности совпадает с уравнением для матрицы плотности (1), и представить через операторы рождения и уничтожения оператор в правой части уравнения (1) согласно [5]. Поскольку скалярное произведение в пространстве $\mathcal{F}_{xy}$ имеет вид (4), задача о построении аппроксимации для полуплотности в смысле (3) равносильна задаче о построении асимптотики решения уравнения (5) по норме пространства $\mathcal{F}_{xy}$ согласно [5].

3. Асимптотическая формула для матрицы плотности. Приведем асимптотическую формулу для решения уравнения (5). Пусть $\hat{\varphi}$ – оператор в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$, имеющий регулярный при $\hbar \rightarrow 0$ вейлевский символ $\varphi(p, q)$. Сопоставим ему оператор $U_{\hat{\varphi}}$ в пространстве $\mathcal{F}_{xy}$ вида

$$\begin{aligned} U_{\hat{\varphi}} &= (\det(1 - \sigma \hat{\varphi}^+ \hat{\varphi}))^{\sigma/2} : \exp W_{\hat{\varphi}} :, \\ W_{\hat{\varphi}} &= a^+ \hat{\varphi} b^+ + a^+ ((1 - \sigma \hat{\varphi}^+ \hat{\varphi})^{1/2} - 1) a^- \\ &\quad + b^+ ((1 - \sigma \hat{\varphi}^T \hat{\varphi}^*)^{1/2} - 1) b^- + b^- (1 - \sigma \hat{\varphi}^+ \hat{\varphi})^{1/2} \hat{\varphi}^+ (1 - \sigma \hat{\varphi} \hat{\varphi}^+)^{-1/2} a^-, \end{aligned} \quad (6)$$

где знак нормального упорядочивания $: \exp W_{\hat{\varphi}} :$ означает, что после разложения экспоненты $\exp W_{\hat{\varphi}}$ в ряд операторы рождения в формуле (6) расставлены слева от операторов уничтожения. Через $a^+ \hat{\varphi} b^+$ обозначено выражение вида

$$\int dx a^+(x) (\hat{\varphi} b^+)(x);$$

аналогичные обозначения приняты и для других слагаемых. Согласно [5] оператор (6) унитарен и однозначно определяется из соотношений

$$\begin{aligned} U_{\hat{\varphi}}^{-1} a^-(x) U_{\hat{\varphi}} &= (1 - \sigma \hat{\varphi} \hat{\varphi}^+)^{-1/2} a^-(x) + \hat{\varphi} (1 - \sigma \hat{\varphi}^+ \hat{\varphi})^{-1/2} b^+(x), \\ U_{\hat{\varphi}}^{-1} b^-(x) U_{\hat{\varphi}} &= (1 - \sigma \hat{\varphi}^T \hat{\varphi}^*)^{-1/2} b^-(x) + \sigma \hat{\varphi}^T (1 - \sigma \hat{\varphi}^* \hat{\varphi}^T)^{-1/2} a^+(x), \\ U_{\hat{\varphi}}^{-1} a^+(x) U_{\hat{\varphi}} &= (1 - \sigma \hat{\varphi}^* \hat{\varphi}^T)^{-1/2} a^+(x) + \hat{\varphi}^* (1 - \sigma \hat{\varphi}^T \hat{\varphi}^*)^{-1/2} b^-(x), \\ U_{\hat{\varphi}}^{-1} b^+(x) U_{\hat{\varphi}} &= (1 - \sigma \hat{\varphi}^+ \hat{\varphi})^{-1/2} b^+(x) + \sigma \hat{\varphi}^+ (1 - \sigma \hat{\varphi} \hat{\varphi}^+)^{-1/2} a^-(x) \end{aligned} \quad (7)$$

и свойства $(\Phi^{(0)}, U_{\hat{\varphi}} \Phi^{(0)})$. Через $\hat{\varphi}^T$ обозначен оператор, транспонированный $\hat{\varphi}$, через $\hat{\varphi}^*$ – комплексно сопряженный к $\hat{\varphi}$ оператор, через $\hat{\varphi}^+ = (\hat{\varphi}^*)^T$ – эрмитово сопряженный к $\hat{\varphi}$ оператор.

Рассмотрим решение уравнения (5), удовлетворяющее начальному условию вида

$$\begin{aligned} \Phi^{\varphi^0, M^0} &= U_{\hat{\varphi}^0} (\det(1 - (M^0)^+ M^0))^{1/4} \sum_{n=0}^{n_0(\hbar)} \frac{1}{n!} \left(\frac{(2\pi\hbar)^d}{2} \int dx dy a^+(x) a^+(y) \right. \\ &\quad \times M^0 \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, y \right) b^+(y) b^+(x) \Big)^n \Phi^{(0)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\hat{\varphi}^0$ – эрмитов оператор в $L^2(\mathbb{R}^d)$, $(\hat{\varphi}^0)^+ = \hat{\varphi}^0$, а $M^0(p_1, q_1, p_2, q_2)$ – ядро действующего в $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ оператора Гильберта–Шмидта M^0 с нормой меньше 1. В формуле (8) принято вейлевское [6] упорядочивание операторов

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, y.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $M^0 = 0$, то N -я компонента вектора (8) пропорциональна симметризованному либо антисимметризованному произведению одночастичных полуплотностей.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Норма вектора (8) стремится к 1 при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\hbar^d = O(\varepsilon)$.

Оказывается, что решение задачи Коши для уравнения (5) также представляется в виде (8). Пусть $\hat{\varphi}^t$ – решение задачи Коши для уравнения вида

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\varphi}^t}{\partial t} = [H[\hat{n}^t], \hat{\varphi}^t], \quad (9)$$

где через $H[\hat{n}]$ обозначен оператор в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$ вида

$$H[\hat{n}] = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) + \frac{\varepsilon}{(2\pi\hbar)^d} \int V(x, y) n(p, y) dp dy,$$

а $n(p, y)$ – вейлевский символ оператора $n = \hat{\varphi}^2(1 - \sigma\hat{\varphi}^2)^{-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнение (9) равносильно уравнению Хартри–Вигнера

$$i\hbar \frac{\partial \hat{n}^t}{\partial t} = [H[\hat{n}^t], \hat{n}^t], \quad (10)$$

которое в главном порядке по $\hbar$ совпадает с уравнением Власова. Величина $\hat{n}$ играет роль плотности частиц. Обозначим через W функцию

$$W(x) = U(x) + \frac{\varepsilon}{(2\pi\hbar)^d} \int V(x, y) n(p, y) dp dy,$$

играющую роль самосогласованного потенциала.

Рассмотрим решение задачи Коши для уравнения вида

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial W}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} - p_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial W}{\partial q_2} \frac{\partial}{\partial p_2} - p_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \right) M^t(p_1, q_1, p_2, q_2) \\ &= - \int dp'_1 dq'_1 dp'_2 dq'_2 M^t(p_1, q_1, p'_1, q'_1) M^t(p_2, q_2, p'_2, q'_2) \frac{1}{1 - \sigma\varphi^2(p'_1, q'_1)} \frac{1}{1 - \sigma\varphi^2(p'_2, q'_2)} \\ & \quad \times \left(\frac{\partial V(q'_1, q'_2)}{\partial q'_1} \frac{\partial}{\partial p'_1} + \frac{\partial V(q'_1, q'_2)}{\partial q'_2} \frac{\partial}{\partial p'_2} \right) \varphi(p'_1, q'_1) \varphi(p'_2, q'_2) \\ &+ \frac{1}{1 - \sigma\varphi^2(p_1, q_1)} \frac{1}{1 - \sigma\varphi^2(p_2, q_2)} \left(\frac{\partial V(q_1, q_2)}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial V(q_1, q_2)}{\partial q_2} \frac{\partial}{\partial p_2} \right) \varphi(p_1, q_1) \varphi(p_2, q_2) \\ &+ \int dp'_1 dq'_1 \left(\frac{1}{1 - \sigma\varphi^2(p_1, q_1)} \frac{1}{1 - \sigma\varphi^2(p'_1, q'_1)} \left(\frac{\partial V(q_1, q'_1)}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\partial V(q_1, q'_1)}{\partial q'_1} \frac{\partial}{\partial p'_1} \right) \right. \\ & \quad \times \varphi(p_1, q_1) \varphi(p'_1, q'_1) \Big) M^t(p'_1, q'_1, p_2, q_2) \\ &+ \int dp'_2 dq'_2 \left(\frac{1}{1 - \sigma\varphi^2(p_2, q_2)} \frac{1}{1 - \sigma\varphi^2(p'_2, q'_2)} \left(\frac{\partial V(q_2, q'_2)}{\partial q_2} \frac{\partial}{\partial p_2} - \frac{\partial V(q_2, q'_2)}{\partial q'_2} \frac{\partial}{\partial p'_2} \right) \right. \\ & \quad \times \varphi(p_2, q_2) \varphi(p'_2, q'_2) \Big) M^t(p'_2, q'_2, p_1, q_1). \end{aligned} \quad (11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в уравнении (11) положить формально $\sigma = 0$, то оно перейдет в уравнение типа Риккати, возникающее при построении асимптотик решений многочастичного уравнения Лиувилля [7].

