Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Артамонов, Свойства полупростых алгебр Хопфа,
Матем. заметки, 2014, том 96, выпуск 3, 325–332

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10312>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 17:43:11

Свойства полупростых алгебр Хопфа

В. А. Артамонов

Рассматриваются полупростые конечномерных алгебры Хопфа, у которых неодномерные неприводимые модули одной размерности изоморфны. Указаны одномерные подмодули тензорных квадратов неприводимых модулей, описаны почти-кокоммутативные алгебры Хопфа и левые идеальные коидеалы.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm10312

1. Введение. Всюду в работе основное поле k алгебраически замкнуто и его характеристика либо равна нулю, либо больше размерности алгебры Хопфа H , G – группа всех гомоморфизмов алгебр $H \rightarrow k$.

Целью работы является изучение строения полупростых конечномерных алгебр Хопфа H , у которых неприводимые модули одной размерности, большей 1, изоморфны. Такая алгебра Хопфа H как полупростая алгебра допускает разложение

$$H = \left(\bigoplus_{g \in G} k e_g \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^n \text{Mat}(d_i, k) \right), \quad 1 < d_1 < \dots < d_n, \quad (1)$$

где $\{e_g, g \in G\}$ образуют систему центральных ортогональных идемпотентов, соответствующих одномерным слагаемым. Они соответствуют различным гомоморфизмам алгебр $H \rightarrow k$ и потому индексируются элементами группы G . При этом $h e_g = e_g h = \langle g, h \rangle e_g$.

Коединица ε в силу разложения (1) имеет вид

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \delta_{g,1}, & x = e_g, \\ 0, & x \in \text{Mat}(d_i, k). \end{cases}$$

Кроме того, набор чисел $1 < d_1 < \dots < d_n$ соответствует размерностям неприводимых H -модулей. Отметим, что $|G|$ делит d_i^2 [1] для любого i .

Поставленная задача описания H полностью решена в случае, когда H – комплексная групповая алгебра конечной группы G . Список таких групп приведен в [2; теорема 32.9, с. 437]. Неабелевы группы G с таким свойством имеют одно или два неприводимых неодномерных представления. Если таких представлений два, то G единственная группа порядка 72. Она имеет 4 одномерных представления и по одному двумерному и восьмимерному представлениям.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00070).

В работах [3], [4] получено описание алгебр Хопфа H с разложением (1), где $n = 1$ и $d_1^2 = |G|$. В отмеченном примере группы порядка 72 размерности неприводимых одномерных представлений равны $d_1 = 2$ и $d_2 = 8$, причем $|G| = 4 = d_1^2$.

Приведем ряд обозначений и используемых результатов.

Обозначим через E_g одномерный H -модуль с базисом u_g . Тогда $hu_g = \langle g, h \rangle u_g$ для любого элемента $h \in H$.

Категория конечномерных H -модулей ${}_H\mathcal{M}$ является тензорной. Если $M, N \in {}_H\mathcal{M}$, то $M \otimes N$ также является H -модулем. Действительно, если $h \in H$, $x \in M$, $y \in N$ и

$$\Delta(h) = \sum_h h_{(1)} \otimes h_{(2)},$$

то

$$h \cdot (x \otimes y) = \sum_h h_{(1)} x \otimes h_{(2)} y.$$

Следующее утверждение доказано в [5; предложение 1.1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть имеется произвольный одномерный неприводимый H -модуль M и E_g – одномерный H -модуль. Тогда имеется изоморфизм H -модулей

$$M \otimes E_g \simeq E_g \otimes M \simeq M.$$

Кроме того, если $f, g \in G$, то

$$E_f \otimes E_g \simeq E_{fg}.$$

Если M – произвольный левый H -модуль, то $H^* = \text{Hom}_k(M, k)$ также является левым H -модулем, где $\langle h \circ l, x \rangle = \langle l, S(h)x \rangle$ для всех $h \in H$, $l \in M^*$, $x \in M$. Если модуль M неприводим, то и M^* неприводим, причем их размерности совпадают. Таким образом, если размерность M больше 1, то $M^* \simeq M$. Это означает [5], что на M имеется такая невырожденная билинейная (косо)симметричная функция $\langle x, y \rangle$, что $\langle hx, y \rangle = \langle x, S(h)y \rangle$ для всех $x, y \in M$ и всех $h \in H$.

