Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Бикчентаев, О нормальных τ -измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 3, 350–360

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10311>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:21:02

О нормальных τ -измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана

А. М. Бикчентаев

Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, $1 \geq q > 0$. Получены обобщения задач 163 и 139 из книги [1] на τ -измеримые операторы: установлено, что 1) каждый τ -компактный q -гипонормальный оператор нормален; 2) если τ -измеримый оператор A нормален и для некоторого натурального числа n оператор A^n τ -компактен, то и оператор A τ -компактен. Доказано, что если τ -измеримый оператор A гипонормален и оператор A^2 τ -компактен, то и оператор A τ -компактен. Установлено новое свойство невозрастающей перестановки произведения гипонормального и когипонормального τ -измеримых операторов. Для нормальных τ -измеримых операторов A и B показано совпадение невозрастающих перестановок операторов AB и BA . Приведены приложения полученных результатов к F -нормированным симметричным пространствам на $(\mathcal{M}, \tau)$.

Библиография: 15 названий.

DOI: 10.4213/mzm10311

Введение. Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, $\widetilde{\mathcal{M}}$ – $*$ -алгебра всех τ -измеримых операторов, $1 \geq q > 0$. В работе получены обобщения задач 163 и 139 из книги Халмоша [1] на τ -измеримые операторы: установлено, что

- 1) каждый τ -компактный q -гипонормальный оператор нормален (теорема 2.2);
- 2) если оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ нормален и для некоторого натурального числа n оператор A^n τ -компактен, то и оператор A τ -компактен (п. (i) следствия 3.2).

Доказательство теоремы 2.2 опирается на один глубокий результат из [2]. Нами показано, что если оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ гипонормален и оператор A^2 τ -компактен, то и оператор A τ -компактен (п. (i) следствия 3.4). Установлено новое свойство невозрастающих перестановок произведения гипонормального и когипонормального τ -измеримых операторов (теорема 3.5). Для нормальных операторов $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}$ показано совпадение невозрастающих перестановок операторов AB и BA (следствие 3.6). Из известного свойства перестановок (см. п. 6) леммы 1.1) имеем: неотрицательный оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ τ -компактен тогда и только тогда, когда τ -компактен A^p для всех $p > 0$. В теореме 4.1 показано, что аналогичная картина имеет место и для произведения неотрицательных операторов $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}$: τ -компактность AB эквивалентна τ -компактности операторов $A^p B^r$ для всех $p, r > 0$. Получены приложения полученных результатов к F -нормированным симметричным пространствам на $(\mathcal{M}, \tau)$.

1. Обозначения, определения и предварительные сведения. Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}^{\text{pr}}$ – решетка проекторов в $\mathcal{M}$, $\mathbb{I}$ – единица $\mathcal{M}$.

Оператор в $\mathcal{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$* , если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$. Самосопряженный оператор присоединен к $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда все проекторы из его спектрального разложения единицы принадлежат $\mathcal{M}$.

Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Замкнутый оператор X , присоединенный к $\mathcal{M}$, имеющий всюду плотную в $\mathcal{H}$ область определения $\mathcal{D}(X)$, называется *τ -измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$, что $P\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(X)$ и $\tau(\mathbb{I} - P) < \varepsilon$. Множество $\widetilde{\mathcal{M}}$ всех τ -измеримых операторов является $*$ -алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций. Для семейства $\mathcal{L} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ обозначим через $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^{\text{sa}}$ его положительную и эрмитову части, соответственно. Частичный порядок в $\mathcal{M}^{\text{sa}}$, порожденный собственным конусом $\widetilde{\mathcal{M}}^+$, будем обозначать через $\leq$.

Если X – замкнутый плотно заданный линейный оператор, присоединенный к $\mathcal{M}$ и $|X| = \sqrt{X^*X}$, то спектральное разложение $P^{|X|}(\cdot)$ содержится в $\mathcal{M}$ и $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ тогда и только тогда, когда существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что $\tau(P^{|X|}((\lambda, +\infty))) < +\infty$. Если $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $X = U|X|$ – левое полярное разложение X , то $U \in \mathcal{M}$ и $|X| \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$. При этом, если $|X| = \int_0^\infty \lambda P^{|X|}(d\lambda)$ – спектральное разложение, то $\tau(P^{|X|}((\lambda, +\infty))) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Для $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ через $\text{sl}(X)$ обозначим левый носитель оператора $|X|$.