ТЕОРЕМА 1. *Выполнены соотношения*

$$\|\Phi^t - \Phi^{\varphi^t, M^t}\| \rightarrow 0, \quad \hbar \rightarrow 0, \quad \varepsilon = \alpha(2\pi\hbar)^d, \quad \|\Phi^t\| \rightarrow 1, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (12)$$

Таким образом, построена асимптотика решения уравнения (5). Как мы увидим ниже, среднее число частиц порядка $1/\varepsilon$:

$$\frac{1}{(\Phi^t, \Phi^t)} \left(\Phi^t, \int dx a^+(x) a^-(x) \Phi^t \right) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int dp dq n(p, q) + O(1).$$

Оказывается, что свойство (12) справедливо и для N -х компонент точной и асимптотической полуплотности, если

$$N(2\pi\hbar)^d = \int dp dq n(p, q) + O(\varepsilon).$$

ТЕОРЕМА 2. *Выполнено свойство*

$$\left\| \frac{\Phi_N^t}{\|\Phi_N^t\|} - \frac{\Phi_N^{\varphi^t, M^t}}{\|\Phi_N^t\|} \right\| \rightarrow 0, \quad \hbar \rightarrow 0, \quad \varepsilon = \alpha(2\pi\hbar)^d.$$

Из теоремы 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Пусть ρ_N^t – решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$\rho_N^0 = \frac{(\Phi_N^0)^2}{\|\Phi_N^0\|^2}.$$

Тогда для

$$\rho_{N, \text{as}}^t = \frac{(\Phi_N^{\varphi^t, M^t})^2}{\|\Phi_N^t\|^2}$$

справедливо свойство (2).

Доказательства теорем 1 и 2 приводятся ниже.

Уравнение (11) можно привести к более простому виду. Рассмотрим оператор B^t , связанный с M^t соотношением

$$M^t = (1 + \varphi^t B^t \varphi^t)^{-1} (1 - \varphi^t B^t \varphi^t),$$

через $\varphi^t B^t \varphi^t$ обозначен оператор в $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ с ядром $\varphi^t(p_1, q_1) B^t(p_1, q_1, p_2, q_2) \varphi^t(p_2, q_2)$. Ядро оператора B^t удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} B^t(p_1, q_1, p_2, q_2) &= \left(\frac{\partial W}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} - p_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial W}{\partial q_2} \frac{\partial}{\partial p_2} - p_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \right) B^t(p_1, q_1, p_2, q_2) \\ &\quad - \int dp'_1 dq'_1 \frac{\partial n(p'_1, q'_1)}{\partial p'_1} \frac{\partial V(q_1, q'_1)}{\partial q'_1} B^t(p'_1, q'_1, p_2, q_2) \\ &\quad - \int dp'_2 dq'_2 \frac{\partial n(p'_2, q'_2)}{\partial p'_2} \frac{\partial V(q_2, q'_2)}{\partial q'_2} B^t(p_1, q_1, p'_2, q'_2). \end{aligned} \quad (13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнения (10), (13) на $n^t(p, q)$ и $B^t(p_1, q_1, p_2, q_2)$ не зависят от типа статистики и совпадают с аналогичными уравнениями для классической статистики [7]. Поэтому может сложиться впечатление, что тождественность частиц не сказывается при построении асимптотики. Однако, условие квадратичной интегрируемости функции

$$\frac{n(p_1, q_1)}{1 + \sigma n(p_1, q_1)} B^t(p_1, q_1, p_2, q_2) \frac{n(p_2, q_2)}{1 + \sigma n(p_2, q_2)} - \delta(p_1 - p_2) \delta(q_1 - q_2),$$

которое накладывается на B^t в силу условия $\text{Tr } M^+ M < \infty$, зависит от типа статистики. Таким образом, одному классу решений уравнения (12) отвечают приближенные решения бозонного уравнения Вигнера, другому классу решений уравнения (12) – асимптотики в фермионном случае.

4. Пример стационарного асимптотического решения уравнения Вигнера. Приведем пример решений уравнений (10) и (11). Рассмотрим не зависящий от t оператор $\hat{\varphi}$ вида

$$\hat{\varphi} = \exp \left(-\frac{1}{2\theta} \left(-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + W(x) - \mu \right) \right), \quad (14)$$

где θ и μ – вещественные параметры, а W – гладкая функция. Оператор (14) удовлетворяет уравнению (9), если

$$W(x) = U(x) + \alpha \int V(x, y) n(p, y) dp dy,$$

где $n(p, y)$ – вейлевский символ оператора

$$\hat{n} = \left(\exp \left(\frac{1}{\theta} \left(-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + W(x) - \mu \right) \right) - \sigma \right)^{-1},$$

который в главном порядке по $\hbar$ имеет вид

$$n(p, y) = \left(\exp \left(\frac{1}{\theta} \left(-\frac{p^2}{2} + W(x) - \mu \right) \right) - \sigma \right)^{-1} + O(\hbar).$$

Рассмотрим построение стационарного решения уравнения (11) в главном порядке по $\hbar$. Обозначим $f = \varphi / (1 - \sigma \varphi^2)$. Функция

$$M(p_1, q_1, p_2, q_2) = f(p_1, q_1) f(p_2, q_2) \widetilde{M}(q_1, q_2)$$

удовлетворяет уравнению (11), если

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\widetilde{M}(q_1, q_2) - \frac{\alpha}{2\theta} V(q_1, q_2) - \frac{\alpha}{2\theta} \int dp'_1 dq'_1 V(q_1, q'_1) f^2(p'_1, q'_1) \widetilde{M}(q'_1, q_2) \right) = 0. \quad (15)$$

Ядро оператора $M = -\mathcal{V}(1 + \mathcal{V})^{-1}$, где $\mathcal{V}$ – оператор с ядром

$$\mathcal{V}(p_1, q_1, p_2, q_2) = \frac{\alpha}{2\theta} f(p_1, q_1) V(q_1, q_2) f(p_2, q_2),$$

удовлетворяет соотношению (15).

Из теорем 1 и 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Для решения Φ^t уравнения (5), удовлетворяющего начальному условию

$$\Phi^0 = \Phi^{\hat{\varphi}^0, M^0}, \quad (16)$$

выполнено соотношение

$$\|\Phi^t - \Phi^0\| \rightarrow 0, \quad \hbar \rightarrow 0, \quad \varepsilon = \alpha(2\pi\hbar)^d, \quad t = \text{const}.$$

Таким образом, мы построили стационарные асимптотические решения уравнения для матрицы плотности. В [8] приведены соображения, показывающие, что формула (16) аппроксимирует большое каноническое распределение Гиббса.

5. Оценка нормы асимптотической формулы. Для доказательства асимптотической формулы для решения задачи Коши рассмотрим оценку нормы этой формулы сверху и снизу. Поскольку оператор U_φ унитарен, достаточно рассмотреть вектор пространства Фока вида

$$Y_M = \sum_{n=0}^{n_0(\hbar)} Y_M^{(n)}, \quad (17)$$

где

$$Y_M^{(n)} = \frac{(2\pi\hbar)^{dn}}{2^{n n!}} \left(\int dx dy a^+(x) a^+(y) M \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, y \right) b^+(y) b^+(x) \right)^n \Phi^{(0)}. \quad (18)$$

Поскольку квадрат нормы нулевой компоненты вектора (17) равен 1, справедлива оценка $\|Y_M\| \geq 1$. Для оценки нормы вектора (17) сверху рассмотрим n -ю компоненту этого вектора (18).

ЛЕММА 3. Для некоторых не зависящих от n положительных констант a, b, c выполнено соотношение

$$\|Y_M^{(n)}\|^2 \leq b e^{-cn} \sum_{k=0}^n k! a^k \hbar^{dk/2}. \quad (19)$$

Разобьем доказательство этой формулы на ряд последовательных утверждений.