Обозначим через M_i , $1 \leq i \leq n$, неприводимый H -модуль размерности d_i , соответствующий компоненте $\text{Mat}(d_i, k)$ из (1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [5]. Имеются прямые разложения модулей

$$M_i \otimes M_j = \delta_{ij} \left(\bigoplus_{g \in G} E_g \right) \oplus \left(\bigoplus_{i,j=1}^n m_{ij}^t M_t \right), \quad (2)$$

где

$$m_{ij}^t = \dim_k \text{Hom}_H(M_i \otimes M_j, M_t) \geq 0.$$

При этом

$$d_i d_j = \delta_{ij} |G| + \sum_{t=1}^n m_{ij}^t d_t.$$

Отметим, что в [6; § 2.3] порядок группы G делит размерность алгебры H и каждое из чисел $d_1^2, \dots, d_n^2$.

Как и в [5] выберем в каждом модуле M_i базис $(e_1, \dots, e_{d_i})$ и в нем матрицу $U_i \in \text{GL}(d_i, k)$ невырожденной (косо)симметричной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ в M_i . Как отмечено

в [5] антипод S на матричной компоненте $\text{Mat}(d_i, k)$ действует как $S(x) = U_i {}^t x U_i^{-1}$, где ${}^t x$ – транспонирование матрицы x . В силу алгебраической замкнутости поля k можно в M_i выбрать такой базис e , что в симметрическом случае матрица U_i единичная, а в кососимметричном случае

$$U_i = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -E \\ \hline E & 0 \end{array} \right),$$

где E – единичная матрица размера $d_i/2$. Во всех случаях ${}^t U_i = \sigma_i U_i = \sigma_i U_i^{-1}$, где

$$\sigma_i = \begin{cases} 1, & \text{форма } \langle \cdot, \cdot \rangle_i \text{ симметрична,} \\ -1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3)$$

Если $g \in G$, то отображение, переводящее элемент $x \in \text{Mat}(d_i, k)$ в $g \rightarrow x$, является автоморфизмом алгебры $\text{Mat}(d_i, k)$. Поэтому существует такое проективное представление Φ_i группы G степени d_i , что $g \rightarrow x = \Phi_i(g)x\Phi_i(g)^{-1}$ для всех x . Кроме того, $x \leftarrow g = S(\Phi_i(g))xS(\Phi_i(g))^{-1}$.

Положим

$$\mathcal{D}_{g,i} = \frac{\sigma_i}{d_i} \sum_{\alpha, \beta=1}^{d_i} E_{\alpha\beta}^{(i)} \otimes (g^{-1} \rightarrow S(E_{\beta\alpha}^{(i)})) \in \text{Mat}(d_i, k)^{\otimes 2},$$

где $E_{\alpha\beta}^{(i)}$ – элементарная матрица из $\text{Mat}(d_i, k)$.

По [5] коумножение в H имеет вид

$$\Delta(e_g) = \sum_{f \in G} e_f \otimes e_{f^{-1}g} + \sum_{i=1}^n \mathcal{D}_{g,i},$$

$$\Delta(x) = \sum_{g \in G} ((g \rightarrow x) \otimes e_g + e_g \otimes (x \leftarrow g) \otimes e_g) + \sum_{p,q=1}^n \Delta_{pq}^i(x).$$

Здесь $x \in \text{Mat}(d_i, k)$ и

$$\Delta_{pq}^i: \text{Mat}(d_i, k) \rightarrow \text{Mat}(d_p, k) \otimes \text{Mat}(d_q, k)$$

– гомоморфизм алгебр, не обязательно сохраняющий единичный элемент.

Отметим основные результаты работы. В п. 2 в соответствии с предложением 2 указан явный вид подмодуля в $M_i \otimes M_i$, изоморфного одномерному подмодулю E_g ; см. предложение 3. В теореме 1 описаны односторонние левые идеалы, являющиеся коидеалами. В теореме 2 получено описание почти-кокоммутативных полупростых алгебр Хопфа рассматриваемого вида. Отметим, что это свойство важно для описания тензорных категорий представлений алгебры Хопфа. Наконец, в последнем разделе свойства коумножения интерпретируются в терминах специального графа, связанного с алгеброй Хопфа.