Через $\mu_t(X)$ обозначим *невозрастающую перестановку* оператора $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$, т.е. функцию $\mu(X) : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, заданную формулой

$$\mu_t(X) = \inf\{\|XP\| : P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \tau(\mathbb{I} - P) \leq t\}, \quad t > 0.$$

Множество $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ элементарных операторов из $\mathcal{M}$ (т.е. таких $X \in \mathcal{M}$, для которых $\tau(\text{sl}(X)) < \infty$) является идеалом в $\mathcal{M}$. Множество τ -компактных операторов

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_0 &= \left\{ X \in \widetilde{\mathcal{M}} : \mu_\infty(X) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(X) = 0 \right\} \\ &= \{X \in \widetilde{\mathcal{M}} : \tau(P^{|X|}((\lambda, \infty))) < \infty \text{ для всех } \lambda > 0\} \end{aligned}$$

является идеалом в $\widetilde{\mathcal{M}}$ и содержит в себе $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ [3], [4].

Пусть m – линейная мера Лебега на $\mathbb{R}$. Ассоциированное с $(\mathcal{M}, \tau)$ некоммутативное L_p -пространство Лебега ($0 < p < \infty$) может быть определено как

$$L_p(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in \widetilde{\mathcal{M}} : \mu(X) \in L_p(\mathbb{R}^+, m)\}$$

с F -нормой (нормой для $1 \leq p < \infty$) $\|X\|_p = \|\mu(X)\|_p$, $X \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$.

ЛЕММА 1.1 (см. [4], [5], [6]). Пусть $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Тогда

- 1) $\mu_t(X) = \mu_t(|X|) = \mu_t(X^*)$ для всех $t > 0$;
- 2) если $|X| \leq |Y|$, то $\mu_t(X) \leq \mu_t(Y)$ для всех $t > 0$;
- 3) $\mu_{s+t}(X + Y) \leq \mu_s(X) + \mu_t(Y)$ для всех $s, t > 0$;
- 4) если $\tau(\text{sl}(X)) < \infty$, то $\mu_t(X) = 0$ для всех $t > \tau(\text{sl}(X))$;

5) $A \in \mathcal{M} \Leftrightarrow A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и

$$\mu_{0+}(A) \equiv \lim_{t \rightarrow 0+} \mu_t(A) = \sup_{t > 0} \mu_t(A) < \infty;$$

при этом $\|A\| = \mu_{0+}(A)$;

6) $\mu_t(|X|^p) = \mu_t(X)^p$ для всех $p > 0$ и $t > 0$.

Из 1), 6) для $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ следует, что

$$\mu_t(AA^*) = \mu_t(|A^*|^2) = \mu_t(|A^*|)^2 = \mu_t(|A|)^2 = \mu_t(|A|^2) = \mu_t(A^*A), \quad t > 0. \quad (1)$$

Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ – *-алгебра всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$ и $\tau = \text{tr}$ – канонический след, то $\widetilde{\mathcal{M}}$ совпадает с $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, а $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ и $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ суть идеалы конечномерных и компактных операторов в $\mathcal{H}$ соответственно. Имеем

$$\mu_t(X) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) \chi_{[n-1, n)}(t), \quad t > 0,$$

где $\{s_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность s -чисел оператора X , т.е. собственных чисел оператора $|X|$, взятых в порядке их убывания с учетом их кратности [7; с. 46]; χ_A – индикатор множества $A \subset \mathbb{R}$. Тогда пространство $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ есть идеал Шэттена-фон Неймана $\mathfrak{S}_p$, $0 < p < \infty$.

Пусть $1 \geq q > 0$. Оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ называется q -гипонормальным, если $(A^*A)^q \geq (AA^*)^q$. Если $q = 1$, то A называется гипонормальным. Оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ называется q -когипонормальным, если A^* q -гипонормален; нильпотентом, если $A^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Для $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ обозначим его спектр через $\sigma(A)$ и пусть $r(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ – спектральный радиус оператора A . Оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется квазинильпотентом, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n} = 0$ [8; гл. I, § 2, определение 3].

2. Нормальные τ -компактные операторы. Оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ с левым и правым полярными разложениями $A = U|A|$ и $A = |A^*|U$ нормален (т.е. $A^*A = AA^*$) тогда и только тогда, когда $|A|U = U|A|$. Действительно, если A нормален, то $(A^*A)^{1/2} = (AA^*)^{1/2}$ ($:= B$), поэтому $UB = A = BU$. Обратно, из единственности левого и правого полярных разложений из $UB = BU$ имеем $(A^*A)^{1/2} = (AA^*)^{1/2}$ и $A^*A = AA^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Если $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и унитарный оператор $U \in \widetilde{\mathcal{M}}$ коммутирует с A^* , то оператор $B = A + UA^*$ нормален. При этом, если $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$, то и $B \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$.

