Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. Ш. Ибраев, О первой кохомологии алгебраической группы и ее алгебры Ли в положительной характеристике, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 4, 512–521

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10313>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 17:33:33

О первой когомологии алгебраической группы и ее алгебры Ли в положительной характеристике

Ш. Ш. Ибраев

Получены необходимые и достаточные условия изоморфности первой группы когомологии алгебраической группы с неприводимой системой корней над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$ и соответствующей первой группы когомологии ее алгебры Ли с коэффициентами в простых модулях. Вычислены пространства внешних дифференцирований классических модулярных алгебр Ли при $p > 2$.

Библиография: 18 названий.

DOI: 10.4213/mzm10313

1. Введение

1.1. Пусть G – алгебраическая группа с неприводимой системой корней R над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 0$ и $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли, B и T – подгруппа Бореля и максимальный тор группы G соответственно. Будем считать, что унипотентный радикал U подгруппы B соответствует отрицательным корням системы корней R . Множества положительных корней обозначим через R_+ . Далее, пусть $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ – множество простых корней и $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ – фундаментальные веса. Множества доминантных и ограниченных весов определяются соответственно равенствами

$$\begin{aligned} X_+(T) &= \{\lambda \in X(T) \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geq 0 \text{ для всех } \alpha \in S\}, \\ X_1(T) &= \{\lambda \in X(T) \mid 0 \leq \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle < p \text{ для всех } \alpha \in S\}, \end{aligned}$$

где $X(T)$ – группа характера максимального тора T . Аффинная группа Вейля W_p порождается отражениями вида $s_{\alpha, rp}$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $r \in \mathbb{Z}$. Будем использовать точечное действие аффинной группы Вейля W_p на $X(T)$:

$$s_{\alpha, rp} \cdot \lambda = \lambda - \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \alpha + r\rho\alpha.$$

Для любого $\lambda \in X(T)$ существует одномерный B -модуль k_λ и индуцированный G -модуль $H^0(\lambda) = \text{Ind}_B^G(k_\lambda)$. Известно, что $H^0(\lambda) \neq 0$ тогда и только тогда, когда

Работа выполнена при поддержке бюджетной программы 055 “Научная и/или научно-техническая деятельность” МОиН Республики Казахстан по теме “Алгебры Ли и их обобщения: коды, схемы и когомологии”.

$\lambda \in X_+(T)$. Пусть $L(\lambda)$ – простой G -модуль со старшим весом $\lambda \in X_+(T)$. Его можно определить, как простой цокль модуля $H^0(\lambda)$. Если $\lambda \in X_1(T)$, то G -модули, введенные выше, могут быть рассмотрены как G^1 -модули (или $\mathfrak{g}$ -модули), причем $L(\lambda)$ остается простым при переходе к G^1 (или к алгебре Ли $\mathfrak{g}$). Для рационального G -модуля L кручение Фробениуса степени d обозначается через $L^{(d)}$. Тогда существует единственный $d > 0$ и рациональный G -модуль V такой, что $V^{(d)} = L$. Обозначим его через $L^{(-d)}$.

1.2. Известно, что в положительной характеристике особые модули (модули с нетривиальной когомологией) алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ограничены [1]. Кроме того, в категории ограниченных модулей теория представлений односвязных алгебраических групп с неприводимой системой корней и теория представлений ее алгебры Ли эквивалентны. Поэтому в категории ограниченных модулей можно одновременно рассматривать когомологию алгебраической группы G и соответствующую когомологию ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Предположим, что G определена над простым подполем F_p поля k . Это означает, что существует алгебраическая F_p -группа G^0 такая, что $G = G^0 \otimes_{F_p} k$. Тогда отображение $f \mapsto f^p$ на $k(G^0)$ является эндоморфизмом k -алгебр и индуцирует отображение $F_G: G \rightarrow G$, которое является групповым эндоморфизмом и называется *отображением (морфизмом) Фробениуса*. Ядро $G^1 = \text{Ker } F_G$ называется *ядром Фробениуса* и является инфинитезимальной подгруппой группы G .

Для короткой точной последовательности групповых схем

$$1 \rightarrow G^1 \rightarrow G \rightarrow G/G^1 \rightarrow 1$$

и G -модуля V спектральная последовательность Линдона–Хохшильда–Серра имеет вид [2; I.6.6.(3)]

$$E_2^{nm} = H^n(G/G^1, H^m(G^1, V)) \rightarrow H^{n+m}(G, V). \quad (1.1)$$

При $n + m = 1$ она определяет связь между когомологиями $H^i(G^1, V)$, $i = 0, 1$, и когомологией $H^1(G, V)$. В категории ограниченных модулей теория представлений ядра Фробениуса G^1 эквивалентна теории представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ [2; I.9.6]. Поэтому для ограниченного модуля V когомология $H^i(G^1, V)$ эквивалентна соответствующей группе $H_*^i(\mathfrak{g}, V)$ ограниченной когомологии ограниченной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, введенной Хохшильдом в [3]. Связь между ограниченной и обычной когомологиями ограниченной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ также установлена Хохшильдом [3; с. 561]. Согласно Хохшильду для простого $\mathfrak{g}$ -модуля V имеет место изоморфизм G -модулей $H^1(\mathfrak{g}, V) \cong H_*^1(\mathfrak{g}, V)$ или

$$H^1(\mathfrak{g}, V) \cong H^1(G^1, V). \quad (1.2)$$

Таким образом, знание структуры когомологий нулевой и первой степеней ядра Фробениуса G^1 дает возможность описать когомологию первой степени группы G и когомологию первой степени алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Согласно (1.1) и (1.2) решение следующей задачи нетривиально: *найти необходимые и достаточные условия изоморфности когомологий $H^1(G, V)$ и $H^1(\mathfrak{g}, V)$ для простого ограниченного конечномерного модуля V и алгебраической группы G с неприводимой системой корней R* . Настоящая работа посвящена решению поставленной задачи.