2. Одномерные подмодули. Используя подход из [5; § 2], найдем в разложении (2) модуля $M_i \otimes M_i$ одномерный подмодуль, изоморфный E_g . Как отмечено в [5], справедливо равенство $\mathcal{D}_{g,i}(M_i \otimes M_i) = E_g$.

Как показано в [5], модуль M_i обладает невырожденной (косо)симметричной билинейной формой $\langle x, y \rangle_i$. Выберем в модуле M_i базис

$$e_\alpha, \quad 1 \leq \alpha \leq d_i, \quad (4)$$

в котором матрица Грама имеет вид $U_i = (u_{\alpha\beta})$. Положим $U^{-1} = (\bar{u}_{\alpha\beta})$. Тогда элементы $e^\beta = \sum_\gamma e_\gamma \bar{u}_{\gamma\beta}$ при $1 \leq \beta \leq d_i$ образуют дуальный базис в M_i относительно заданной формы. При этом

$$\langle e^\alpha, e^\beta \rangle_i = \bar{u}_{\alpha\beta}, \quad \langle e_\alpha, e_\beta \rangle_i = u_{\beta\alpha}. \quad (5)$$

Положим

$$\sigma_i = \begin{cases} -1, & \text{если функции } \langle x, y \rangle_i \text{ косо-симметрична,} \\ 1, & \text{если функция } \langle x, y \rangle_i \text{ симметрична.} \end{cases}$$

В модуле M_i имеется проективное представление Φ_i группы G , причем $\Phi_i(1) = E^{(i)}$, $\Phi_i(g^{-1}) = \Phi_i(g)^{-1}$, $\text{tr } \Phi_i(g) = d_i \delta_{g1}$ и

$$g \rightharpoonup (x \otimes y) = \Phi_i(g)(x \otimes y)\Phi_i(g)^{-1}$$

для всех $x, y \in M_i$ и для всех $g \in G$. Кроме того, $S(a \otimes b) = \sigma_i(b \otimes a)$, где σ_i из (3).

Пространство $M_i \otimes M_i$ согласно [5] можно отождествить с пространством матриц $\text{Mat}(d_i, k)$, где $(a \otimes b)c = a\langle b, c \rangle_i$ для всех $a, b, c \in M_i$. Тогда $e_\alpha \otimes e^\beta$ действует как элементарная матрица $E_{\alpha\beta}^{(i)}$. При этом по [5; формулы (2.8) и (2.9)] для всех $a, b, c, d, a', b' \in M_i$ получаем

$$[(a \otimes b) \otimes (c \otimes d)] \cdot (a' \otimes b') = (a \otimes c)\langle b, a' \rangle_i \langle d, b' \rangle_i = \sigma_i(a \otimes c) \text{tr}[(b \otimes d) \cdot S(a' \otimes b')]. \quad (6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. В модуле $M_i \otimes M_i$ имеем $E_g = k\Phi_i(g)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно показать, что $\mathcal{D}_{g,i}(M_i \otimes M_i) \subseteq k\Phi_i(g)$. Пусть