В частности, оператор $A + \lambda A^*$ ($\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$) нормален.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $1 \geq q > 0$. Каждый τ -компактный q -гипонормальный оператор нормален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ q -гипонормален. Поскольку

$$\mu_t((A^*A)^q) = \mu_t(|A|^{2q}) = \mu_t(A)^{2q}, \quad \mu_t((AA^*)^q) = \mu_t(|A^*|^{2q}) = \mu_t(A)^{2q}$$

для всех $t > 0$,

операторы $(A^*A)^q$ и $(AA^*)^q$ τ -компактны. Имеем $(A^*A)^q = (AA^*)^q + B$ с некоторым оператором $B \in \widetilde{\mathcal{M}}_0^+$. Покажем, что $B = 0$.

Если $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$, $Y \neq 0$ и $X \geq \mu_\infty(X) \cdot \mathbb{I}$, то существует такое число $s > 0$, что

$$\mu_s(X) < \mu_s(X + Y), \quad (2)$$

см. предложение 2.2 [2]. Предположим, что $B \neq 0$. Для $X = (AA^*)^q$, $Y = B$ имеем

$$\mu_\infty(X) = \mu_\infty(|A^*|^{2q}) = \mu_\infty(|A^*|)^{2q} = \mu_\infty(A)^{2q} = 0$$

и

$$\begin{aligned} \mu_s(A)^{2q} &= \mu_s(|A^*|)^{2q} = \mu_s((AA^*)^q) < \mu_s((AA^*)^q + B) \\ &= \mu_s((A^*A)^q) = \mu_s(|A|)^{2q} = \mu_s(A)^{2q} \end{aligned}$$

в силу (1) и (2). Получили противоречие. Таким образом, $B = 0$ и $(A^*A)^q = (AA^*)^q$. Следовательно, $A^*A = AA^*$ и теорема доказана.

Поскольку $A^* \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ для $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$, имеем

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *Каждый τ -компактный q -когипонормальный оператор нормален.*

СЛЕДСТВИЕ 2.4. *Пусть оператор $T \in \widetilde{\mathcal{M}}$ имеет вид $T = A + \lambda\mathbb{I}$, где $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Если T гипонормален или когипонормален, то T нормален.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для гипонормального T имеем

$$(A^* + \bar{\lambda}\mathbb{I})(A + \lambda\mathbb{I}) \geq (A + \lambda\mathbb{I})(A^* + \bar{\lambda}\mathbb{I}),$$

поэтому $A^*A \geq AA^*$, т.е. оператор A также гипонормален.

Для $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и гипонормального T следствие 2.4 совпадает со следствием 7 [9].

СЛЕДСТВИЕ 2.5. *Пусть оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ гипонормален, но не нормален. Тогда не существует такого τ -компактного оператора $B \in \widetilde{\mathcal{M}}$, что*

$$D := AB^* + BA^* - B^*A - A^*B \geq 0$$

и $A + B$ – когипонормальный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что такой оператор B существует. Для $C := A^*A - AA^*$ в силу когипонормальности оператора $A + B$ имеем

$$B^*B + C + D \leq BB^*. \quad (3)$$

Следовательно, τ -компактный оператор B^* гипонормален. В силу теоремы 2.2 оператор B нормален. Из (3) имеем $C + D = 0$, поэтому $C = D = 0$ и оператор A нормален. Получили противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. *Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана с точным нормальным конечным следом τ , $1 \geq q > 0$. Тогда каждый q -гипонормальный оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ нормален.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\tau(\mathbb{I}) < \infty$, то $\widetilde{\mathcal{M}} = \widetilde{\mathcal{M}}_0$.