Рассмотрим вспомогательное пространство Фока $\tilde{\mathcal{F}}$, состоящее из наборов комплексных функций $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots)$, каждая из которых $\varphi_n(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^d$, симметрична относительно перестановок пар аргументов (x_i, y_i) . В пространстве $\tilde{\mathcal{F}}$ введем норму

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^{2dn})}^2$$

и операторы рождения и уничтожения согласно [5]:

$$(A^-(x, y)\varphi)_{n-1}(x_1, y_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}) = \sqrt{n} \varphi_n(x, y, x_1, y_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}),$$

$$(A^+(x, y)\varphi)_n(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \delta(x - x_k) \delta(y - y_k)$$

$$\times \varphi_{n-1}(x_1, y_1, \dots, x_{k-1}, y_{k-1}, x_{k+1}, y_{k+1}, \dots, x_n, y_n).$$

Через $\tilde{\varphi}^{(0)}$ мы обозначаем вакуумный вектор пространства $\tilde{\mathcal{F}}$, нулевая компонента которого равна 1, а остальные – 0.

Рассмотрим оператор симметризации (или антисимметризации) $W: \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}_{xy}$, переводящий вектор пространства $\tilde{\mathcal{F}}$ с компонентами $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots)$ в вектор пространства Фока $\mathcal{F}_{xy}$ с компонентами вида

$$\Phi_{nn}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\alpha} \sigma^{P(\alpha)} \varphi_n(x_1, y_{\alpha_1}, \dots, x_n, y_{\alpha_n}) \quad (20)$$

и остальными компонентами, равными 0. В формуле (20) производится суммирование по всем перестановкам α чисел $1, \dots, n$, через $P(\alpha)$ обозначена четность перестановки.

Сопоставим [5] каждому полиномиальному функционалу функций α^* и α

$$\begin{aligned} F(\alpha^*, \alpha) &= \sum_{mn} \int d\xi_1 \cdots d\xi_m d\eta_1 \cdots d\eta_n \alpha^*(\xi_1) \cdots \alpha^*(\xi_m) \\ &\quad \times \alpha(\eta_1) \cdots \alpha(\eta_n) F^{mn}(\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n), \end{aligned} \quad (21)$$

где $\xi_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^{2d}$, $\eta_i = (x'_i, y'_i) \in \mathbb{R}^{2d}$, оператор в пространстве $\mathcal{F}_{xy}$ вида

$$\begin{aligned} : F(A^+, A^-) : &= \sum_{mn} \int d\xi_1 \cdots d\xi_m d\eta_1 \cdots d\eta_n A^+(\xi_1) \cdots A^+(\xi_m) \\ &\quad \times A^-(\eta_1) \cdots A^-(\eta_n) F^{mn}(\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n). \end{aligned} \quad (22)$$

Функционал (21) называется *нормальным символом* оператора (22) (см. [5]). Сопоставим функции $\alpha(x, y)$ оператор $\hat{\alpha}$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ с ядром $\alpha(x, y)$.

Пусть n -я компонента вектора $\varphi \in \tilde{\mathcal{F}}$ вещественна и отлична от 0, а остальные компоненты равны 0.

ЛЕММА 4. *Квадрат нормы вектора $W\varphi \in \mathcal{F}_{xy}$*

$$\|W\varphi\|^2 = \sum_{k=0}^n \sum_{2n_2+3n_3+\dots=k} \frac{\sigma^{n_2+n_4+n_6+\dots}}{2^{n_2} n_2! 3^{n_3} n_3! \dots} (\varphi, \widehat{W}_{n_2 \dots n_k} \varphi) \quad (23)$$

выражается через матричные элементы $(\varphi, \widehat{W}_{n_2 \dots n_k} \varphi)$ операторов $\widehat{W}_{n_2 \dots n_k}$ с нормальными символами

$$W_{n_2 \dots n_k}(\alpha^*, \alpha) = \prod_{l=2}^k (\text{Tr}(\alpha^* \alpha)^l)^{n_l}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формулы (20) квадрат нормы представляется в виде следующей суммы по перестановкам α, β :

$$\begin{aligned} \|W\varphi\|^2 &= \frac{1}{n!} \sum_{\alpha\beta} \sigma^{P(\alpha)+P(\beta)} \int dx_1 \cdots dx_n dy_1 \cdots dy_n \varphi_n(x_1, y_{\alpha_1}, \dots, x_n, y_{\alpha_n}) \\ &\quad \times \varphi_n(x_1, y_{\beta_1}, \dots, x_n, y_{\beta_n}). \end{aligned}$$

Рассматривая замену переменных $z_1 = y_{\alpha_1}, \dots, z_n = y_{\alpha_n}$ и обозначая перестановку $\beta\alpha^{-1}$ через γ , $\beta_i = \gamma_{\alpha_i}$, получаем

$$\|W\varphi\|^2 = \frac{1}{n!} \sum_{\alpha\gamma} \sigma^{P(\gamma)} \int dx_1 \cdots dx_n dz_1 \cdots dz_n \varphi_n(x_1, z_1, \dots, x_n, z_n) \\ \times \varphi_n(x_1, z_{\gamma_1}, \dots, x_n, z_{\gamma_n}).$$

Выражение, стоящее под знаком суммы, не зависит от α , поэтому суммирование

$$\frac{1}{n!} \sum_{\alpha\gamma}$$

можно заменить на $\sum_{\gamma}$. В силу свойства [5]

$$\varphi_n(x_1, z_1, \dots, x_n, z_n) \tilde{\varphi}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{n!}} A^-(x_1, z_1) \cdots A^-(x_n, z_n) \varphi$$

получаем

$$\|W\varphi\|^2 = \frac{1}{n!} \sum_{\gamma} \sigma^{P(\gamma)} \int dx_1 \cdots dx_n dz_1 \cdots dz_n \\ \times (\varphi, A^+(x_1, z_1) \cdots A^+(x_n, z_n) A^-(x_n, z_{\gamma_n}) \cdots A^-(x_1, z_{\gamma_1}) \varphi). \quad (24)$$

Известно (см., например, [9]), что любая перестановка распадается на произведение независимых циклов. Пусть перестановка γ содержит n_1 цикл длины 1, n_2 цикла длины 2, и т.д., причем $n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots = n$. Перестановки с заданными $(n_1, n_2, \dots)$ дают одинаковый вклад в сумму (24). Найдем количество таких перестановок: n чисел можно разбить на n_1 групп из одного числа, n_2 групп из двух чисел и т.д.

$$\frac{n!}{1^{n_1} (2!)^{n_2} (3!)^{n_3} \cdots} \frac{1}{n_1! n_2! n_3! \cdots}$$

способами. Существует $(n_k - 1)!$ способов циклической перестановки n_k чисел. Таким образом, число перестановок с заданными $(n_1, n_2, \dots)$ равно

$$\frac{n!}{n_1! 2^{n_2} n_2! 3^{n_3} n_3! \cdots}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что n_1 индексов, остающиеся инвариантными, равны $n - n_1 + 1, \dots, n$. Обозначая $k = n - n_1$, получаем

$$\|W\varphi\|^2 = \sum_{k=0}^n \sum_{2n_2+3n_3+\cdots=k} \frac{1}{2^{n_2} n_2! 3^{n_3} n_3! \cdots} \sigma^{P(\gamma)} \int dx_1 \cdots dx_k dz_1 \cdots dz_k \\ \times \left(\varphi, A^+(x_1, z_1) \cdots A^+(x_k, z_k) I_{n-k} \frac{1}{(n-k)!} A^-(x_k, z_{\gamma_k}) \cdots A^-(x_1, z_{\gamma_1}) \varphi \right), \quad (25)$$

где через I_{n-k} обозначен оператор

$$I_{n-k} = \int dx_{k+1} \cdots dx_n dz_{k+1} \cdots dz_n A^+(x_{k+1}, z_{k+1}) \cdots A^+(x_n, z_n) \\ \times A^-(x_n, z_n) \cdots A^-(x_{k+1}, z_{k+1}).$$

Поскольку при действии на $(n-k)$ -ю компоненту вектора пространства Фока оператор I_{n-k} умножает его на $(n-k)!$, а четность перестановки γ равна $n_2 + n_4 + \cdots$, формула (25) приводится к виду

$$\|W\varphi\|^2 = \sum_{k=0}^n \sum_{2n_2+3n_3+\cdots=k} \frac{1}{2^{n_2}n_2!3^{n_3}n_3!\cdots} \sigma^{n_2+n_4+\cdots} \int dx_1 \cdots dx_k dz_1 \cdots dz_k \\ \times (\varphi, A^+(x_1, z_1) \cdots A^+(x_k, z_k) A^-(x_k, z_{\gamma_k}) \cdots A^-(x_1, z_{\gamma_1}) \varphi). \quad (26)$$

Формула (26) совпадает с (23). Лемма 4 доказана.

