Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Мамчуев, Смешанная задача для нагруженной системы уравнений с производными Римана–Лиувилля, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 3, 428–439

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10310>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 16:12:40

Смешанная задача для нагруженной системы уравнений с производными Римана–Лиувилля

М. О. Мамчурев

Исследуется система двух уравнений с частными производными Римана–Лиувилля с постоянными коэффициентами. Доказана теорема существования и единственности решения смешанной задачи и построена ее функция Грина.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm10310

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений

$$\mathbf{L}u(x, y) \equiv D_{0y}^\alpha u(x, s) + \Lambda u_x(x, y) - Au(x, y) = f(x, y), \quad (1.1)$$

где $u(x, y) = \|u_1(x, y), u_2(x, y)\|$ – искомая, а $f(x, y) = \|f_1(x, y), f_2(x, y)\|$ – заданная вектор-функция, $\Lambda = \text{diag} \|\lambda, -\lambda\|$ и $A = \|a_{ij}\|$ – заданные постоянные матрицы ($i, j = 1, 2$), $\lambda > 0$, $0 < \alpha < 1$, D_{0y}^β – оператор дробного (в смысле Римана–Лиувилля) интегродифференцирования порядка β [1; с. 9]:

$$D_{cy}^\beta u(x, s) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(y-c)}{\Gamma(-\beta)} \int_c^y u(x, s) |y-s|^{-\beta-1} ds, & \beta < 0, \\ u(x, y), & \beta = 0, \\ \text{sign}(y-c) \frac{d}{dy} D_{cy}^{\beta-1} u(x, s), & 0 < \beta < 1, \end{cases}$$

$\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Ранее для системы (1.1) было получено общее представление решений в прямоугольной области, построено фундаментальное решение $\Gamma(x-t, y-s)$ [2], исследована задача Коши в нелокальной постановке [3], [4].

В данной работе построена матрица Грина и доказана теорема существования и единственности решения смешанной задачи в следующей постановке.

ЗАДАЧА. В области $\Omega = \{(x, y) : l_1 < x < l_2, 0 < y < T\}$, найти решение $u(x, y) = \|u_1(x, y), u_2(x, y)\|$ системы (1.1), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, s) = \varphi(x), \quad l_1 \leq x \leq l_2, \quad (1.2)$$

$$u_1(l_1, y) = \mu_1(y), \quad u_2(l_2, y) = \mu_2(y), \quad 0 < y < T, \quad (1.3)$$

где $\varphi(x) = \|\varphi_1(x), \varphi_2(x)\|$, $\mu(y) = \|\mu_1(y), \mu_2(y)\|$ – заданные функции.

2. Обозначения и определения. Пусть $B(x, y)$ матрица с элементами $b_{ij}(x, y)$. Будем обозначать $|B(x, y)|_*$ скалярную функцию принимающую в каждой точке (x, y) наибольшее из значений модулей элементов матрицы $B(x, y)$, т.е. $|B(x, y)|_* = \max_{i,j} |b_{ij}(x, y)|$. Аналогично для вектора $b(x, y)$ с компонентами $b_i(x, y)$ будем обозначать $|b(x, y)|_* = \max_i |b_i(x, y)|$.

Пусть

$$\Omega_y = \{(t, s) : l_1 < t < l_2, 0 < s < y\}, \quad S = \{(x, y; t, s) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}_y : x = t, y = s\}.$$

Матрицей Грина задачи (1.1)–(1.3) назовем матрицу $G(x, y; t, s) \in C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}_y \setminus S)$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) в области Ω_y при фиксированных $(x, y) \in \Omega$ матрица G является решением уравнения

$$\mathbf{L}^* G(x, y; t, s) \equiv D_{ys}^\alpha G(x, y; t, s) - G_t(x, y; t, s) \Lambda - G(x, y; t, s) A = 0; \quad (2.1)$$

- 2) для любого вектора $q(x) = \|q_1(x), q_2(x)\| \in C[x_1, x_2]$, $l_1 \leq x_1 < x_2 \leq l_2$, выполняется соотношение

$$\lim_{s \rightarrow y} \int_{x_1}^{x_2} [D_{ys}^{\alpha-1} G(x, y; t, s)] q(t) dt = q(x), \quad x_1 < x < x_2; \quad (2.2)$$

- 3) для любых точек $(x, y) \in \Omega$ и $(t, s) \in \Omega_y$ выполняется неравенство

$$|G(x, y; t, s)|_* \leq C |x - t|^{-\theta} (y - s)^{\alpha\theta-1}, \quad \theta \in (0, 1), \quad (2.3)$$

где C – положительная постоянная;

- 4) G удовлетворяет краевым условиям

$$\lim_{t \rightarrow l_2} G_{11}(x, y; t, s) = \lim_{t \rightarrow l_2} G_{21}(x, y; t, s) = 0, \quad (2.4)$$

$$\lim_{t \rightarrow l_1} G_{12}(x, y; t, s) = \lim_{t \rightarrow l_1} G_{22}(x, y; t, s) = 0. \quad (2.5)$$

Введем в рассмотрение следующую матрицу:

$$G(x, y; t, s) = \Gamma(x - t, y - s) - S(x, t, y - s), \quad (2.6)$$

где матрица $\Gamma(x, y)$ определяется следующими соотношениями [2], [3]:

$$\Gamma(x, y) = \frac{e^{a_0 x}}{2\lambda^2} \int_{|x|}^{\infty} K_0(x, \tau) g(y, \tau) d\tau + \Gamma_0(x, y), \quad \Gamma_0(x, y) = \frac{e^{a_0 x}}{\lambda} g(y, |x|) H(x),$$

$$K_0(x, \tau) = \begin{vmatrix} \lambda a h_1(-x, \tau) & a_{12} h_0(x, \tau) \\ a_{21} h_0(x, \tau) & \lambda a h_1(x, \tau) \end{vmatrix}, \quad H(x) = \begin{vmatrix} \eta(x) & 0 \\ 0 & \eta(-x) \end{vmatrix},$$

$$h_0(x, \tau) = {}_0F_1[1; c_0(\tau^2 - x^2)], \quad c_0 = \frac{a_{12} a_{21}}{4\lambda^2},$$

$$h_m(x, \tau) = c^{[(m+1)/2]} \frac{a^m}{2^m m!} (\tau - x)^m {}_0F_1[m+1; c_0(\tau^2 - x^2)], \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