3. Невозрастающие перестановки нормальных τ -измеримых операторов.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Тогда

- (i) если A гипонормален или когипонормален, то $\mu_t(A^2) = \mu_t(A)^2$ для всех $t > 0$;
- (ii) если A нормален, то $\mu_t(A^n) = \mu_t(A)^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ гипонормален и $t > 0$. Тогда $AAA^*A^* \leq AA^*AA^*$ и в силу свойств невозрастающих перестановок τ -измеримых операторов (см. лемму 1.1) имеем

$$\begin{aligned}\mu_t(A^2) &= \mu_t(A^{2*}) = \mu_t((A^2A^{2*})^{1/2}) = \mu_t(AAA^*A^*)^{1/2} \leq \mu_t(AA^*AA^*)^{1/2} \\ &= \mu_t((AA^*)^2)^{1/2} = \mu_t(AA^*) = \mu_t(|A^*|^2) = \mu_t(|A^*|)^2 = \mu_t(A^*)^2 = \mu_t(A)^2.\end{aligned}$$

С другой стороны, $A^*A^*AA \geq A^*AA^*A$ и

$$\begin{aligned}\mu_t(A^2) &= \mu_t((A^{2*}A^2)^{1/2}) = \mu_t(A^*A^*AA)^{1/2} \geq \mu_t(A^*AA^*A)^{1/2} \\ &= \mu_t((A^*A)^2)^{1/2} = \mu_t(A^*A) = \mu_t(|A|^2) = \mu_t(|A|)^2 = \mu_t(A)^2.\end{aligned}$$

Если $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ когипонормален, то A^* гипонормален и в силу вышедоказанного

$$\mu_t(A^2) = \mu_t(A^{2*}) = \mu_t(A^{*2}) = \mu_t(A^*)^2 = \mu_t(A)^2.$$

(ii) Пусть $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ нормален, $n \in \mathbb{N}$ и $t > 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu_t(A^n) &= \mu_t(A^{n*}) = \mu_t((A^nA^{n*})^{1/2}) = \mu_t((AA^*)^n)^{1/2} \\ &= \mu_t(|A^*|^{2n})^{1/2} = \mu_t(|A^*|)^n = \mu_t(A^*)^n = \mu_t(A)^n.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ нормален. Тогда

- (i) если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $A^n \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$, то $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$;
- (ii) если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $\tau(\text{sl}(A^n)) < \infty$, то $\tau(\text{sl}(A)) < \infty$;
- (iii) если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $A^n \in \mathcal{M}$, то $A \in \mathcal{M}$;
- (iv) если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $A^n \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$, то $A \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$;
- (v) если $n \in \mathbb{N}$ и $p > 0$, то $A \in L_p(\mathcal{M}, \tau) \iff A^n \in L_{p/n}(\mathcal{M}, \tau)$; для $p \geq n$ имеем $\|A\|_p = \|A^n\|_{p/n}^{1/n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (ii) Следует из равенства $\tau(\text{sl}(A)) = \sup\{t > 0 : \mu_t(A) > 0\}$.

(iii) Следует из равенства $\|A\| = \lim_{t \rightarrow 0+} \mu_t(A)$, см. п. 5) леммы 1.1.

(iv) Следует из (ii) и (iii).

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Если $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ нормален, то $\|A\| = r(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из п. (ii) теоремы 3.1 и п. 5) леммы 1.1 имеем равенства $\|A^n\| = \|A\|^n$, $n \in \mathbb{N}$. Остается заметить, что $r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ гипонормален или когипонормален. Тогда

- (i) если $A^2 \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$, то $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$;
- (ii) если $\tau(\text{sl}(A^2)) < \infty$, то $\tau(\text{sl}(A)) < \infty$;

- (iii) если $A^2 \in \mathcal{M}$, то $A \in \mathcal{M}$;
- (iv) если $A^2 \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$, то $A \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$;
- (v) если $p > 0$, то $A \in L_p(\mathcal{M}, \tau) \Leftrightarrow A^2 \in L_{p/2}(\mathcal{M}, \tau)$; для $p \geq 2$ имеем $\|A\|_p = \|A^2\|_{p/2}^{1/2}$.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$, X гипонормален и Y когипонормален. Тогда $\mu_t(XY) \geq \mu_t(YX)$ для всех $t > 0$. Имеем