Из леммы 4 вытекает формула для квадрата нормы вектора (18). Обозначим через ξ совокупность аргументов (x, y) , через $\widetilde{M}$ – оператор в пространстве $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ с ядром вида

$$\widetilde{M}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int dp_1 dp_2 M\left(p_1, \frac{x_1 + y_1}{2}, p_2, \frac{x_2 + y_2}{2}\right) \\ \times \exp\left(\frac{i}{\hbar}(p_1(x_1 - y_1) + p_2(x_2 - y_2))\right),$$

удовлетворяющий свойству $\|\widetilde{M}\| < 1$. Введем операторы

$$B_M^\pm(\xi) = (1 - \widetilde{M}^+ \widetilde{M})^{-1/2} A^\pm(\xi) + \widetilde{M}(1 - \widetilde{M}^+ \widetilde{M})^{-1/2} A^\mp(\xi). \quad (27)$$

ЛЕММА 5. Для любого $c > 0$ такого, что $e^{c/2} \|\widetilde{M}\| < 1$, справедливо соотношение

$$\|Y_M^{(n)}\|^2 = \frac{e^{-cn}}{2\pi \sqrt{\det(1 - e^c \widetilde{M}^2)}} \sum_{k=0}^n \sum_{2n_2+3n_3+\cdots=k} \frac{\sigma^{n_2+n_4+\cdots}}{2^{n_2}n_2!3^{n_3}n_3!\cdots} \int_0^{2\pi} d\zeta e^{-2i\zeta n} \\ \times \int dx_1 \cdots dx_k dz_1 \cdots dz_k (\widetilde{\varphi}^{(0)}, B_{Me^{c/2+i\zeta}}^+(x_1, z_1) \cdots B_{Me^{c/2+i\zeta}}^+(x_k, z_k) \\ \times B_{Me^{c/2+i\zeta}}^-(x_k, z_{\gamma_k}) \cdots B_{Me^{c/2+i\zeta}}^-(x_1, z_{\gamma_1}) \widetilde{\varphi}^{(0)}). \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как n -я компонента вектора Y_M может быть представлена в виде $Y_M^{(n)} = WP_n\varphi_M$, где P_n – оператор выделения n -й компоненты из вектора

$$\varphi_M = \exp\left(\frac{1}{2} \int d\xi d\eta \widetilde{M}(\xi, \eta) A^+(\xi) A^+(\eta)\right) \widetilde{\varphi}^{(0)},$$

то в соответствии с леммой 4 квадрат нормы $\|Y_M^{(n)}\|^2$ имеет вид (26) при $\varphi = P_n\varphi_M$. Матричный элемент $(P_n\varphi_M, \widehat{W}_{n_2 \dots n_k} P_n\varphi_M)$ может быть представлен в виде

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\zeta}{2\pi} e^{-cn} e^{-2i\zeta n} (P_n\varphi_{Me^{c/2+i\zeta}}, \widehat{W}_{n_2 \dots n_k} P_n\varphi_{Me^{c/2+i\zeta}}).$$

Согласно [5] вектор φ_M может быть выражен через оператор унитарного преобразования U_M , связывающего операторы $A^\pm(\xi)$ и $B^\pm(\xi)$,

$$U_M^+ A^\pm(\xi) U_M = B^\pm(\xi),$$

и вакуумный вектор $\tilde{\varphi}^{(0)}$,

$$\varphi_M = (\det(1 - M^+ M))^{-1/4} U_M \tilde{\varphi}^{(0)}.$$

Подставляя приведенные формулы в формулу (26), получаем утверждение леммы 5.

Для оценки матричного элемента, входящего в формулу (28), введем некоторые вспомогательные понятия.

Назовем вектор пространства Фока $\tilde{\mathcal{F}}$ с неотрицательными вещественными компонентами *неотрицательным*. Будем говорить, что оператор $B: \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ *неотрицателен*, $B \geq 0$, если он переводит любой неотрицательный вектор в неотрицательный. Введем на множестве операторов, действующих в $\tilde{\mathcal{F}}$, отношение частичного порядка: будем говорить, что $B_1 \geq B_2$, $B_1, B_2: \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$, если $B_1 - B_2 \geq 0$. Назовем модулем оператора B ,

$$(B\varphi)_m(\xi_1, \dots, \xi_m) = \sum_n \int d\eta_1 \cdots d\eta_n B_{mn}(\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n) \varphi_n(\eta_1, \dots, \eta_n),$$

оператор $|B|$ вида

$$(|B|\varphi)_m(\xi_1, \dots, \xi_m) = \sum_n \int d\eta_1 \cdots d\eta_n |B_{mn}(\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n)| \varphi_n(\eta_1, \dots, \eta_n).$$

Непосредственно из введенных определений вытекает

ЛЕММА 6. *Выполнены соотношения:*

- 1) $|B_1 B_2| \leq |B_1| |B_2|$; $|(\tilde{\varphi}^{(0)}, B \tilde{\varphi}^{(0)})| \leq (\tilde{\varphi}^{(0)}, |B| \tilde{\varphi}^{(0)})$;
- 2) *при* $|F| < G$

$$\left| \int d\eta F(\xi, \eta) A^\pm(\eta) \right| \leq \int d\eta G(\xi, \eta) A^\pm(\eta).$$

Получим оценку сверху для ядер операторов

$$(1 - e^c \widetilde{M}^2)^{-1/2} - 1, \quad e^{c/2} \widetilde{M} (1 - e^c \widetilde{M}^2)^{-1/2} e^{i\zeta}. \quad (29)$$

Пусть

$$\phi(x, y) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{d/2}} \chi\left(\frac{x-y}{\hbar}, \frac{x+y}{2}\right) > 0,$$

причем гладкая функция $1/\chi(\rho, z)$ растет при $\rho, z \rightarrow \infty$ не быстрее полинома.

ЛЕММА 7. *Для некоторой не зависящей от $\hbar$ константы ядра операторов (29) не превосходят $a_1 \phi(\xi) \phi(\eta)$, $\xi = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^{2d}$, $\eta = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^{2d}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме вложения Соболева (см, например, [10]) достаточно проверить, что ядра операторов

$$\frac{1}{\phi}((1 - e^c \widetilde{M}^2)^{-1/2} - 1) \frac{1}{\phi}, \quad \frac{1}{\phi} \widetilde{M} e^{c/2} e^{i\zeta} (1 - e^c \widetilde{M}^2)^{-1/2} \frac{1}{\phi}$$

принадлежат при любом k пространству $W_2^k(\mathbb{R}^{4d})$. Для этого проверим, что операторы

$$\begin{aligned} & (-\Delta + 1)^{k/2} \frac{1}{\phi} ((1 - e^c \widetilde{M}^2)^{-1/2} - 1) \frac{1}{\phi} (-\Delta + 1)^{k/2}, \\ & (-\Delta + 1)^{k/2} \frac{1}{\phi} \widetilde{M} (1 - e^c \widetilde{M}^2)^{-1/2} \frac{1}{\phi} (-\Delta + 1)^{k/2}, \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \rho = \frac{x - y}{\hbar}, \quad z = \frac{x + y}{2},$$

являются операторами Гильберта–Шмидта. Данное утверждение, в свою очередь, доказывается разложением выражения $(1 - e^c \widetilde{M})^{-1/2}$ в сходящийся по операторной норме степенной ряд и использованием соотношений типа

$$\|AB\|_2 \leq \|A\| \|B\|_2, \quad \|B\|_2 = \sqrt{\text{Tr } B^+ B}. \quad (30)$$

Лемма 7 доказана.

Используя леммы 6 и 7, получаем следствие из леммы 5.