где

$$g(y, \tau) = \frac{e^{a_1 \tau}}{y} e_{1, \alpha}^{1,0} \left(-\frac{\tau}{\lambda y \alpha} \right),$$

а

$$e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + \alpha n) \Gamma(\delta - \beta n)}$$

– функция типа Райта [5; с. 23],

$${}_0F_1(m; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m) z^k}{\Gamma(m+k) k!}$$

– обобщенная гипергеометрическая функция [6; с. 76], $\eta(x)$ – функция Хевисайда,

$$a_{0,1} = \frac{a_{11} \mp a_{22}}{2\lambda}, \quad a = 2\sqrt{|c_0|}, \quad c = \begin{cases} \text{sign}(c_0), & c_0 \neq 0, \\ 1, & c_0 = 0, \end{cases}$$

$$S(x, t, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^2 \Gamma_{k,n}(X_{k,n}, y) - \sum_{k=3}^4 \Gamma_{k,n}(X_{k,n+1}, y) \right],$$

$$\Gamma_{k,n}(X, y) = \frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda^2} \int_X K_{k,n}(X, \tau) g(y, \tau) d\tau,$$

$$K_{1,n}(X_{1,n}, \tau) = \left\| \begin{matrix} \lambda a h_{2n+1}(X_{1,n}, \tau) & a_{12} h_{2n}(X_{1,n}, \tau) \\ a_{21} h_{2n+2}(X_{1,n}, \tau) & \lambda a h_{2n+1}(X_{1,n}, \tau) \end{matrix} \right\|,$$

$$K_{2,n}(X_{2,n}, \tau) = \left\| \begin{matrix} \lambda a h_{2n+1}(X_{2,n}, \tau) & a_{12} h_{2n+2}(X_{2,n}, \tau) \\ a_{21} h_{2n}(X_{2,n}, \tau) & \lambda a h_{2n+1}(X_{2,n}, \tau) \end{matrix} \right\|,$$

$$K_{3,n}(X_{3,n+1}, \tau) = \left\| \begin{matrix} \lambda a h_{2n+3}(X_{3,n+1}, \tau) & a_{12} h_{2n+2}(X_{3,n+1}, \tau) \\ a_{21} h_{2n+2}(X_{3,n+1}, \tau) & \lambda a h_{2n+1}(X_{3,n+1}, \tau) \end{matrix} \right\|,$$

$$K_{4,n}(X_{4,n+1}, \tau) = \left\| \begin{matrix} \lambda a h_{2n+1}(X_{4,n+1}, \tau) & a_{12} h_{2n+2}(X_{4,n+1}, \tau) \\ a_{21} h_{2n+2}(X_{4,n+1}, \tau) & \lambda a h_{2n+3}(X_{4,n+1}, \tau) \end{matrix} \right\|,$$

$$X_{1,n} \equiv X_{1,n}(x, t) = x + t - 2l_1 + 2n(l_2 - l_1),$$

$$X_{2,n} \equiv X_{2,n}(x, t) = -x - t + 2l_2 + 2n(l_2 - l_1),$$

$$X_{3,n} \equiv X_{3,n}(x, t) = -x + t + 2n(l_2 - l_1),$$

$$X_{4,n} \equiv X_{4,n}(x, t) = x - t + 2n(l_2 - l_1);$$

$[\beta]$ – целая часть числа β .

Для доказательства сходимости ряда $S(x, t, y)$ и дальнейшего изложения нам понадобятся следующие утверждения.

При $\delta \geq 0$ справедлива оценка [3]

$$0 < \int_{|x|}^{\infty} \frac{e^{k\tau}}{y^{1-\delta}} e_{1,\alpha}^{1,\delta} \left(-\frac{\tau}{\lambda y^\alpha} \right) d\tau \leq C_\delta e^{k|x|} y^{\alpha+\delta-1} e_{1,\alpha}^{1,\alpha+\delta} \left(-\frac{|x|}{\lambda y^\alpha} \right), \quad (2.7)$$

где $C_\delta = \text{const} > 0$.

Если $\delta \geq 0$, то для любого $x > 0$ справедливо неравенство [5; с. 48]

$$e_{1,\alpha}^{1,\delta}(-x) \leq P_n(x) \exp(-x^{1/(1-\alpha)} \alpha^{\alpha/(1-\alpha)} (1-\alpha)), \quad (2.8)$$

где

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k x^k}{\Gamma(\delta + k(1-\alpha))},$$

и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выбрано из условия $\delta + n(1-\alpha) \geq 1$.

Для любых $x \geq 0$ и $y \geq 0$ справедлива оценка [5; с. 29]

$$\left| x^{\gamma-1} y^{\delta-1} e_{\alpha,\beta}^{\gamma,\delta} \left(-\frac{x^\alpha}{y^\beta} \right) \right| \leq C x^{\gamma-\alpha\theta-1} y^{\delta+\beta\theta-1}, \quad (2.9)$$

где $\theta \in [0; 1]$, $C = \text{const} > 0$.

Имеет место формула автотрансформации функции типа Райта [5; с. 24]

$$z e_{\alpha,\beta}^{\gamma,\delta}(z) = e_{\alpha,\beta}^{\gamma-\alpha,\delta+\beta}(z) - \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\delta+\beta)}. \quad (2.10)$$

Из (2.9) и (2.10) следует, что оценка

$$\left| y^{\delta-1} e_{1,\beta}^{1,\delta} \left(-\frac{|x|}{y^\beta} \right) \right| \leq |x|^{-\theta} y^{\delta+\beta\theta-1} \quad (2.11)$$

верна для любых $\theta \geq 0$.