- (i) если $XY \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ для некоторого $p > 0$, то $YX \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ и $\|YX\|_p \leq \|XY\|_p$;
- (ii) если $XY \in \mathcal{M}$, то $YX \in \mathcal{M}$ и $\|YX\| \leq \|XY\|$;
- (iii) если $XY \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$, то $YX \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$;
- (iv) если $XY \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$, то $YX \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $|XY|^2 = Y^*X^*XY \geq Y^*XX^*Y = |X^*Y|^2$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mu_t(XY)^2 &= \mu_t(|XY|)^2 = \mu_t(|XY|^2) \geq \mu_t(|X^*Y|^2) = \mu_t(|X^*Y|)^2 \\ &= \mu_t(X^*Y)^2 = \mu_t(Y^*X)^2 = \mu_t(|Y^*X|^2) = \mu_t(X^*YY^*X) \\ &\geq \mu_t(X^*Y^*YX) = \mu_t(|YX|^2) = \mu_t(|YX|)^2 = \mu_t(YX)^2, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Остальное очевидно. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. Пусть операторы $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$ нормальны, $0 < p < \infty$. Тогда $\mu_t(XY) = \mu_t(YX)$ для всех $t > 0$. Имеем

- (i) $XY \in L_p(\mathcal{M}, \tau) \Leftrightarrow YX \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ и в этом случае $\|YX\|_p = \|XY\|_p$;
- (ii) $XY \in \mathcal{M} \Leftrightarrow YX \in \mathcal{M}$ и в этом случае $\|YX\| = \|XY\|$;
- (iii) $XY \in \mathcal{F}(\mathcal{M}) \Leftrightarrow YX \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$;
- (iv) $XY \in \widetilde{\mathcal{M}}_0 \Leftrightarrow YX \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. а) Для $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ п. (iv) теоремы 3.5 установлен в лемме 3 [10].

б) Можно показать, что условие нормальности для операторов $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$ в пп. (iii) и (iv) следствия 3.6 существенно (см. также пример в [11]).

в) Для нормальных операторов $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$ имеем

$$\mu_t(XY + YX) \leq \mu_{t/2}(XY) + \mu_{t/2}(YX) = 2\mu_{t/2}(XY), \quad t > 0,$$

в силу п. 3) леммы 1.1 и следствия 3.6. Поэтому

- 1) $XY \in \widetilde{\mathcal{M}}_0 \Rightarrow XY + YX \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$;
- 2) $XY \in \mathcal{F}(\mathcal{M}) \Rightarrow XY + YX \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$;
- 3) $XY = 0 \Rightarrow XY + YX = 0$.

г) F -нормированное подпространство $\mathcal{E} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ называется F -нормированным симметричным пространством на $(\mathcal{M}, \tau)$, если из $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$, $Y \in \mathcal{E}$ и $\mu_t(X) \leq \mu_t(Y)$ ($0 < t < \infty$) следует, что $X \in \mathcal{E}$ и $\|X\|_{\mathcal{E}} \leq \|Y\|_{\mathcal{E}}$. Для этих пространств справедливы соответствующие аналоги утверждений п. (i) теоремы 3.5 и п. (i) следствия 3.6. Примеры таких пространств можно почерпнуть в [6] и [12].

4. О произведениях τ -измеримых операторов.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$, $n \in \mathbb{N}$ и числа $p_k, q_k, r > 0, k = 1, \dots, n$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $XY \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$;
- (ii) $X^{p_1} Y^{q_1} \dots X^{p_n} Y^{q_n} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$;
- (iii) $X^{p_1} Y^{q_1} \dots X^{p_n} Y^{q_n} X^r \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii) В [13; предложение] установлено, что

$$XY \in \widetilde{\mathcal{M}}_0 \iff X^{1/2} Y^{1/2} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0.$$

Следовательно, $XY \in \widetilde{\mathcal{M}}_0 \Leftrightarrow X^{2^{-m}} Y^{2^{-m}} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Выберем такое m , что $2^{-m} < \min\{p_1, q_1\}$. Тогда

$$X^{p_1} Y^{q_1} = X^{p_1 - 2^{-m}} \cdot X^{2^{-m}} Y^{2^{-m}} \cdot Y^{q_1 - 2^{-m}} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0.$$

Проверим импликацию (ii) $\Rightarrow$ (i). Легко видеть, что

$$X^{p_1} Y^{q_1} \dots X^{p_n} Y^{q_n} \cdot (X^{p_1} Y^{q_1} \dots X^{p_n})^* = |Y^{q_n/2} X^{p_n} Y^{q_{n-1}} \dots Y^{q_1} X^{p_1}|^2 \in \widetilde{\mathcal{M}}_0,$$

и в силу свойств невозрастающих перестановок τ -измеримых операторов (см. лемму 1.1) имеем $X^{p_1} Y^{q_1} \dots X^{p_n} Y^{q_n/2} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$. Повторяя эту операцию, получаем

$$X^{p_1} Y^{q_1} \dots X^{p_n} Y^{q_n/2^l} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0 \quad \text{для любого } l \in \mathbb{N}.$$