$$\Phi_i(g^{-1}) = \sum_{\alpha, \beta} \bar{\phi}_{\alpha\beta}(e_\alpha \otimes e^\beta), \quad \Phi_i(g) = \sum_{\alpha, \beta} \phi_{\alpha\beta}(e_\alpha \otimes e^\beta).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{g,i} &= \frac{\sigma_i}{d_i} \sum_{\alpha, \beta=1}^{d_i} e_\alpha \otimes e^\beta \otimes (g^{-1} \rightharpoonup (e^\alpha \otimes e_\beta)) \\ &= \frac{\sigma_i}{d_i} \sum_{\alpha, \beta=1}^{d_i} e_\alpha \otimes e^\beta \otimes \Phi_i(g)^{-1}(e^\alpha \otimes e_\beta)\Phi_i(g) \\ &= \frac{\sigma_i}{d_i} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \tau, \zeta, \xi=1}^{d_i} e_\alpha \otimes e^\beta \otimes \bar{\phi}_{\gamma\tau}(e_\gamma \otimes e^\tau)(e^\alpha \otimes e_\beta)\phi_{\zeta\xi}(e_\zeta \otimes e^\xi) \\ &= \frac{\sigma_i}{d_i} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \tau, \zeta, \xi=1}^{d_i} \bar{\phi}_{\gamma\tau}\phi_{\zeta\xi}\langle e^\tau, e^\alpha \rangle_i \langle e_\beta, e_\zeta \rangle_i (e_\alpha \otimes e^\beta \otimes e_\gamma \otimes e^\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma_i}{d_i} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \tau, \zeta, \xi=1}^{d_i} \bar{\phi}_{\gamma\tau} \phi_{\zeta\xi} \bar{u}_{\tau\alpha} u_{\zeta\beta} (e_\alpha \otimes e^\beta \otimes e_\gamma \otimes e^\xi) \\
&= \frac{\sigma_i}{d_i} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \xi=1}^{d_i} (\Phi_i(g)^{-1} U_i^{-1})_{\gamma\alpha} ({}^t \Phi_i(g) U_i)_{\xi\beta} (e_\alpha \otimes e^\beta \otimes e_\gamma \otimes e^\xi).
\end{aligned}$$

Пусть $A \in \text{Mat}(d_i, k) \simeq M_i \otimes M_i$. Применяя (6) и (5), получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{g,i} A &= \left\{ \sum_{\alpha, \gamma=1}^{d_i} (\Phi_i(g)^{-1} U_i^{-1})_{\gamma\alpha} (e_\alpha \otimes e_\gamma) \right\} \frac{1}{d_i} \text{tr} \left[\sum_{\beta, \xi=1}^{d_i} ({}^t \Phi_i(g) U_i)_{\xi\beta} (e^\beta \otimes e^\xi) S(A) \right] \\
&= \left\{ \sum_{\alpha, \gamma, \lambda=1}^{d_i} (\Phi_i(g)^{-1} U_i^{-1})_{\gamma\alpha} u_{\lambda\gamma} (e_\alpha \otimes e^\lambda) \right\} \\
&\quad \times \frac{1}{d_i} \text{tr} \left[\sum_{\beta, \xi, \tau=1}^{d_i} ({}^t \Phi_i(g) U_i)_{\xi\beta} \bar{u}_{\tau\beta} (e_\tau \otimes e^\xi) S(A) \right] \\
&= \left\{ \sum_{\alpha, \lambda=1}^{d_i} (U_i \Phi_i(g)^{-1} U_i^{-1})_{\lambda\alpha} (e_\alpha \otimes e^\lambda) \right\} \frac{1}{d_i} \text{tr} \left[\sum_{\tau, \xi=1}^{d_i} ({}^t \Phi_i(g) U_i {}^t U_i^{-1})_{\xi\tau} (e_\tau \otimes e^\xi) S(A) \right] \\
&= {}^t (U_i \Phi_i(g)^{-1} U_i^{-1}) \frac{1}{d_i} \text{tr} [({}^t \Phi_i(g) U_i {}^t U_i^{-1}) S(A)] \\
&= {}^t S({}^t \Phi_i(g)^{-1}) \frac{1}{d_i} \text{tr} [({}^t \Phi_i(g) U_i {}^t U_i^{-1}) S(A)] \in k {}^t S({}^t \Phi_i(g)^{-1}).
\end{aligned}$$

В силу равенства $U_i^{-1} = \sigma_i U_i$ получаем

$$\begin{aligned}
{}^t S({}^t \Phi_i(g)^{-1}) &= {}^t (U_i \Phi_i(g)^{-1} U_i^{-1}) \\
&= {}^t U_i^{-1} {}^t \Phi_i(g)^{-1} {}^t U_i = U_i {}^t \Phi_i(g)^{-1} U_i^{-1} = S(\Phi_i(g)^{-1}) = \Phi_i(g).
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает утверждение.