СЛЕДСТВИЕ. *Справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \|Y_M^{(n)}\|^2 & \leq \frac{e^{-cn}}{\sqrt{\det(1 - e^c \widetilde{M}^2)}} \sum_{k=0}^n \sum_{2n_2+3n_3+\dots=k} \frac{1}{2^{n_2} n_2! 3^{n_3} n_3! \dots} \int dx_1 \dots dx_k dz_1 \dots dz_k \\ & \times (\widetilde{\varphi}^{(0)}, C^+(x_1, z_1) \dots C^+(x_k, z_k) C^-(x_k, z_{\gamma_k}) \dots C^-(x_1, z_{\gamma_1}) \widetilde{\varphi}^{(0)}), \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$C^\pm(\xi) = A^+(\xi) + a_1(A^+[\phi] + A^-[\phi])\phi(\xi), \quad A^\pm[\phi] = \int d\xi A^\pm(\xi)\phi(\xi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Так как операторы

$$\widetilde{A}^\pm(\xi) = A^\pm(\xi) - A^\pm[\phi]\phi(\xi) \left(\int d\xi |\phi(\xi)|^2 \right)^{-1/2}$$

коммутируют с операторами $A^\pm(\xi)$, а операторы уничтожения переводят вакуумный вектор в 0, операторы $C^\pm(\xi)$ в формуле (31) могут быть заменены на операторы вида

$$\widetilde{C}^\pm(\xi) = \phi(\xi) \left(A^\pm[\phi] \left(a_1 + \left(\int d\xi |\phi(\xi)|^2 \right)^{-1} \right) + A^\mp[\phi] a_1 \right).$$

Далее, если вектор $\psi \in \tilde{\mathcal{F}}$ содержит только s компонент, то $\|A^\pm[\phi]\psi\| \leq \sqrt{s}\|\phi\|\|\psi\|$. Используя данное соотношение, приходим к оценке

$$\|Y_M^{(n)}\|^2 \leq \frac{e^{-cn}}{\sqrt{\det(1 - e^c \widehat{M}^2)}} \sum_{k=0}^n \sum_{2n_2+3n_3+\dots=k} \frac{1}{2^{n_2}n_2!3^{n_3}n_3!\dots} \int dx_1 \dots dx_k dz_1 \dots dz_k \\ \times (\tilde{\varphi}^{(0)}, \phi(x_1, z_1) \dots \phi(x_k, z_k) \phi(x_k, z_{\gamma_k}) \dots \phi(x_1, z_{\gamma_1}) \tilde{\varphi}^{(0)}) (2(a_1 + \|\phi\|^{-2}))^{2k} k! \|\phi\|^{2k}.$$

Отсюда для некоторых a, b, c получаем

$$\|Y_M^{(n)}\|^2 \leq be^{-cn} \sum_{k=0}^n k! a_2^k \sum_{2n_2+3n_3+\dots=k} \frac{1}{2^{n_2}n_2!3^{n_3}n_3!\dots} (\text{Tr } \widehat{\phi}^4)^{n_2} (\text{Tr } \widehat{\phi}^6)^{n_3} \dots, \quad (32)$$

где $\widehat{\phi}$ – оператор в $L^2(\mathbb{R}^d)$ с ядром $\phi(x, y)$. Далее, $\text{Tr } \widehat{\phi}^{2n} \leq \|\widehat{\phi}\|^n \|\phi\|^n$. Поэтому выражение (32) не превосходит

$$be^{-cn} \sum_{k=0}^n (a_2 \|\phi\|)^k k! \|\widehat{\phi}\|^k \sum_{2n_2+3n_3+\dots=k} \frac{1}{2^{n_2}n_2!3^{n_3}n_3!\dots}.$$

Сумма по $n_2, n_3, \dots$ не превосходит 1, а $\|\widehat{\phi}\| = O(\hbar^{d/2})$. Отсюда получаем формулу (19). Лемма 3 доказана.

6. Оценка невязки. Для оценки невязки воспользуемся следующим вспомогательным утверждением. Переобозначим операторы рождения и уничтожения следующим образом:

$$c_1^\pm(x) = a^\pm(x), \quad c_2^\pm(x) = b^\pm(x).$$

Рассмотрим оператор в пространстве Фока:

$$\widehat{A} = \int dx_1 \dots dx_m dy_1 \dots dy_l \sum_{i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_l=1,2} A_{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_l}(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_l) \\ \times c_{i_1}^+(x_1) \dots c_{i_m}^+(x_m) c_{j_1}^-(y_1) \dots c_{j_l}^-(y_l),$$

содержащий m операторов рождения и l операторов уничтожения. Пусть $\mathcal{F}_n$ – подпространство $\mathcal{F}$, состоящее из всех векторов пространства Фока, все компоненты которых, кроме компонент с номерами $(k, n-k)$, обращаются в 0. Обозначим через $\widehat{A}^{(n, n+l-m)}$ оператор $\widehat{A}^{(n, n+l-m)}: \mathcal{F}_{n+l-m} \rightarrow \mathcal{F}_n$, совпадающий с оператором $\widehat{A}$ на $\mathcal{F}_{n+l-m}$. Пусть $A: L^2(\mathbb{R}^{dl}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{dm})$ – оператор с ядром $A_{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_l}(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_l)$.

ЛЕММА 8. Для нормы оператора $\widehat{A}^{(n, n+l-m)}$ справедлива оценка

$$\|\widehat{A}^{(n, n+l-m)}\| \leq (n+l)^{(l+m)/2} \|A\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты обозначений введем произвольный ортонормированный базис $\{\varphi_s, s = 1, 2, \dots\}$ в $L^2(\mathbb{R}^d)$; рассмотрим операторы

$$C_{2s+1}^{\pm} = \int dx a^{\pm}(x) \varphi_s(x), \quad C_{2s}^{\pm} = \int dx b^{\pm}(x) \varphi_s(x).$$

Оператор $\hat{A}$ может быть представлен в виде

$$\hat{A} = \sum_{I_1, \dots, I_m, J_1, \dots, J_l=1}^{\infty} C_{I_1}^{+} \dots C_{I_m}^{+} C_{J_1}^{-} \dots C_{J_l}^{-} A_{I_1 \dots I_m J_1 \dots J_l}.$$

Пусть $\Phi \in \mathcal{F}_{n+l-m}$, т.е.

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{(n+l-m)!}} \sum_{K_1, \dots, K_{n+l-m}} \varphi_{K_1 \dots K_{n+l-m}} C_{K_1}^{+} \dots C_{K_{n+l-m}}^{+} \Phi^{(0)}.$$

Квадрат нормы Φ имеет вид

$$\|\Phi\|^2 = \sum_{K_1, \dots, K_{n+l-m}} |\varphi_{K_1 \dots K_{n+l-m}}|^2.$$

Из определения операторов рождения и уничтожения вытекает оценка для квадрата нормы $\hat{A}\Phi$:

$$\begin{aligned} \|\hat{A}\Phi\|^2 &\leq n(n-1) \dots (n-m+1)(n-m+1) \dots (n-m+l) \\ &\times \sum_{I_1, \dots, I_m, K_1, \dots, K_{n-m}} \left| \sum_{J_1, \dots, J_l} A_{I_1 \dots I_m J_1 \dots J_l} \varphi_{J_1 \dots J_l K_1 \dots K_{n-m}} \right|^2. \end{aligned}$$

Из формул (30) вытекает, что

$$\|\hat{A}\Phi\| \leq (n+l)^{(m+l)/2} \|A\| \|\Phi\|.$$

Лемма 8 доказана.

Из леммы 8 вытекает следующее утверждение. Рассмотрим оператор вида

$$\hat{B} = (2\pi\hbar)^d : \int dx dy A_1(x) C_i^{+}(y) B\left(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, y, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}\right) C_j^{-}(y) A_2(x) :,$$

где функция $B(x, p_x, y, p_y)$ принадлежит пространству Шварца, i и j пробегает значения 1, 2, а каждый из операторов $A_1(x)$ и $A_2(x)$ является одним из четырех операторов $a^{\pm}(x)$, $b^{\pm}(x)$. Знак нормального упорядочивания означает, что операторы рождения расставлены слева от операторов уничтожения.