Пусть $l := \min\{j \in \mathbb{N} : q_n < 2^j q_{n-1}\}$. Тогда

$$\begin{aligned} & X^{p_1} Y^{q_1} \dots X^{p_{n-1}} Y^{q_{n-1}} X^{p_n} Y^{q_{n-1}} \\ &= X^{p_1} Y^{q_1} \dots X^{p_{n-1}} Y^{q_{n-1}} X^{p_n} Y^{q_n/2^l} \cdot Y^{q_{n-1} - q_n/2^l} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & X^{p_1} Y^{q_1} \dots X^{p_{n-1}} Y^{q_{n-1}} X^{p_n} \cdot (X^{p_1} Y^{q_1} \dots X^{p_{n-1}} Y^{q_{n-1}})^* \\ &= |X^{p_n/2} Y^{q_{n-1}} \dots Y^{q_1} X^{p_1}|^2 \in \widetilde{\mathcal{M}}_0 \end{aligned}$$

и $X^{p_1} Y^{q_1} \dots X^{p_{n-1}} Y^{q_{n-1}} X^{p_n/2} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$. Повторяя эту операцию, имеем

$$X^{p_1} Y^{q_1} \dots X^{p_{n-1}} Y^{q_{n-1}} X^{p_n/2^l} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0 \quad \text{для любого } l \in \mathbb{N}.$$

Еще раз уменьшив количество сомножителей, как это было проделано выше, получаем $X^{p_1} Y^{q_1} \dots X^{p_{n-1}} Y^{q_{n-1}/2} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$. Продолжая такой процесс, имеем $X^{p_1} Y^{q_1/2} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$. Следовательно, $X^{p_1} Y^{q_1} = X^{p_1} Y^{q_1/2} \cdot Y^{q_1/2} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$. Таким образом, для операторов $A := X^{p_1}, B := Y^{q_1}$ получаем $AB \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ и в силу установленной выше импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) имеем $(XY =) A^{1/p_1} B^{1/q_1} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$.

Импликация (iii) $\Rightarrow$ (i) проверяется аналогично. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ и $P = \text{sl}(X), Q = \text{sl}(Y)$, $n \in \mathbb{N}$ и числа $p_k, q_k, r > 0, k = 1, \dots, n$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $XY = 0$;
- (ii) $PQ = 0$;
- (iii) $X^{p_1}Y^{q_1} \dots X^{p_n}Y^{q_n} = 0$;
- (iv) $X^{p_1}Y^{q_1} \dots X^{p_n}Y^{q_n}X^r = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii) Пусть $X = \int_0^\infty \lambda P^X(d\lambda)$, $Y = \int_0^\infty \lambda P^Y(d\lambda)$ – спектральные разложения и $P_m := \int_0^m 1 P^X(d\lambda)$, $Q_m := \int_0^m 1 P^Y(d\lambda)$ для $m \in \mathbb{N}$. Тогда $P_m, Q_m \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ и $P_m \nearrow P$, $Q_m \nearrow Q$ при $m \rightarrow \infty$. Поэтому $P_m \rightarrow P$, $Q_m \rightarrow Q$ при $m \rightarrow \infty$ в сильной операторной топологии.

Так как $X = XP$ и $Y = QY$, то

$$0 = XY = XPQY = P_mXPQYQ_m = 0 \quad \text{для всех } m \in \mathbb{N}.$$

Для $X_m := P_mX$, $Y_m := YQ_m$ имеем $X_m, Y_m \in \mathcal{M}^+$ и $X_mPQY_m = 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$X_mPQY_m \cdot QPX_m = |Y_m^{1/2}QPX_m|^2 = 0$$

и $Y_m^{1/2}QPX_m = 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Продолжая такой процесс, имеем $Y_m^{2^{-j}}QPX_m = 0$ для всех $j, m \in \mathbb{N}$. Напомним, что $Y_m^{2^{-j}} \rightarrow Q_m$, $X_m^{2^{-j}} \rightarrow P_m$ при $m \rightarrow \infty$ в сильной операторной топологии. В силу раздельной сильной непрерывности произведения в $\mathcal{M}$ получаем $Q_mPX_m = 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Значит,

$$Q_mPX_m \cdot PQ_m = |X_m^{1/2}PQ_m|^2 = 0$$

и $(X_m^{1/2}PQ_m)^* = Q_mPX_m^{1/2} = 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Продолжая такой процесс, получаем $Q_mPX_m^{2^{-j}} = 0$ для всех $j, m \in \mathbb{N}$. Раздельная сильная непрерывность произведения в $\mathcal{M}$ дает $P_mQ_m = 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Теперь и силу секвенциальной совместной сильной непрерывности произведения в $\mathcal{M}$ имеем $PQ = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Если $0 = PQ$, то $0 = X \cdot PQ \cdot Y = XY$.