Имеют место следующие оценки:

$$|\Gamma_{k,n}(X, y)|_* \leq C_1 X^{-\theta} y^{\alpha+\alpha\theta-1}, \quad \theta \geq 0, \quad X, y \geq 0, \quad (2.12)$$

$$|\Gamma_{k,n}(X, y)|_* \leq C_2 \exp(-\rho_1 X^\varepsilon), \quad \rho_1 < \rho, \quad X > 0, \quad (2.13)$$

где $\rho = (1 - \alpha)(\alpha^\alpha / \lambda \Gamma^\alpha)^\varepsilon$, $\varepsilon = 1/(1 - \alpha)$, C_1, C_2 – положительные постоянные.

Оценки (2.12) и (2.13) доказывается аналогично доказательству свойств 3 и 4 матрицы $\Gamma(x, y)$ [2] с использованием оценок (2.7), (2.8), (2.11) и асимптотической формулы [6; с. 81]

$${}_0F_1(m; x) \sim \frac{\Gamma(m)}{2\sqrt{\pi}} e^{2\sqrt{x}} x^{1/4-m/2}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2.14)$$

Справедлива следующая оценка:

$$|\Gamma_{k,n}(X, y)|_* \leq C X^{-\theta} y^{\alpha+\alpha\theta-1} \exp(-\rho_0 X^\varepsilon), \quad \theta \geq 0, \quad (X, y) \in \omega, \quad (2.15)$$

где $\omega = [0; \infty) \times [0; T]$, $\rho_0 < (1 - \alpha)(\alpha^\alpha / \lambda \Gamma^\alpha)^\varepsilon$, $\varepsilon = 1/(1 - \alpha)$, $C = \text{const} > 0$.

Действительно, оценка (2.12) описывает поведение $\Gamma_{k,n}(X, y)$ в некоторой окрестности точки $(0, 0)$, т.е. при $(X, y) \in \omega_0 = [0; X_0] \times [0; y_0]$, а оценка (2.13) – при больших значениях X , т.е. при $(X, y) \in \omega_1 = [X_0; \infty) \times [y_0; T]$. Учитывая, что для всех $X \in [0; X_0]$ справедливы неравенства $e^{-\rho_1 X_0^\varepsilon} < e^{-\rho_1 X^\varepsilon} < 1$ и приняв $C_3 = C_1 e^{\rho_1 X_0^\varepsilon}$, неравенство (2.12) запишем в виде

$$|\Gamma_{k,n}(X, y)|_* \leq C_3 X^{-\theta} y^{\alpha+\alpha\theta-1} \exp(-\rho_1 X^\varepsilon), \quad \theta \geq 0, \quad (X, y) \in \omega_0. \quad (2.16)$$

Далее, учитывая, что для любых $\rho_2 < \rho_1$ и $\theta \geq 0$ существует $X_1 > 0$ такое, что для всех $X > X_1$ справедливо неравенство $X^\theta e^{-\rho_1 X^\varepsilon} < e^{-\rho_2 X^\varepsilon}$, и полагая $X_0 \geq X_1$,

$$C_4 = \begin{cases} C_2 y_0^{1-\alpha-\alpha\theta}, & \alpha + \alpha\theta > 1, \\ C_2 T_0^{1-\alpha-\alpha\theta}, & \alpha + \alpha\theta \leq 1, \end{cases}$$

запишем (2.13) в виде

$$|\Gamma_{k,n}(X, y)|_* \leq C_4 X^{-\theta} y^{\alpha+\alpha\theta-1} \exp(-\rho_2 X^\varepsilon), \quad \theta \geq 0, \quad (X, y) \in \omega_1. \quad (2.17)$$

Выбрав теперь $C = \max\{C_3, C_4\}$, а $\rho_0 = \min\{\rho_1, \rho_2\}$, из (2.16) и (2.17) получим оценку (2.15).

Перейдем теперь к доказательству сходимости ряда $S(x, t, y)$. Учитывая, что $X_{k,n} < X_{k,n+1}$, $k = 1, \dots, 4$, из (2.15) получим

$$|\Gamma_{k,n}(X_{k,n}, y)|_* \leq C_6 X_{k,n}^{-\theta} y^{\alpha+\alpha\theta-1}, \quad k = 1, 2, \quad \theta \geq 0, \quad (2.18)$$

$$|\Gamma_{k,n}(X_{k,n+1}, y)|_* \leq C_7 X_{k,n+1}^{-\theta} y^{\alpha+\alpha\theta-1}, \quad k = 3, 4, \quad \theta \geq 0, \quad (2.19)$$

где $C_6 = C \exp(-\rho_0 X_{k,0}^\varepsilon)$ и $C_7 = C \exp(-\rho_0 X_{k,1}^\varepsilon)$. Легко видеть, что

$$2n(l_2 - l_1) \leq X_{k,n} \leq 2(n+1)(l_2 - l_1), \quad k = 1, 2, \quad (2.20)$$

$$(2n+1)(l_2 - l_1) \leq X_{k,n+1} \leq (2n+3)(l_2 - l_1), \quad k = 3, 4. \quad (2.21)$$

Из (2.18)–(2.21) следует, что

$$|\Gamma_{k,0}(X_{k,0}, y - s)|_* \leq C_6 |x + t - 2l_k|^{-\theta} (y - s)^{\alpha+\alpha\theta-1}, \quad k = 1, 2, \quad \theta \geq 0, \quad (2.22)$$

и

$$\Gamma_{k,n}(X_{k,n}, y - s) \in C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}_y), \quad k = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\Gamma_{k,n}(X_{k,n+1}, y - s) \in C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}_y), \quad k = 3, 4, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

причем матрица $\Gamma_{k,0}(X_{k,0}, y - s)$ имеет особенность $(y - s)^{\alpha-1}$ при $x = t = l_k$, $k = 1, 2$.