3. Левые идеальные коидеалы. Целью этого раздела является описание левых идеалов, являющихся левыми (правым) коидеалами в H . Следующее утверждение вытекает из разложения (1) для H .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Каждый левый идеал C в H имеет вид*

$$C = \left(\bigoplus_{g \in G} (C \cap ke_g) \right) \oplus (C \cap \text{Mat}(d_1, k)) \oplus \cdots \oplus (C \cap \text{Mat}(d_n, k)).$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть C – ненулевой левый идеал в H , являющийся левым (правым) коидеалом. Тогда $C = H$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 4 можно считать, что C содержит либо e_g для некоторого $g \in G$, либо ненулевой элемент $x \in \text{Mat}(d_i, k)$ для некоторого i .

Пусть $e_g \in C$. Поскольку $e_g \in C$, по предложению 4 получаем, что либо

$$\mathcal{D}_{g,i} \in (C \cap \text{Mat}(d_i, k)) \otimes \text{Mat}(d_i, k),$$

либо

$$\mathcal{D}_{g,i} \in \text{Mat}(d_i, k) \otimes (C \cap \text{Mat}(d_i, k)).$$

В обоих случаях $C \cap \text{Mat}(d_i, k) \neq 0$ для любого i .

Итак, существует ненулевой элемент $x \in C \cap \text{Mat}(d_i, k)$. По формулам (12) и (13) из [5] получаем

$$\Delta(x) = \sum_{f,i} [(f \rightarrow x) \otimes e_f + e_f \otimes (x \leftarrow f)] + \sum_{i,p,q} \Delta_{pq}^i(x)$$

лежит либо в $C \otimes H$, либо в $H \otimes C$. В обоих случаях в силу предложения 4 получаем, что $e_g \in C$ для любого $g \in G$.

Итак, C содержит каждый элемент e_g , и для любого индекса i получаем, что

$$C \cap \text{Mat}(d_i, k) \neq 0.$$

Предположим, что $C \cap \text{Mat}(d_i, k) \neq \text{Mat}(d_i, k)$ для некоторого индекса i . Без ограничения общности можно считать, что $C \cap \text{Mat}(d_i, k)$ как левый идеал в $\text{Mat}(d_i, k)$ состоит из первых $t < d_i$ столбцов. Тогда $E_{jd_i}^{(i)} \notin C$ для всех j . С другой стороны, по [5] и по доказанному выше

$$\mathcal{D}_{1,i} = \frac{1}{d_i} \sum_{\alpha,\beta=1}^{d_i} E_{\alpha\beta}^{(i)} \otimes S(E_{\beta\alpha}^{(i)}) = \frac{1}{d_i} \sum_{\alpha,\beta=1}^{d_i} S(E_{\alpha\beta}^{(i)}) \otimes E_{\beta\alpha}^{(i)}$$

лежит либо в $C \otimes \text{Mat}(d_i, k)$, либо в $\text{Mat}(d_i, k) \otimes C$, что противоречит предположению поскольку $E_{jd_i}^{(i)} \notin C$ для всех j .

4. Почти кокоммутативность. В работе [7; предложение 7.2] найден критерий того, что при $n = 1$ алгебра Хопфа H кокоммутативна. Рассмотрим более общий случай почти кокоммутативности.

Напомним, что алгебра Хопфа H почти кокоммутативна [8; § 10.1], если существует такой обратимый элемент $\mathcal{R} \in H \otimes H$, что

$${}^{\tau}\Delta(x) = \mathcal{R}\Delta(x)\mathcal{R}^{-1} \quad (7)$$

для всех $x \in H$. Здесь ${}^{\tau}(a \otimes b) = b \otimes a$ для всех $a, b \in H$.

Свойство почти кокоммутативности алгебры Хопфа H [8; § 10.1] означает моноидальность категории H -модулей.