(i) $\Rightarrow$ (iii), (iv) Имеем

$$\begin{aligned} XY = 0 &\implies YX = (XY)^* = 0 \implies X \cdot YX = XYX = |Y^{1/2}X|^2 = 0 \\ &\implies Y^{1/2}X = 0 \implies Y^{1/2}X \cdot Y^{1/2} = |X^{1/2}Y^{1/2}|^2 = 0 \\ &\implies X^{1/2}Y^{1/2} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $XY = 0 \Leftrightarrow X^{2^{-m}}Y^{2^{-m}} = 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Остальная часть доказательства получается, если в доказательстве импликаций (i) $\Rightarrow$ (iii), (iv) теоремы 4.1 все фразы “ $\in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ ” заменить на “ $= 0$ ”.

Импlication (iii) $\Rightarrow$ (i) и (iv) $\Rightarrow$ (i) проверяются аналогично. Теорема доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ и число $p > 0$. Оператор XYX^p не может быть ненулевым нильпотентом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $(XYX^p)^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$0 = X^p \cdot (XYX^p)^n \cdot XY = (X^{p+1}Y)^{n+1},$$

поэтому $X^{p+1}Y = 0$ в силу следствия 3 [13]. Следовательно, $XYX^p = 0$ в силу теоремы 4.2. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ и число $p > 0$. Операторы XY и XYX^p не могут быть ненулевыми квазинильпотентами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ является квазинильпотентом тогда и только тогда, когда $\sigma(T) = \{0\}$ [8; гл. I, § 2, следствие 5]. Для всех $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ выполнено равенство

$$\sigma(AB) \cup \{0\} = \sigma(BA) \cup \{0\}.$$

Если XY – квазинильпотент, то

$$\{0\} = \sigma(XY) \cup \{0\} = \sigma(X^{1/2} \cdot X^{1/2}Y) \cup \{0\} = \sigma(X^{1/2}YX^{1/2}) \cup \{0\}.$$

Оператор $X^{1/2}YX^{1/2} \geq 0$, число $\|X^{1/2}YX^{1/2}\|$ принадлежит спектру $\sigma(X^{1/2}YX^{1/2})$. Следовательно, $X^{1/2}YX^{1/2} = 0$ и $XY = 0$ в силу теоремы 4.2.

Рассмотрим оператор $T = XYX^p$. Если $p = 1$, то $T \geq 0$, и поэтому $\sigma(T) = \{0\} \Leftrightarrow T = 0$. Пусть T квазинильпотентен. Если $p > 1$, то

$$\begin{aligned} \{0\} &= \sigma(T) \cup \{0\} = \sigma(XYX^p) \cup \{0\} = \sigma(XYX^{(p+1)/2} \cdot X^{(p-1)/2}) \cup \{0\} \\ &= \sigma(X^{(p+1)/2}YX^{(p+1)/2}) \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Поскольку $S = X^{(p+1)/2}YX^{(p+1)/2} \geq 0$, то $S = 0$ и $XYX^p = 0$ в силу теоремы 4.2.

Если $p < 1$, то рассмотрим $T_1 = T^*$, $X_1 = X^p$ и воспользуемся равенством $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$; черта сверху означает комплексное сопряжение. Предложение доказано.

Напомним [14; с. 208], что в гильбертовом пространстве $L_2(0, 1)$ оператор интегрирования

$$(Jf)(s) = \int_0^s f(t)dt$$

не нильпотентен, но квазинильпотентен. Равенство

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

показывает, что в $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ произведение трех проекторов может быть нильпотентом. Каждая нильпотентная матрица представляется в виде произведения трех неотрицательно определенных матриц [15; следствие 2.14].