Выбрав $\theta > \max\{1/\alpha - 1, 1\}$, в силу (2.18) и (2.20) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Gamma_{k,n}(X_{k,n}, y)|_* \leq C_6 y^{\alpha+\alpha\theta-1} \sum_{n=1}^{\infty} X_{k,n}^{-\theta} \leq \frac{C_6 y^{\alpha+\alpha\theta-1}}{(2l_2 - 2l_1)^\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\theta}, \quad k = 1, 2. \quad (2.23)$$

Аналогично, в силу (2.19) и (2.21) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Gamma_{k,n}(X_{k,n+1}, y)|_* \leq \frac{C_7 y^{\alpha+\alpha\theta-1}}{(2l_2 - 2l_1)^\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\theta}, \quad k = 3, 4. \quad (2.24)$$

Из (2.23) и (2.24) следует, что ряд $S(x, t, y)$ сходится равномерно относительно x , t и y , причем

$$S(x, t, y - s) - \Gamma_{1,0}(X_{1,0}, y - s) - \Gamma_{2,0}(X_{2,0}, y - s) \in C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}_y). \quad (2.25)$$

3. Матрица Грина задачи (1.1)–(1.3). Покажем, что $G(x, y; t, s)$, определяемая равенством (2.6), является матрицей Грина задачи (1.1)–(1.3) и докажем некоторые ее свойства.

Нам понадобится следующая

ЛЕММА. Пусть $X \equiv X(x, t) > 0$ – непрерывно дифференцируемая по x и t функция,

$$\Pi(x, t, y) = \frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda^2} \int_X^\infty g(y, \tau) K(x, t, \tau) d\tau, \quad K(x, t, \tau) = \begin{vmatrix} K_{11}(x, t, \tau) & K_{12}(x, t, \tau) \\ K_{21}(x, t, \tau) & K_{22}(x, t, \tau) \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\left[D_{0y}^\alpha + \Lambda \frac{\partial}{\partial x} - A_1 \right] \Pi = \frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda} \int_X^\infty g(y, \tau) \begin{vmatrix} \mathbf{L}_+ K_{11}(x, t, \tau) & \mathbf{L}_+ K_{12}(x, t, \tau) \\ \mathbf{L}_- K_{21}(x, t, \tau) & \mathbf{L}_- K_{22}(x, t, \tau) \end{vmatrix} d\tau + \frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda^2} g(y, X) \left(\lambda E - \frac{\partial X}{\partial x} \Lambda \right) K(x, t, X), \quad (3.1)$$

$$D_{0y}^\alpha \Pi - \frac{\partial}{\partial t} \Pi \Lambda - \Pi A_1 = \frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda} \int_X^\infty g(y, \tau) \begin{vmatrix} \mathbf{L}_+^* K_{11}(x, t, \tau) & \mathbf{L}_-^* K_{12}(x, t, \tau) \\ \mathbf{L}_+^* K_{21}(x, t, \tau) & \mathbf{L}_-^* K_{22}(x, t, \tau) \end{vmatrix} d\tau + \frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda^2} g(y, X) K(x, t, X) \left(\lambda E + \frac{\partial X}{\partial t} \Lambda \right), \quad (3.2)$$

где $a_{0,1} = (a_{11} \mp a_{22})/(2\lambda)$, $\mathbf{L}_\pm \equiv \partial/\partial\tau \pm \partial/\partial x$, $\mathbf{L}_\pm^* \equiv \partial/\partial\tau \pm \partial/\partial t$, E – единичная матрица, $A_1 = \text{diag} \|a_{11}, a_{22}\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $h(x, t, \tau)$ и ее производные $\partial h/\partial x$, $\partial h/\partial\tau$ интегрируемы с весом $g(y, \tau)$ по положительной полуоси. Тогда справедливы равенства [2]

$$D_{0y}^\alpha \int_X^\infty g(y, \tau) h(x, t, \tau) d\tau = \lambda \int_X^\infty g(y, \tau) \left(\frac{\partial}{\partial\tau} + a_1 \right) h(x, t, \tau) d\tau + \lambda g(y, X) h(x, t, X), \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_X^\infty g(y, \tau) h(x, t, \tau) d\tau = \int_X^\infty g(y, \tau) \frac{\partial}{\partial x} h(x, t, \tau) d\tau - \frac{\partial X}{\partial x} g(y, X) h(x, t, X). \quad (3.4)$$

Из формул (3.3) и (3.4) имеем

$$D_{0y}^\alpha \Pi = \frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda} \int_X^\infty g(y, \tau) \left(\frac{\partial}{\partial\tau} + a_1 \right) K(x, t, \tau) d\tau + \frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda} g(y, X) K(x, t, X), \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Pi = \frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda^2} \int_X^\infty g(y, \tau) \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_0 \right) K(x, t, \tau) d\tau - \frac{\partial X}{\partial x} \frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda^2} g(y, X) K(x, t, X), \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi = \frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda^2} \int_X^\infty g(y, \tau) \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_0 \right) K(x, t, \tau) d\tau - \frac{\partial X}{\partial t} \frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda^2} g(y, X) K(x, t, X). \quad (3.7)$$

Из (3.5)–(3.7) получим равенства

$$\begin{aligned} \left[D_{0y}^\alpha + \Lambda \frac{\partial}{\partial x} - A_1 \right] \Pi &= \frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda^2} \int_X^\infty g(y, \tau) \left(\lambda E \frac{\partial}{\partial\tau} + \Lambda \frac{\partial}{\partial x} \right) K(x, t, \tau) d\tau \\ &\quad + \frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda^2} g(y, X) \left(\lambda E - \frac{\partial X}{\partial x} \Lambda \right) K(x, t, X), \\ D_{0y}^\alpha \Pi - \frac{\partial}{\partial t} \Pi \Lambda - \Pi A_1 &= \frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda^2} \int_X^\infty g(y, \tau) \left(\lambda \frac{\partial}{\partial\tau} K(x, t, \tau) - \frac{\partial}{\partial t} K(x, t, \tau) \Lambda \right) d\tau \\ &\quad + \frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda^2} g(y, X) K(x, t, X) \left(\lambda E + \frac{\partial X}{\partial t} \Lambda \right), \end{aligned}$$