ТЕОРЕМА 2. Если алгебра H почти кокоммутативна, то группа G абелева. Обратно, если группа G абелева и $n = 1$ в разложении (1), то H почти кокоммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H почти кокоммутативна. Тогда существует обратимый элемент $\mathcal{R}$ с условием (7). Алгебра $H \otimes H$ имеет прямое разложение

$$\begin{aligned} H \otimes H = & \left(\bigoplus_{f,g \in G} k e_f \otimes e_g \right) \bigoplus_{g \in G} (\text{Mat}(d, k) \otimes e_g \oplus e_g \otimes \text{Mat}(d, k)) \\ & \oplus \left(\bigoplus_{i,j=1}^n \text{Mat}(d_i, k) \otimes \text{Mat}(d_j, k) \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathcal{R} = \sum \rho_{f,g} e_f \otimes e_g + \sum_{g \in G} (r_g \otimes e_g + e_g \otimes r'_g) + \sum_{i,j=1}^n \mathcal{R}_{ij},$$

где $\rho_{f,g} \in k$, $r_g, r'_g \in \text{Mat}(d, k)$ и $\mathcal{R}_{ij} \in \text{Mat}(d_i, k) \otimes \text{Mat}(d_j, k)$. При $x = e_g$ равенство (7) эквивалентно условию

$$\sum_{pq=g} e_q \otimes e_p + \sum_{i=1}^n {}^\tau \mathcal{D}_{g,i} = \sum_{pq=g} \rho_{p,q} e_p \otimes e_q \rho_{p,q}^{-1} + \sum_{i=1}^n \mathcal{R}_{ii} \mathcal{D}_{g,i} \mathcal{R}_{ii}^{-1}. \quad (8)$$

В частности, $e_q \otimes e_p = e_p \otimes e_q$ при $qp = g = pq$, что означает коммутативность группы G .

Обратно, пусть группа G коммутативна и $n = 1$. Положим $d = d_1$ и

$$\mathcal{R} = \sum e_f \otimes e_g + \sum_{g \in G} (S(\Phi_g) \Phi_g^{-1} \otimes e_g + e_g \otimes \Phi_g S(\Phi_g)^{-1}) + \mathcal{R}',$$

где

$$\mathcal{R}' = \frac{1}{d} \sum_{\alpha, \beta=1}^d E_{\alpha\beta} \otimes E_{\beta\alpha} \in \text{Mat}(d, k)^{\otimes 2}$$

из [5; предложение 2.1].

Нам нужно показать выполнение равенства (7) в случае, когда $x = e_g$ для некоторого $g \in G$, и в случае, когда $x \in \text{Mat}(d, k)$. Если $x = e_g$, то в силу (8) при $\rho_{f,h} = 1$ для всех $f, h \in G$ достаточно показать, что ${}^\tau \mathcal{D}_g = \mathcal{R}' \mathcal{D}_g \mathcal{R}'^{-1}$. Но это вытекает из [5; предложение 2.1].

Равенство (7) при $x \in \text{Mat}(d, k)$ эквивалентно условию

$$\begin{aligned} & \sum_{g \in G} ((x \leftarrow g) \otimes e_g + e_g \otimes (g \rightarrow x)) + {}^\tau \Delta'(x) \\ &= \sum_{g \in G} [S(\Phi_g) \Phi_g^{-1} (g \rightarrow x) \Phi_g S(\Phi_g)^{-1} \otimes e_g + e_g \otimes \Phi_g S(\Phi_g)^{-1} (x \leftarrow g) S(\Phi_g) \Phi_g^{-1}] \\ &+ \mathcal{R}' \Delta'(x) \mathcal{R}'^{-1}. \end{aligned}$$

Это равенство выполнено, поскольку

$$g \rightarrow x = \Phi_g x \Phi_g^{-1}, \quad x \leftarrow g = S(\Phi_g) x \Phi_g S(\Phi_g)^{-1},$$

и по [5; предложение 2.1] выполнено равенство

$${}^\tau \Delta'(x) = \mathcal{R}' \Delta'(x) \mathcal{R}'^{-1}.$$

5. Граф Γ_H . Свяжем с алгеброй Хопфа H из (1) граф Γ_H . Вершинами Γ_H будут всевозможные наборы пар $(i_1, \dots, i_s)$, где $i_1, \dots, i_s$ – натуральные числа от 1 до n .