ЛЕММА 9. При $\xi \in \mathcal{F}_n$ и достаточно малых $\hbar$

$$\|\hat{B}\xi\| \leq b_1(n+3)^2 \hbar^{d/2} \|\xi\|$$

для некоторой не зависящей от $\hbar$ и n константы b_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда один из операторов A_1, A_2 является оператором рождения, а другой – оператором уничтожения. В этом случае согласно лемме 8 справедлива оценка

$$\|\widehat{B}\xi\| \leq b_2(n+3)^2(2\pi\hbar)^d\|\xi\|,$$

где через b_2 обозначена норма псевдодифференциального оператора

$$B\left(x, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, y, -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

с вейлевским символом из пространства Шварца. Покажем, что эта норма при достаточно малых $\hbar$ не превосходит $\max B + \delta$ для любого $\delta > 0$. Достаточно показать, что оператор $\Gamma = (\max B + \delta)^2 - B^+B$ является положительно определенным. Решая уравнение

$$\Gamma - \delta_1 = \widehat{B}_1^2, \quad \text{где } \widehat{B}_1 = \widehat{B}_1^+ = B_1\left(x, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, y, -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

относительно символа оператора B_1 по теории возмущений по $\hbar$ для некоторого $\delta_1 > 0$, получаем представление для Γ в виде суммы константы δ_1 , неотрицательно определенного оператора $B_1^+B_1$ и оператора $\hbar^dB_2$, норма которого не превосходит $\hbar^d\|B_2\|_2 = O(\hbar^{d/2})$: $\Gamma = \delta_1 + B_1^+B_1 + \hbar^dB_2$. Тем самым, $\Gamma > 0$ и $\|B\|$ ограничена равномерно по $\hbar$.

Рассмотрим теперь случай, когда операторы A_1 и A_2 оба являются операторами рождения или уничтожения. Ввиду инвариантности нормы относительно эрмитова сопряжения достаточно рассмотреть один из этих случаев, например, случай операторов рождения. Для оценки нормы оператора $\widehat{B}^{(31)}: \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_3$ рассмотрим оператор $(\widehat{B}^{(31)})^+ \widehat{B}^{(31)}$, представляющийся в виде произведения $(2\pi\hbar)^d$ на $\hbar$ -псевдодифференциальный оператор с регулярным при $\hbar \rightarrow 0$ вейлевским символом. Ввиду изложенного норма этого оператора порядка $O(\hbar^d)$. Отсюда вытекает утверждение леммы 9.

Перейдем теперь к подстановке вектора пространства Фюка (8) в уравнение (5) и оценке невязки. Для этого воспользуемся правилами коммутации (7), а также соотношением

$$\begin{aligned} U_{\widehat{\varphi}}^{-1} \frac{d}{dt} U_{\widehat{\varphi}} &= \frac{1}{2} \text{Tr}((1 - \sigma\widehat{\varphi}^+\widehat{\varphi})^{-1}(\dot{\widehat{\varphi}}^+\widehat{\varphi} - \widehat{\varphi}^+\dot{\widehat{\varphi}})) \\ &+ a^+((1 - \sigma\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}^+)^{-1/2}\dot{\widehat{\varphi}}(1 - \sigma\widehat{\varphi}^+\widehat{\varphi})^{-1/2})b^+ \\ &- b^-((1 - \sigma\widehat{\varphi}^+\widehat{\varphi})^{-1/2}\dot{\widehat{\varphi}}^+(1 - \sigma\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}^+)^{-1/2})a^- \\ &+ a^+((1 - \sigma\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}^+)^{-1/2}((1 - \sigma\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}^+)^{1/2}) \\ &+ \sigma(1 - \sigma\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}^+)^{-1/2}\dot{\widehat{\varphi}}\widehat{\varphi}^+(1 - \sigma\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}^+)^{-1/2})a^- \\ &+ b^+((1 - \sigma\widehat{\varphi}^T\widehat{\varphi}^*)^{-1/2}((1 - \sigma\widehat{\varphi}^T\widehat{\varphi}^*)^{1/2}) \\ &+ \sigma(1 - \sigma\widehat{\varphi}^T\widehat{\varphi}^*)^{-1/2}\dot{\widehat{\varphi}}^T\widehat{\varphi}^*(1 - \sigma\widehat{\varphi}^T\widehat{\varphi}^*)^{-1/2})b^-, \end{aligned}$$

где точкой обозначена производная по t .

Применяя данное коммутационное соотношение, получаем следующее утверждение. Введем обозначения

$$n_1 = \widehat{\varphi}(1 - \sigma\widehat{\varphi}^+\widehat{\varphi})^{-1}\widehat{\varphi}^+, \quad n_2 = \widehat{\varphi}^+(1 - \sigma\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}^+)^{-1}\widehat{\varphi},$$

$$\begin{aligned}
L^{(0)} &= -\frac{i}{2} \operatorname{Tr}((1 - \sigma \hat{\varphi}^+ \hat{\varphi})^{-1} (\dot{\hat{\varphi}}^+ \hat{\varphi} - \dot{\hat{\varphi}} \hat{\varphi}^+) + H^{(0)}, \\
H^{(0)} &= \frac{1}{\hbar} \left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int dp dq \left(\frac{p^2}{2} + U(q) \right) (n_1(p, q) - n_2(p, q)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\varepsilon}{2(2\pi\hbar)^d} \int dp dq dp' dq' V(q, q') (n_1(p, q) n_1(p', q') - n_2(p, q) n_2(p', q')) \right), \\
T_{1,2} &= -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) + \alpha \int V(x, \xi) n_{1,2}(p, \xi) dp d\xi, \\
L^{(1)} &= \frac{1}{\hbar} (a^+ (1 - \sigma \hat{\varphi} \hat{\varphi}^+)^{-1/2} (T_1 \hat{\varphi} - \hat{\varphi} T_2) (1 - \sigma \hat{\varphi}^+ \hat{\varphi})^{-1/2} b^+).
\end{aligned} \tag{33}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Справедливо соотношение*

$$\left(i \frac{d}{dt} - L \right) U_{\hat{\varphi}^t} g^t = U_{\hat{\varphi}^t} (-L^{(0)} - L^{(1)} - L^{(1)+}) g^t + O(1). \tag{34}$$

Таким образом, если числовая функция $L^{(0)}$ и оператор $L^{(1)}$ обращаются в 0, то невязка имеет порядок $O(1)$, а не $O(1/\varepsilon)$. При $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}^+$ условие $L^{(0)} = 0$ тривиально, а требование $L^{(1)} = 0$ равносильно уравнению Хартри–Вигнера (6).

Приведем явный вид слагаемого порядка $O(1)$ в формуле (34). Обозначим

$$H'_2 = \frac{1}{\hbar} (a^+ \tilde{T} a^- - b^+ \tilde{T} b^-),$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{T} &= (1 - \sigma \hat{\varphi}^2)^{-1/2} (T_1 - \sigma \hat{\varphi} T_1 \hat{\varphi}) (1 - \sigma \hat{\varphi}^2)^{-1/2}, \\
\mathcal{A}^-(p, q) &= \left(\frac{\hbar}{2\pi} \right)^{d/2} \int d\beta b^- \left(q - \frac{\hbar\beta}{2} \right) a^- \left(q - \frac{\hbar\beta}{2} \right) e^{-i\beta p}, \quad \mathcal{A}^+(p, q) = (\mathcal{A}^-(p, q))^+, \\
H''_2 &= i\alpha \left(\frac{1}{2} \int dp dq dp' dq' (\mathcal{A}^+(p, q) \mathcal{A}^+(p', q') - \mathcal{A}^-(p, q) \mathcal{A}^-(p', q')) \right. \\
&\quad \times (1 - \sigma \varphi^2(p, q))^{-1} (1 - \sigma \varphi^2(p', q'))^{-1} \\
&\quad \times \left(\varphi(p, q) \frac{\partial V(q, q')}{\partial q'} \frac{\partial \varphi(p', q')}{\partial p'} + \varphi(p', q') \frac{\partial V(q, q')}{\partial q} \frac{\partial \varphi(p, q)}{\partial p} \right) \\
&\quad \left. + \int dp' dq' dp dq \mathcal{A}^+(p, q) \mathcal{A}^-(p', q') (1 - \sigma \varphi^2(p, q))^{-1} (1 - \sigma \varphi^2(p', q'))^{-1} \right. \\
&\quad \left. \times \left(\varphi(p', q') \frac{\partial V(q, q')}{\partial q} \frac{\partial \varphi(p, q)}{\partial p} - \varphi(p, q) \frac{\partial V(q, q')}{\partial q'} \frac{\partial \varphi(p', q')}{\partial p'} \right) \right).
\end{aligned}$$

Обозначим $H_2 = H'_2 + H''_2$.

ЛЕММА 10. Пусть оператор $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}^+$ удовлетворяет уравнению (9), а компоненты вектора g^t с номерами, большими $1/\hbar^\delta$, $0 < \delta < 1/8$, обращаются в 0. Тогда

$$\left\| \left(i \frac{d}{dt} - L \right) U_{\hat{\varphi}^t} g^t - U_{\hat{\varphi}^t} \left(i \frac{d}{dt} - H_2 \right) g^t \right\| \rightarrow 0, \quad \hbar \rightarrow 0, \quad \varepsilon = \alpha(2\pi\hbar)^d.$$

Эта лемма доказывается с помощью правил коммутации (7), унитарности оператора $U_{\widehat{\varphi}^t}$ и лемм 8, 9.