из которых следуют (3.1) и (3.2). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Матрица $G(x, y; t, s)$ – матрица Грина задачи (1.1)–(1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь соотношениями [7; с. 500]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} {}_0F_1(m; z) &= \frac{1}{m} {}_0F_1(m+1; z), \\ {}_0F_1(m+1; z) + \frac{z}{m(m+1)} {}_0F_1(m+2; z) &= {}_0F_1(m; z), \end{aligned}$$

нетрудно показать справедливость следующих формул:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X} \right) h_m(X, \tau) = c^m a h_{m+1}(X, \tau), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial X} \right) h_m(X, \tau) = c^m a h_{m-1}(X, \tau), \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

В силу (3.2), (3.8), (3.9), с учетом того, что

$$K_{1,n}(X_{1,n}, X_{1,n}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad K_{1,0}(X_{1,0}, X_{1,0})(\lambda E + \Lambda) = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} D_{0y}^\alpha \Gamma_{1,n}(X_{1,n}, y) - \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{1,n}(X_{1,n}, y) \Lambda - \Gamma_{1,n}(X_{1,n}, y) A_1 \\ = -\frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda} \int_{X_{1,n}}^\infty g(y, \tau) \left\| \begin{array}{cc} \mathbf{L}_+^* \lambda a h_{2n+1}(X_{1,n}, \tau) & \mathbf{L}_-^* a_{12} h_{2n}(X_{1,n}, \tau) \\ \mathbf{L}_+^* a_{21} h_{2n+2}(X_{1,n}, \tau) & \mathbf{L}_-^* \lambda a h_{2n+1}(X_{1,n}, \tau) \end{array} \right\| d\tau \\ = -\frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda} \int_{X_{1,n}}^\infty g(y, \tau) \left\| \begin{array}{cc} \lambda c a^2 h_{2n}(X_{1,n}, \tau) & a_{12} a h_{2n+1}(X_{1,n}, \tau) \\ a_{21} a h_{2n+1}(X_{1,n}, \tau) & \lambda c a^2 h_{2n+2}(X_{1,n}, \tau) \end{array} \right\| d\tau \\ = -\frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda^2} \int_{X_{1,n}}^\infty g(y, \tau) \left\| \begin{array}{cc} \lambda a h_{2n+1}(X_{1,n}, \tau) & a_{12} h_{2n}(X_{1,n}, \tau) \\ a_{21} h_{2n+2}(X_{1,n}, \tau) & \lambda a h_{2n+1}(X_{1,n}, \tau) \end{array} \right\| d\tau \left\| \begin{array}{cc} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{array} \right\| \\ = \Gamma_{1,n}(X_{1,n}, y) A_2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Точно так же доказывается то, что

$$\mathbf{L}^* \Gamma_{k,n}(X_{k,n+[k/3]}, y-s) = 0, \quad k = 2, 3, 4, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Аналогично тому, как была получена оценка (2.15), можно получить более общую оценку

$$\left| \frac{\partial^m}{\partial X^m} D_{0y}^\nu \Gamma_{k,n}(X, y) \right|_* \leq C X^{-\theta} y^{\alpha-\nu+\alpha(\theta-m)-1} \exp(-\rho_0 X^\varepsilon), \quad \theta \geq 0, \quad (X, y) \in \omega, \quad (3.12)$$

где $\rho_0 < (1-\alpha)(\alpha^\alpha/\lambda T^\alpha)^\varepsilon$, $\varepsilon = 1/(1-\alpha)$, $m \in \{0, 1\}$, $\nu \in \{0, \alpha-1, \alpha\}$, причем $m\nu = 0$.

Из оценки (3.12), аналогично (2.23), следует возможность почленного дифференцирования и интегрирования ряда $S(x, t, y-s)$, а также то, что

$$D_{ys}^\alpha [S - \Gamma_{1,0} - \Gamma_{2,0}], \quad \frac{\partial}{\partial x} [S - \Gamma_{1,0} - \Gamma_{2,0}], \quad \frac{\partial}{\partial t} [S - \Gamma_{1,0} - \Gamma_{2,0}] \in C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}_y), \quad (3.13)$$

и

$$|D_{ys}^\alpha \Gamma_{k,0}(X_{k,0}, y-s)|_* \leq C |x+t-2l_k|^{-\theta} (y-s)^{\alpha\theta-1}, \quad k = 1, 2, \quad \theta \geq 0, \quad (3.14)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_{k,0}(X_{k,0}, y-s) \right|_* \leq C|x+t-2l_k|^{-\theta}(y-s)^{\alpha\theta-1}, \quad k=1,2, \quad \theta \geq 0, \quad (3.15)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{k,0}(X_{k,0}, y-s) \right|_* \leq C|x+t-2l_k|^{-\theta}(y-s)^{\alpha\theta-1}, \quad k=1,2, \quad \theta \geq 0. \quad (3.16)$$

Поэтому из (3.10) и (3.11) следует

$$\mathbf{L}^* S(x, t, y-s) = 0. \quad (3.17)$$

Из свойства 2 [2] матрицы $\Gamma(x, y)$ и (3.17) получим (2.1).

В силу (3.12) в окрестности точки $(0, 0)$ справедлива оценка

$$|D_{ys}^{\alpha-1} \Gamma_{k,n}(X, y)|_* \leq C X^{-\theta} y^{\alpha\theta}, \quad 0 < \theta < 1, \quad k=1, \dots, 4. \quad (3.18)$$

Из оценки (3.18) следует, что

$$\lim_{s \rightarrow y} \int_{l_1}^{l_2} D_{ys}^{\alpha-1} \Gamma_{k,n}(X_{k,n+[k/3]}, y-s) q(t) dt = 0, \quad k=1, \dots, 4.$$

Откуда, в свою очередь, получим

$$\lim_{s \rightarrow y} \int_{x_1}^{x_2} D_{ys}^{\alpha-1} S(x, t, y-s) q(t) dt = 0. \quad (3.19)$$

Из свойства 5 [2] матрицы $\Gamma(x, y)$, (2.6) и (3.19) получим (2.2).