ТЕОРЕМА 4.5. Для операторов $X \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{sa}}$, $Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ следующие условия эквивалентны:

- (i) $XY = 0$;
- (ii) $XY + aYX = 0$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$;
- (iii) $XY + ibYX = 0$ для некоторого $b \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим импликацию (ii) $\Rightarrow$ (i). Имеем

$$0 = (XY + aYX)Y - Y(XY + aYX)^* = XY^2 - Y^2X,$$

т.е. операторы X и Y^2 коммутируют. Пусть $Y^2 = \int_0^\infty \lambda P^{Y^2}(d\lambda)$ – спектральное разложение. Тогда для $Z_n := \int_0^n \lambda P^{Y^2}(d\lambda) \in \mathcal{M}^+$ по спектральной теореме имеем

$$XZ_n - Z_nX = 0 \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому $X\sqrt{Z_n} - \sqrt{Z_n}X = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $Z_n \xrightarrow{\tau} Y^2$ при $n \rightarrow \infty$, здесь и далее символ $\xrightarrow{\tau}$ означает сходимость в топологии t_τ сходимости по мере, имеем $\sqrt{Z_n} \xrightarrow{\tau} \sqrt{Y^2} = Y$ при $n \rightarrow \infty$ в силу t_τ -непрерывности отображения $A \mapsto \sqrt{A}$ ($A \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$). Поэтому $XY - YX = 0$ в силу t_τ -непрерывности алгебраических операций в $\widetilde{\mathcal{M}}$ и $XY = YX$, т.е. $(1+a)XY = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Достаточно доказать для $b \neq 0$. Имеем

$$0 = (XY + ibYX)X - X(XY + ibYX)^* = ib(YX^2 + X^2Y),$$

т.е. для пары операторов $X_1 = X^2$ и Y выполнено условие (ii) с $a = 1$. По вышедшему из виду $X^2Y = 0$. Тогда $Y \cdot X^2Y = |XY|^2 = 0$ и $XY = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Условие $Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ существенно в теореме 4.5. Для алгебры фон Неймана $\mathcal{M} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ с точным нормальным полуконечным следом $\tau = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \text{tr}_2$ положим

$$X = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $X, Y \in \mathcal{M}^{\text{sa}}$ и операторы

$$XY = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad XY + iYX = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ -1+i & 0 \end{pmatrix}$$

не τ -компактны, но $XY + YX = 0$. Поэтому все три импликации в п. в) замечания 3.7 в общем случае необратимы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. Халмош, *Гильбертово пространство в задачах*, Мир, М., 1970.
- [2] V. I. Chilin, A. V. Krygin, F. A. Sukochev, "Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators", *Integral Equations Operator Theory*, **15:2** (1992), 186–226.
- [3] I. E. Segal, "A non-commutative extension of abstract integration", *Ann. of Math.* (2), **57:3** (1953), 401–457; рус. пер.: *Математика. Сб. пер.*, **6:1** (1962), 65–132.
- [4] F. J. Yeadon, "Non-commutative L^p -spaces", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **77:1** (1975), 91–102.
- [5] T. Fack, H. Kosaki, "Generalized s -numbers of τ -measurable operators", *Pacific J. Math.*, **123:2** (1986), 269–300.
- [6] A. M. Bikchentaev, "On noncommutative function spaces", *Selected Papers in K-theory*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), **154**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 179–187.
- [7] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.
- [8] Н. Бурбаки, *Спектральная теория*, Элементы математики, Мир, М., 1972.
- [9] S. K. Berberian, "A note on hyponormal operators", *Pacific J. Math.*, **12:4** (1962), 1171–1175.
- [10] F. Kittaneh, "On the normality of operator products", *Linear and Multilinear Algebra*, **30:1-2** (1991), 1–4.
- [11] Ф. А. Сукочев, "О гипотезе А. М. Бикчентаева", *Изв. вузов. Матем.*, 2012, № 6, 67–70.
- [12] В. И. Овчинников, "Симметричные пространства измеримых операторов", *Докл. АН СССР*, **191:4** (1970), 769–771.

- [13] А. М. Бикчентаев, “Об одном свойстве L_p -пространств на полуконечных алгебрах фон Неймана”, *Матем. заметки*, **64**:2 (1998), 185–190.
- [14] Ю. И. Любич, “Линейный функциональный анализ”, *Функциональный анализ – 1*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **19**, ВИНТИ, М., 1988, 5–305.
- [15] P. Y. Wu, “The operator factorization problems”, *Linear Algebra Appl.*, **117**:1 (1989), 35–63.

А. М. Бикчентаев

Казанский (Приволжский) федеральный
университет

E-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Поступило

27.05.2013