Таким образом, при

$$\left\| \left(i \frac{d}{dt} - H_2 \right) g^t \right\| \rightarrow 0, \quad \hbar \rightarrow 0, \quad (35)$$

вектор пространства Фока $U_{\widehat{\varphi}^t} g^t$ удовлетворяет приближенно при $\hbar \rightarrow 0$ уравнению (5). С помощью процедуры оценки обратного оператора [11] получаем, что

$$\|\Phi^t - U_{\widehat{\varphi}^t} g^t\| = O(\hbar^{d/2-\delta_2})$$

для некоторого $0 < \delta_2 < d/2$, где Φ^t – решение уравнения (5), удовлетворяющее начальному условию $U_{\widehat{\varphi}^0} g^0$. Для доказательства теоремы 1 достаточно воспользоваться утверждением, которое доказывается подстановкой вектора g^t в формулу (35) и использованием лемм 3, 8.

ЛЕММА 11. *Для вектора*

$$\begin{aligned} g^t = & (\det(1 - (M^t)^+ M^t))^{1/4} \sum_{n=0}^{n_0(\hbar)} \frac{1}{n!} \left(\frac{(2\pi\hbar)^d}{2} \int dx dy a^+(x) a^+(y) \right. \\ & \times M^t \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, y \right) b^+(y) b^+(x) \Big)^n \Phi^{(0)} \end{aligned} \quad (36)$$

справедливо свойство (35).

Поскольку норма N -й компоненты вектора пространства Фока не превосходит нормы самого вектора, для доказательства теоремы 2 достаточно проверить, что норма $\|\Phi_N^t\|$ превосходит $\hbar^{d/2-\delta_2-\delta_3}$ для $0 < \delta_3 < d/2 - \delta_2$. Тем самым, утверждение теоремы 3 вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 12. *При*

$$N = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int dp dq n(p, q) + O(1)$$

для некоторой константы b_3 справедлива оценка

$$\|P_N U_{\widehat{\varphi}} g\| \geq b_3 \hbar^{d/4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенства Коши–Буняковского

$$\|P_N U_{\widehat{\varphi}} g\| \geq \frac{|(P_N U_{\widehat{\varphi}} \Phi^{(0)}, P_N U_{\widehat{\varphi}} g)|}{\|P_N U_{\widehat{\varphi}} \Phi^{(0)}\|}.$$

Для доказательства леммы достаточно проверить, что при $\hbar \rightarrow 0$ скалярное произведение

$$\sqrt{N} (P_N U_{\widehat{\varphi}} \Phi^{(0)}, P_N U_{\widehat{\varphi}} g) \quad (37)$$

имеет ненулевой предел в случаях, когда g имеет вид (36) и когда g – вакуумный вектор.

Скалярное произведение (37) представляется в виде

$$\int_{-\pi/\sqrt{N}}^{\pi/\sqrt{N}} \frac{d\beta}{2\pi} \left(U_{\widehat{\varphi}}^+ \exp \left(-i \frac{\beta}{\sqrt{N}} \left(\int dx a^+(x) a^-(x) - N \right) \right) U_{\widehat{\varphi}} \Phi^{(0)}, g \right). \quad (38)$$

Найдем предел интеграла (38) при $\hbar \rightarrow 0$. Сначала докажем, что модуль подынтегрального выражения ограничен сверху равномерно по N интегрируемой функцией переменной β . Отсюда по теореме Лебега будет следовать, что интеграл (38) стремится к интегралу от предела подынтегрального выражения при $\hbar \rightarrow 0$.

Вектор

$$y(\beta) = U_{\hat{\varphi}}^+ \exp \left(-i \frac{\beta}{\sqrt{N}} \left(\int dx a^+(x) a^-(x) - N \right) \right) U_{\hat{\varphi}} \Phi^{(0)}$$

удовлетворяет уравнению

$$i\sqrt{N} \frac{dy}{d\beta} = U_{\hat{\varphi}}^+ \left(\int dx a^+(x) a^-(x) - N \right) U_{\hat{\varphi}} y$$

и начальному условию $y(0) = \Phi^{(0)}$. Решение этой задачи Коши имеет вид

$$y(\beta) = c_1 \exp \left(\int dx a^+(x) (\hat{\alpha} b^+)(x) \right) \Phi^{(0)},$$

где

$$\alpha(\beta) = \hat{\varphi} (e^{-i\beta/\sqrt{N}} - 1) (1 - \sigma \hat{\varphi}^2 e^{-i\beta/\sqrt{N}})^{-1},$$

$$c_1 = (\det(1 - \sigma \hat{\varphi}^2) (1 - \sigma \hat{\varphi}^2 e^{-i\beta/\sqrt{N}})^{-1})^{\sigma} e^{i\beta\sqrt{N}}.$$

В силу неравенства Коши–Буняковского

$$|(y(\beta), g)| \leq \sum_{n=0}^{n_0(\hbar)} \|y_n(\beta)\| \|g_n\|.$$

Для $\|g_n\|$ согласно лемме 3 справедлива оценка $\|g_n\| \leq b e^{-cn}/(1 - an_0 \hbar^{d/2})$, т.е. $\|g_n\| \leq b_1 e^{-cn/2}$ для некоторой константы b_1 . Аналогично формуле (32) получаем следующую оценку для квадрата нормы n -й компоненты y_n :

$$\|y_n\|^2 \leq c_2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \|\hat{\alpha}\|_2^{2n-k} \|\hat{\alpha}\|^k e^{-\|\hat{\alpha}\|_2^2} \quad (39)$$

для некоторой не зависящей от β константы c_2 . Максимум суммы (39) достигается при $k = 0$. Таким образом, имеет место оценка

$$|(y(\beta), g)| \leq \sum_{n=0}^{n_0(\hbar)} b_2 \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n!}} \|\hat{\alpha}\|_2^n e^{-\|\hat{\alpha}\|_2^2} e^{-cn/2}. \quad (40)$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{\sqrt{(n-1)!}} \leq (1 + \xi)(1 + \xi^2 e^{\xi^2/2}), \quad \xi > 0,$$

и $\|\alpha\|_2 \geq c_4 \beta$, выражение (40) ограничено равномерно по $\hbar$ интегрируемой функцией $c_5 e^{-c_6 \beta^2}$, $c_5, c_6 > 0$.

Найдем предел подынтегрального выражения в формуле (38) при $\beta = \text{const}$. В силу равномерной ограниченности величины $\sum_n |(y_n(\beta), g_n)|$ под знаком суммы $\sum_n (y_n(\beta), g_n)$ можно перейти к пределу $\hbar \rightarrow 0$.

Обозначим через $\mathcal{F}_{pq}$ пространство Фока, состоящее из наборов функций $\{f_n(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)\}$, симметричных относительно перестановок пар $(p_i, q_i) \in \mathbb{R}^{2d}$. Введем в нем операторы рождения и уничтожения $A^\pm(p, q)$. Обозначим через $\tilde{\varphi}^{(0)}$ вакуумный вектор этого пространства,

$$\begin{aligned}\tilde{y}(\beta) &= \exp\left(-\frac{\beta^2}{2} \sqrt{\int dp dq |\rho(p, q)|^2 + \beta \int dp dq A^+(p, q) \rho(p, q)}\right) \tilde{\varphi}^{(0)}, \\ \tilde{g} &= (\det(1 - M^+ M))^{1/4} \exp\left(\frac{1}{2} \int dp dq dp' dq' A^+(p, q) M(p, q, p', q') A^+(p', q')\right) \tilde{\varphi}^{(0)},\end{aligned}$$

где

$$\rho(p, q) = i\varphi(p, q)(1 - \sigma\varphi^2(p, q)) \left(\int n(p, q) dp dq\right)^{-1}.$$

При $n = \text{const}$, $\hbar \rightarrow 0$ из леммы 4 вытекает, что

$$(y_n(\beta), g_n) \rightarrow (\tilde{y}_n(\beta), \tilde{g}_n), \quad \hbar \rightarrow 0, \quad (41)$$

так как слагаемые с $k \neq 0$ в формуле (23) дают стремящийся к 0 вклад в сумму. Из формулы (41) следует, что

$$(y(\beta), g) \rightarrow (\tilde{y}(\beta), \tilde{g}), \quad \hbar \rightarrow 0.$$

Поэтому при $\hbar \rightarrow 0$ интеграл (38) стремится к

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\beta}{2\pi} (\tilde{y}(\beta), \tilde{g}) \neq 0.$$

Лемма 12 доказана.