Из (2.22) и (2.25) вместе с оценкой (свойство 3 [2])

$$|\Gamma(x, y)|_* \leq C|x|^{-\theta} y^{\alpha\theta-1}, \quad \theta \in (0, 1), \quad (3.20)$$

следует неравенство (2.3).

Докажем выполнение для $G(x, y; t, s)$ условий (2.4), (2.5). Обозначим через $\Gamma_{k,n}^{ij}$ и Γ^{ij} элементы матриц $\Gamma_{k,n}$ и Γ соответственно. Из $X_{1,n}(x, l_2) = X_{4,n+1}(x, l_2)$ и $X_{2,n}(x, l_2) = X_{3,n}(x, l_2)$ следует, что

$$\Gamma_{1,n}^{i1}(X_{1,n}(x, l_2), y) - \Gamma_{4,n}^{i1}(X_{1,n+1}(x, l_2), y) = 0, \quad i=1,2, \quad (3.21)$$

$$\Gamma_{2,n+1}^{i1}(X_{2,n+1}(x, l_2), y) - \Gamma_{3,n}^{i1}(X_{3,n+1}(x, l_2), y) = 0, \quad i=1,2, \quad (3.22)$$

$$\Gamma_{2,0}^{i1}(X_{2,0}(x, l_2), y) - \Gamma^{i1}(x-l_2, y) = 0, \quad i=1,2. \quad (3.23)$$

Из $X_{1,n}(x, l_1) = X_{4,n}(x, l_1)$ и $X_{2,n}(x, l_1) = X_{3,n+1}(x, l_1)$ следует, что

$$\Gamma_{1,n+1}^{i2}(X_{1,n+1}(x, l_1), y) - \Gamma_{4,n}^{i2}(X_{4,n+1}(x, l_1), y) = 0, \quad i=1,2, \quad (3.24)$$

$$\Gamma_{1,0}^{i2}(X_{1,0}(x, l_1), y) - \Gamma^{i2}(x-l_1, y) = 0, \quad i=1,2, \quad (3.25)$$

$$\Gamma_{2,n}^{i2}(X_{2,n}(x, l_1), y) - \Gamma_{3,n}^{i2}(X_{3,n+1}(x, l_1), y) = 0, \quad i=1,2. \quad (3.26)$$

Из (3.21)–(3.26) следует выполнение условий (2.4) и (2.5). Теорема 1 доказана.

4. Теорема существования и единственности. Решение $u \equiv u(x, y)$ системы (1.1) называется *регулярным* в области Ω , если $y^{1-\alpha}u \in C(\bar{\Omega})$, $D_{0y}^\alpha u, (\partial/\partial x)u \in C(\Omega)$ [3].

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $y^{1-\alpha}f(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, $\varphi(x) \in C[l_1; l_2]$, $y^{1-\alpha}\mu(y) \in C[0; T]$, функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Гёльдера по переменной x , т.е.

$$|f(x, y) - f(t, y)|_* \leq C|x - t|^q y^{\alpha-1}, \quad (4.1)$$

где $C = \text{const} > 0$, $0 < q < 1$, и выполняются условия согласования

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} \mu_1(t) = \varphi_1(l_1), \quad \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} \mu_2(t) = \varphi_2(l_2). \quad (4.2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \lambda \int_0^y [G(x, y; l_1, s) + G(x, y; l_2, s)] \mu(s) ds \\ & + \int_{l_1}^{l_2} G(x, y; t, 0) \varphi(t) dt + \int_0^y \int_{l_1}^{l_2} G(x, y; t, s) f(t, s) dt ds \end{aligned} \quad (4.3)$$

– единственное регулярное в области Ω решение задачи (1.1)–(1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теорем 1 и 2 [2] и теоремы 1 настоящей работы, получим, что решение задачи (1.1)–(1.3) представимо в виде (4.3). Из представления (4.3) следует единственность решения.

Представим третье слагаемое в правой части (4.3) в виде суммы

$$\begin{aligned} u_{1f}(x, y) + u_{2f}(x, y) \\ = \int_0^y \int_{l_1}^{l_2} \Gamma(x - t, y - s) f(t, s) dt ds - \int_0^y \int_{l_1}^{l_2} S(x, t, y - s) f(t, s) dt ds, \end{aligned}$$

и обозначим $u_0(x, y) = u(x, y) - u_{1f}(x, y) - u_{2f}(x, y)$.

Функция $u_0(x, y)$ является решением системы (1.1), обладающим непрерывными в Ω частными производными $(\partial/\partial x)u_0$ и $D_{0y}^\alpha u_0$, а $u_{2f}(x, y)$ – регулярное в области Ω решение системы (1.1). Это следует из оценок (3.13)–(3.16) и того, что матрица $G(x, y; t, s)$ является решением уравнения

$$\mathbf{L}G(x, y; t, 0) = 0. \quad (4.4)$$

Покажем, справедливость последнего равенства. Действительно, в силу (3.1), (3.8), (3.9), с учетом того, что $\lambda c a^2 = a_{12} a_{21} / \lambda$,