В Γ_H имеется ребро $(i_1, \dots, i_s) \rightarrow (j_1, \dots, j_r)$, если имеется вложение H -модулей

$$M_{i_1} \otimes \dots \otimes M_{i_s} \rightarrow M_{j_1} \otimes \dots \otimes M_{j_r}.$$

Нетрудно видеть, что композиция путей снова является путем.

В частности, имеется путь $i \rightarrow (j, t)$, если M_i входит в разложение $M_j \otimes M_t$, т.е. кратность $m_{jt}^i > 0$. Напомним, что в силу симметрии $m_{jt}^i = m_{ij}^t$ [5; теорема 1.9 и с. 98].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть в графе Γ_H нет стрелки $i \rightarrow (j, t)$ для любого индекса t . Тогда $i = j = 1$ и $|G| = d_1^2$. Кроме того, $\bigoplus_{j \geq 2} \text{Mat}(d_j, k)$ – идеал Хопфа, причем фактор H по этому идеалу изоморфен алгебре Хопфа из [3], [4].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i \neq j$. Поскольку $M_i \otimes M_j \neq 0$, существует коэффициент $m_{ij}^t > 0$. Но в силу симметрии $m_{ij}^t = m_{jt}^i > 0$. Отсюда следует существование пути $i \rightarrow (j, t)$, что противоречит предположению.

Итак, $j = i$ и нет стрелки $i \rightarrow (i, t)$ в графе Γ_H для любого t . Поэтому $m_{ii}^l = 0$ для всех индексов l . Тогда и $\Delta_{ii}^l = 0$, откуда, как и в [5],

$$\sum_{g \in G} \mathcal{D}_{g,i} = E^{(i)} \otimes E^{(i)}.$$

Как отмечено в [5], все матрицы $\mathcal{D}_{g,i}$ имеют ранг 1, и они ортогональны. Отсюда, сравнивая ранги, получаем $|G| = d_i^2$. Но $|G| \leq d_1^2$ и $d_1 < d_2 < \dots < d_n$. Поэтому $i = 1$ и $|G| = d_1^2$. Остается применить [9].

Отметим, что в терминах графа Γ_H результаты [9] имеют следующий вид.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6 [9; предложение 4.4, теорема 4.5]. Пусть индекс i таков, что для любого $j \neq i$ существует единственный индекс t , для которого имеется путь $i \rightarrow (j, t)$. Если $i = 1$, то $J = \bigoplus_{j \geq 2} \text{Mat}(d_j, k)$ является идеалом Хопфа и H/J изоморфно алгебре Хопфа из [3], [4]. Если $i = n$, то $n = 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Natale, *Semisolvability of Semisimple Hopf Algebras of Low Dimension*, Mem. Amer. Math. Soc., **186**, no. 874, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [2] B. Huppert, *Character Theory of Finite Groups*, de Gruyter Exp. Math., **25**, Walter de Gruyter, Berlin, 1998.
- [3] V. A. Artamonov, I. A. Chubarov, “Dual algebras of some semisimple finite dimensional Hopf algebras”, *Modules and Comodules*, Trends Math., Birkhäuser Verlag, Basel, 2008, 65–85.
- [4] V. A. Artamonov, I. A. Chubarov, “Properties of some semisimple Hopf algebras”, *Algebras, Representations and Applications*, Contemp. Math., **483**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, 23–36.
- [5] V. A. Artamonov, “On semisimple Hopf algebras with few representations of dimension greater than one”, *Rev. Unión. Mat. Argentina*, **51**:2 (2010), 91–105.
- [6] S. Natale, J. Y. Plavnik, “On fusion categories with few irreducible degrees”, *Algebra Number Theory*, **6**:6 (2012), 1171–1197.
- [7] В. А. Артамонов, “О полупростых конечномерных алгебрах Хопфа”, *Матем. сб.*, **198**:9 (2007), 3–28.
- [8] S. Montgomery, *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **82**, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1993.
- [9] V. A. Artamonov, R. B. Mukhatov, R. Wisbauer, “On the category of modules over some semisimple bialgebras”, *Arabian J. Math.*, **1**:1 (2012), 29–38.

В. А. Артамонов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: artamon@mech.math.msu.su,

viacheslav.artamonov@gmail.com

Поступило

12.05.2013

Исправленный вариант

22.09.2013