7. Геометрическая интерпретация асимптотических формул. Оказывается, что полученные уравнения (9) и (11), через решения которых выражается асимптотическая формула, могут быть проинтерпретированы как система Гамильтона и уравнение эволюции комплексного ростка соответственно. При этом симплектическая структура фазового пространства оказывается нетривиальной.

Обозначим через $\mathcal{M}$ пространство функций $\varphi(p, q)$ на $\mathbb{R}^{2d}$ со значениями в множестве $\tilde{\mathcal{M}}$. В бозевском случае множество $\mathcal{M}$ выбирается в виде единичного круга на комплексной плоскости, в фермиевском – в виде римановой сферы. Будем отождествлять касательные векторы к многообразию в несингулярных точках с комплексными функциями $\delta\varphi(p, q)$.

Рассмотрим 1-форму действия

$$\omega_1[\delta\varphi] = \frac{i}{2} \int dp dq ((1 - \sigma\widehat{\varphi}^+ \widehat{\varphi})^{-1} (\widehat{\varphi}^+ \widehat{\delta\varphi} - \widehat{\delta\varphi}^+ \widehat{\varphi}))(p, q), \quad (42)$$

где через $\widehat{\varphi}$ обозначен оператор с вейлевским символом $\varphi(p, q)$; аналогичное обозначение принято и для $\widehat{\delta\varphi}$.

Дифференциал 1-формы (42) имеет вид $\omega_2 = d\omega_1$,

$$\begin{aligned} \omega_2[\delta\varphi_1, \delta\varphi_2] = & \frac{i}{2} \int dp dq (\widehat{\delta\varphi_1^+} (1 - \sigma\widehat{\varphi}\widehat{\varphi^+})^{-1} \widehat{\delta\varphi_2} (1 - \sigma\widehat{\varphi^+}\widehat{\varphi})^{-1} \\ & - \widehat{\delta\varphi_1} (1 - \sigma\widehat{\varphi^+}\widehat{\varphi})^{-1} \widehat{\delta\varphi_2^+} (1 - \sigma\widehat{\varphi}\widehat{\varphi^+})^{-1}) (p, q). \end{aligned} \quad (43)$$

При $\hbar \rightarrow 0$ подынтегральное выражение в (43) переходит в элемент площади римановой сферы (в ферми-случае) либо плоскости Лобачевского, представленной в виде единичного круга (в бозевском случае). Отметим, что фазовые пространства в виде сферы и плоскости Лобачевского рассматривались в [12].

ЛЕММА 13. *Классическое уравнение движения*

$$i\dot{\widehat{\varphi}} = T_1\widehat{\varphi} - \widehat{\varphi}T_1 \quad (44)$$

является гамильтоновой системой для рассматриваемого фазового пространства, если функция Гамильтона $H^{(0)}(\varphi^*, \varphi)$ имеет вид (33).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $\widehat{\varphi}^+ = \widehat{\varphi}$ уравнение (44) переходит в (9).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $\hbar \rightarrow 0$ формула (33) для гамильтониана переходит в следующую:

$$\begin{aligned} H^{(0)}(\varphi^*, \varphi) = & i \int dp dq \left(\frac{p^2}{2} + U(q) + \alpha \int V(q, q') \frac{|\varphi(p', q')|^2}{1 - \sigma|\varphi(p', q')|^2} dp' dq' \right) \\ & \times \frac{1}{(1 - \sigma|\varphi(p', q')|^2)^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} \frac{\partial \varphi^*}{\partial p} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Заменой

$$n = \frac{|\varphi|^2}{1 - \sigma|\varphi|^2}, \quad \alpha = \frac{1}{i} \ln \frac{\varphi}{|\varphi|}$$

гамильтониан $H^{(0)}$ и 1-форма ω_1 приводятся к не зависящему от типа статистики виду

$$\begin{aligned} \omega_1 = & \int dp dq \alpha(p, q) \delta n(p, q), \\ H^{(0)} = & \int dp dq \left(\frac{p^2}{2} + U(q) + \alpha \int dp' dq' V(q, q') n(p', q') \left(\frac{\partial n}{\partial q} \frac{\partial \alpha}{\partial p} - \frac{\partial n}{\partial p} \frac{\partial \alpha}{\partial q} \right) \right). \end{aligned}$$

В ферми-случае возникает ограничение на одночастичную плотность: $n(p, q) < 1$.

Исследуем связь уравнения (11) с понятием комплексного ростка. отождествим комплексифицированное касательное пространство $T\mathcal{M}_\varphi^\mathbb{C}$ к многообразию $\mathcal{M}$ в точке φ с пространством $L^2(\mathbb{R}^{2d}) \times L^2(\mathbb{R}^{2d})$ упорядоченных пар независимых комплексных функций $(\delta\varphi, \overline{\delta\varphi})$. При $\hbar \rightarrow 0$ комплексифицированная 2-форма $\omega_2^\mathbb{C}$ принимает вид

$$\omega_2^\mathbb{C}((\delta\varphi_1, \overline{\delta\varphi_1}), (\delta\varphi_2, \overline{\delta\varphi_2})) = \frac{i}{2} \int \frac{dp dq}{(1 - \sigma\varphi^*\varphi)^2} (\overline{\delta\varphi_1}\delta\varphi_2 - \overline{\delta\varphi_2}\delta\varphi_1).$$

Введем в $T\mathcal{M}_\varphi^\mathbb{C}$ инволюцию $(\delta\varphi, \overline{\delta\varphi})^* = (\overline{\delta\varphi}, \delta\varphi)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть M – оператор Гильберта–Шмидта в пространстве $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ с симметричным ядром и нормой меньше 1. Подпространство $\mathcal{G}_M \in T\mathcal{M}_\varphi^\mathbb{C}$ вида

$$\mathcal{G}_M = \{ (M(1 - \sigma\varphi^*\varphi)\zeta, (1 - \sigma\varphi^*\varphi)\zeta) \mid \zeta \in L^2(\mathbb{R}^{2d}) \}$$

называется *комплексным ростком*, отвечающим оператору M .

ЛЕММА 14. *Комплексный росток удовлетворяет следующим свойствам:*

- 1) при $\xi, \eta \in \mathcal{G}_M$ $\omega_2^\mathbb{C}(\xi, \eta) = 0$;
- 2) при $\xi \in \mathcal{G}_M$, $\xi \neq 0$, $i^{-1}\omega_2^\mathbb{C}(\xi, \xi^*) > 0$;
- 3) упорядоченная пара функций $(\delta\varphi, \overline{\delta\varphi})$ принадлежит ростку $\mathcal{G}_{M^t}$ тогда и только тогда, когда является решением задачи Коши комплексифицированной системы в вариациях для системы Гамильтона (27) с начальным условием на ростке $\mathcal{G}_{M^0}$.

Свойства 1) и 2) вытекают из определения 2, свойство 3) является следствием уравнения (11). Доказательство этих свойств аналогично [4], [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Maslov V. P., Shvedov O. Yu. Asymptotic solutions to the Wigner equation for systems of a large number of particles // Russian J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 1. P. 65–80.
- [2] Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
- [3] Маслов В. П., Шведов О. Ю. Метод комплексного роста в пространстве Фока. I. Асимптотики типа волновых пакетов // ТМФ. 1995. Т. 104. № 2. С. 310–329.
- [4] Маслов В. П., Шведов О. Ю. Метод комплексного роста в пространстве Фока. II. Асимптотики, отвечающие конечномерным изотропным многообразиям // ТМФ. 1995. Т. 104. № 3. С. 479–506.
- [5] Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
- [6] Карасёв М. В., Маслов В. П. Нелинейная скобка Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.
- [7] Maslov V. P., Shvedov O. Yu. An asymptotic formula for the N -particle density function as $N \rightarrow \infty$ and violation of the chaos hypothesis // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 2. № 2. P. 217–234.
- [8] Maslov V. P., Shvedov O. Yu. On the approximation for the quantum large canonical distribution // Russian J. Math. Phys. 1998. V. 6. № 1. P. 80–89.
- [9] Кострикин А. И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
- [10] Маслов В. П. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
- [11] Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965.
- [12] Berezin F. A. Models of Gross–Neveu type are quantization of a classical mechanics with nonlinear phase space // Comm. Math. Phys. 1978. V. 63. P. 131–153.