$$\begin{aligned} K_{1,n}(X_{1,n}, X_{1,n}) &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, \\ K_{1,0}(X_{1,0}, X_{1,0})(\lambda E + \Lambda) &= 0, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} & \left(D_{0y}^\alpha + \Lambda \frac{\partial}{\partial x} - A_1 \right) \Gamma_{1,n}(X_{1,n}, y) \\ &= -\frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda} \int_{X_{1,n}}^\infty g(y, \tau) \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{L}_+ \lambda a h_{2n+1}(X_{1,n}, \tau) & \mathbf{L}_+ a_{12} h_{2n}(X_{1,n}, \tau) \\ \mathbf{L}_- a_{21} h_{2n+2}(X_{1,n}, \tau) & \mathbf{L}_- \lambda a h_{2n+1}(X_{1,n}, \tau) \end{pmatrix} \right\| d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda} \int_{X_{1,n}}^{\infty} g(y, \tau) \left\| \begin{matrix} \lambda c a^2 h_{2n+2}(X_{1,n}, \tau) & a_{12} a h_{2n+1}(X_{1,n}, \tau) \\ a_{21} a h_{2n+1}(X_{1,n}, \tau) & \lambda c a^2 h_{2n}(X_{1,n}, \tau) \end{matrix} \right\| d\tau \\
&= -\frac{e^{a_0(x-t)}}{2\lambda^2} \left\| \begin{matrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{matrix} \right\| \int_{X_{1,n}}^{\infty} g(y, \tau) \left\| \begin{matrix} \lambda a h_{2n+1}(X_{1,n}, \tau) & a_{12} h_{2n}(X_{1,n}, \tau) \\ a_{21} h_{2n+2}(X_{1,n}, \tau) & \lambda a h_{2n+1}(X_{1,n}, \tau) \end{matrix} \right\| d\tau \\
&= A_2 \Gamma_{1,n}(X_{1,n}, y).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Аналогично доказывается то, что

$$\mathbf{L}\Gamma_{k,n}(X_{k,n+[k/3]}, y) = 0, \quad k = 2, 3, 4, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{4.6}$$

Из (4.5), (4.6) следует

$$\mathbf{L}S(x, t, y) = 0. \tag{4.7}$$

Из свойства 1 [2] матрицы $\Gamma(x, y)$ и (4.7) получим (4.4).

Покажем, что $u_{1f}(x, y)$ – регулярное в области Ω решение системы (1.1).

Действительно, в силу свойств 1 и 5 [2] матрицы $\Gamma(x, y)$ получим

$$\begin{aligned}
D_{0y}^{\alpha} u_{1f}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y ds \int_{l_1}^{l_2} D_{ys}^{\alpha-1} \Gamma(x-t, y-s) f(t, s) dt \\
&= f(x, y) + \int_0^y ds \int_{l_1}^{l_2} D_{ys}^{\alpha} \Gamma(x-t, y-s) [f(t, s) - f(x, s)] dt \\
&\quad + \int_0^y \left[\int_{l_1}^{l_2} A \Gamma(x-t, y-s) dt \right] f(x, s) ds \\
&\quad + \int_0^y \Lambda [\Gamma(x-l_2, y-s) - \Gamma(x-l_1, y-s)] f(x, s) ds.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Из свойства 3 матрицы $\Gamma(x, y)$ и условия (4.1), получим оценку

$$|D_{ys}^{\alpha} \Gamma(x-t, y-s) [f(t, s) - f(x, s)]|_* \leq CK |x-t|^{q-\theta-1} s^{\alpha-1} (y-s)^{\alpha\theta-1},$$

из которой, при $0 < \theta < q$, легко видеть, что первый интеграл в правой части (4.8) сходится равномерно по всем x и y для любого $q \in (0, 1)$. Равномерная сходимость второго и третьего интегралов следует из оценки (3.20). Таким образом, $D_{0y}^{\alpha} u_{1f} \in C(\Omega)$.

Для нахождения $(\partial/\partial x)u_{1f}(x, y)$ рассмотрим функцию

$$F_{\delta_1, \delta_2}(x, y) = \int_0^y ds \int_{l_1}^{x-\delta_1} \Gamma(x-t, y-s) f(t, s) dt + \int_0^y ds \int_{x+\delta_2}^{l_2} \Gamma(x-t, y-s) f(t, s) dt.$$

Очевидно, что

$$\lim_{\substack{\delta_1 \rightarrow 0 \\ \delta_2 \rightarrow 0}} F_{\delta_1, \delta_2}(x, y) = u_{1f}(x, y) \in C(\Omega).$$

Из оценки

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(x-t, y-s) [f(t, s) - f(x, s)] \right|_* \leq CK |x-t|^{q-\theta-1} s^{\alpha-1} (y-s)^{\alpha\theta-1}, \quad \theta \in (0, 1),$$

следует, что ее производная

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F_{\delta_1, \delta_2}(x, y) &= \int_0^y \Gamma(\delta_1, y-s) f(x-\delta_1, s) ds - \int_0^y \Gamma(-\delta_2, y-s) f(x+\delta_2, s) ds \\ &+ \int_0^y ds \left(\int_{l_1}^{x-\delta_1} + \int_{x+\delta_2}^{l_2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(x-t, y-s) [f(t, s) - f(x, s)] dt \\ &- \int_0^y [\Gamma(\delta_1, y-s) - \Gamma(-\delta_2, y-s)] f(x, s) ds \\ &+ \int_0^y [\Gamma(x-l_1, y-s) - \Gamma(x-l_2, y-s)] f(x, s) ds \end{aligned}$$

при $\delta_1 \rightarrow 0$ и $\delta_2 \rightarrow 0$ непрерывна в Ω .

Следовательно,

$$\lim_{\substack{\delta_1 \rightarrow 0 \\ \delta_2 \rightarrow 0}} \frac{\partial}{\partial x} F_{\delta_1, \delta_2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\substack{\delta_1 \rightarrow 0 \\ \delta_2 \rightarrow 0}} F_{\delta_1, \delta_2}(x, y)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u_{1f}(x, y) &= \int_0^y ds \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(x-t, y-s) [f(t, s) - f(x, s)] dt \\ &+ \int_0^y [\Gamma(x-l_1, y-s) - \Gamma(x-l_2, y-s)] f(x, s) ds. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Из (4.8) и (4.9) следует, что

$$D_{0y}^\alpha u_{1f} + \Lambda \frac{\partial}{\partial x} u_{1f} - A u_{1f} = f(x, y).$$

Тем самым, доказано, что $u_{1f}(x, y)$ – решение уравнения (1.1) такое, что $(\partial/\partial x)u_{1f}$, $D_{0y}^\alpha u_{1f} \in C(\Omega)$. Из оценки (3.20) следует, что $y^{1-\alpha}u_{1f}(x, y) \in C(\bar{\Omega})$.

Покажем, что функция $u(x, y)$ удовлетворяет условиям (1.2), (1.3). Из того, что $G(x, y; t, s) = G(x, y-s; t, 0)$, используя свойство 2) матрицы Грина, получим

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} \int_{l_1}^{l_2} G(x, y; t, 0) \varphi(t) dt = \lim_{s \rightarrow y} \int_{l_1}^{l_2} [D_{ys}^{\alpha-1} G(x, y; t, s)] \varphi(t) dt = \varphi(x).$$

В силу оценки (2.3) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} \int_0^y [G(x, y; l_1, s) + G(x, y; l_2, s)] \mu(s) ds &= 0, \quad l_1 < x < l_2, \\ \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} \int_0^y \int_{l_1}^{l_2} G(x, y; t, s) f(t, s) dt ds &= 0, \quad l_1 \leq x \leq l_2. \end{aligned}$$

Из полученных соотношений следует выполнимость условия (1.2).

Проверим выполнение краевых условий (1.3). Пользуясь равенствами

$$\begin{aligned} X_{1,n}(l_1, t) &= X_{3,n}(l_1, t), & X_{2,n}(l_1, t) &= X_{4,n+1}(l_1, t), \\ X_{1,n}(l_2, t) &= X_{3,n+1}(l_2, t), & X_{2,n}(l_2, t) &= X_{4,n}(l_2, t), \end{aligned}$$

легко показать, что для любых $t \in [l_1, l_2]$

$$\begin{aligned} (G - \Gamma_0)_{11}(l_1, y; t, s) &= (G - \Gamma_0)_{12}(l_1, y; t, s) = 0, \\ (G - \Gamma_0)_{21}(l_2, y; t, s) &= (G - \Gamma_0)_{22}(l_2, y; t, s) = 0. \end{aligned}$$

Учитывая последнее и то, что $\Gamma_0^{11}(l_1 - t, y) = 0$, $\Gamma_0^{22}(l_2 - t, y) = 0$, из (4.3) получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow l_i} u_i(x, y) &= \lambda \lim_{x \rightarrow l_i} \int_0^y \Gamma_0^{ii}(x - l_i, y - s) \mu_i(s) ds \\ &= \lim_{x \rightarrow l_i} \int_0^y \frac{1}{y - s} e_{1,\alpha}^{1,0} \left(-\frac{|x - l_i|}{\lambda(y - s)^\alpha} \right) \mu_i(s) ds, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Отсюда, в силу леммы 2.2.2 [5; с. 35], получим

$$\lim_{x \rightarrow l_i} u_i(x, y) = \mu_i(y), \quad i = 1, 2.$$

Из включения (2.25), оценок (2.3), (2.22) и с учетом условий, наложенных на функции $\varphi(x)$, $\mu(y)$, $f(x, y)$, видно, что $y^{1-\alpha} u_i(x, y) \in C(\overline{\Omega} \setminus (l_i, 0))$, $i = 1, 2$. При этом имеет место равенство

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow l_i \\ y \rightarrow 0}} y^{1-\alpha} u_i(x, y) &= \frac{(-1)^{i+1}}{\lambda} \lim_{\substack{x \rightarrow l_i \\ y \rightarrow 0}} y^{1-\alpha} \int_{l_i}^x \frac{e^{a_{11}/\lambda(x-t)}}{y} e_{1,\alpha}^{1,0} \left(-\frac{|x-t|}{\lambda y^\alpha} \right) \varphi_i(t) dt \\ &\quad + \lim_{\substack{x \rightarrow l_i \\ y \rightarrow 0}} y^{1-\alpha} \int_0^y \frac{e^{a_{11}/\lambda x}}{y-s} e_{1,\alpha}^{1,0} \left(-\frac{|x-l_i|}{\lambda(y-s)^\alpha} \right) \mu_i(s) ds, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Докажем непрерывность функции $y^{1-\alpha} u_i(x, y)$ в точке $(l_i, 0)$. Пусть $|x - l_i|/\lambda y^\alpha \rightarrow r$, $0 \leq r \leq \infty$, при $x \rightarrow l_i$, $y \rightarrow 0$; тогда, в силу лемм 2.2.1 и 2.2.2 [5] из (4.11) получим

$$\lim_{\substack{x \rightarrow l_i \\ y \rightarrow 0}} y^{1-\alpha} u_i(x, y) = e_{1,\alpha}^{1,1}(-r) \left[\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} \mu_i(y) - \varphi_1(l_i) \right] + \varphi_1(l_i), \quad i = 1, 2.$$

То есть, предел не зависит от r при выполнении условия (4.2). Таким образом, доказано, что $y^{1-\alpha} u_i(x, y) \in C(\overline{\Omega})$. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Нахушев, *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003.
- [2] М. О. Мамчурев, “Фундаментальное решение системы уравнений с частными производными дробного порядка”, *Дифференц. уравнения*, **46**:8 (2010), 1113–1124.
- [3] М. О. Мамчурев, “Краевые задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка в неограниченных областях”, *Докл. Адыгской (Черкесской) Международной АН*, **7**:1 (2003), 60–63.
- [4] М. О. Мамчурев, “Задача Коши в нелокальной постановке для системы уравнений с частными производными дробного порядка”, *Дифференц. уравнения*, **48**:3 (2012), 351–358.
- [5] А. В. Псху, *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005.
- [6] О. И. Маричев, *Методы вычисления интегралов от специальных функций*, Наука и техника, М., 1978.
- [7] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. В 3 т. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы*, Физматлит, М., 2003.

М. О. Мамчурев

Научно-исследовательский институт прикладной
математики и автоматизации КБНЦ РАН,
г. Нальчик
E-mail: mamchuev@rambler.ru

Поступило

19.04.2013

Исправленный вариант

20.05.2014