1.3. Основным результатом данной работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – алгебраическая группа с неприведенной системой корней над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 0$, $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G и V – простой ограниченный конечномерный G -модуль (или $\mathfrak{g}$ -модуль). Изоморфизм

$$H^1(G, V) \cong H^1(\mathfrak{g}, V)$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$H^1(G^1, V) \cong \text{Hom}_G(k, H^1(G^1, V)^{(-1)}).$$

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Предположим, что $H^1(G, V) \neq 0$ и

$$p > \begin{cases} 0, & \text{если } R = A_l, \\ 2, & \text{если } R = B_l, D_l, \\ 3, & \text{если } R = E_6, F_4, G_2, \\ 13, & \text{если } R = E_7, \\ 19, & \text{если } R = E_8, \\ l, & \text{если } R = C_l. \end{cases}$$

Тогда для того, чтобы когомологии $H^1(G, V)$ и $H^1(\mathfrak{g}, V)$ были изоморфны, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$V = L(\lambda) \quad \text{и} \quad \lambda \in X_1(T) \setminus \{0\}, \quad (1.3)$$

$$\text{Hom}_G(k, H^0(G^1, H^0(\lambda)/L(\lambda))^{(-1)}) \neq 0, \quad (1.4)$$

$$H^1(G^1, H^0(\lambda))^{(-1)} = 0, \quad (1.5)$$

$$H^0(G^1, H^0(\lambda)/L(\lambda)) \cong \text{Hom}_G(k, H^0(G^1, H^0(\lambda)/L(\lambda))^{(-1)}). \quad (1.6)$$

2. Доказательство основных результатов

2.1. Доказательство теоремы 1. Согласно [4; п. 1, с. 768]

$$H^n(G/G^1, H^m(G^1, V)) \cong H^n(G, H^m(G^1, V)^{(-1)}).$$

Следовательно,

$$E_2^{nm} \cong H^n(G, H^m(G^1, V)^{(-1)}). \quad (2.1)$$

Если E_∞^{nm} – стабильное значение точки (n, m) спектральной последовательности (1.1), то

$$H^j(G, V) = \bigoplus_{n+m=j} E_\infty^{nm}. \quad (2.2)$$

В случае $j = 1$ для целочисленных точек (n, m) первого квадранта $E_2^{nm} = E_\infty^{nm}$, так как $E_2^{n-2, m+1} = E_2^{n+2, m-1} = 0$. Тогда по (2.2)

$$H^1(G, V) = E_2^{10} \oplus E_2^{01}.$$

Согласно (2.1) $E_2^{1,0} = H^1(G, H^0(G^1, V)^{(-1)})$. Если $V \not\cong k$, то $H^0(G^1, V)^{(-1)} = 0$. Следовательно, $E_2^{1,0} = 0$. Тогда

$$H^1(G, V) = E_2^{01}. \quad (2.3)$$

Равенство (2.3) верно и в случае $V \cong k$. Действительно,

$$E_2^{1,0} = H^1(G, H^0(G^1, k)^{(-1)}) \cong H^1(G, k) = 0.$$

Далее, согласно (2.1)

$$E_2^{01} = H^0(G, H^1(G^1, V)^{(-1)}) \cong \text{Hom}_G(k, H^1(G^1, V)^{(-1)}).$$

Тогда, используя (2.3), получим

$$H^1(G, V) \cong \text{Hom}_G(k, H^1(G^1, V)^{(-1)}). \quad (2.4)$$

Таким образом, утверждение теоремы 1 следует из (1.2) и (2.4).

2.2. Доказательство следствия 1.1. Необходимость. Пусть

$$H^1(G, V) \neq 0 \quad \text{и} \quad H^1(G, V) \cong H^1(\mathfrak{g}, V).$$

Согласно [1] 1-особые простые $\mathfrak{g}$ -модули ограничены. Кроме того, простые G -модули со старшими ограниченными весами могут быть рассмотрены как ограниченные $\mathfrak{g}$ -модули. Они однозначно определяются (с точностью до изоморфизма) своим старшим весом. Кроме того, $H^1(G, L(0)) = 0$. Следовательно,

$$V = L(\lambda) \quad \text{и} \quad \lambda \in X_1(T) \setminus \{0\}.$$

Выполнение условия (1.3) доказано.

Пусть $V = L(\lambda)$ и $\lambda \in X_1(T) \setminus \{0\}$. Тогда по теореме 1

$$H^1(G^1, L(\lambda)) \cong \text{Hom}_G(k, H^1(G^1, L(\lambda))^{(-1)}). \quad (2.5)$$

Согласно [5; 4.3, 4.6, 4.9] при

$$p > \begin{cases} 0, & \text{если } R = A_l, \\ 2, & \text{если } R = B_l, D_l, \\ 3, & \text{если } R = E_6, F_4, G_2, \\ 13, & \text{если } R = E_7, \\ 19, & \text{если } R = E_8, \\ l, & \text{если } R = C_l, \end{cases}$$

имеет место изоморфизм G -модулей

$$H^1(G^1, L(\lambda)) \cong H^1(G^1, H^0(\lambda)) \oplus H^0(G^1, H^0(\lambda)/L(\lambda)).$$

Тогда из условия (2.5) следует, что должен выполняться следующий нетривиальный изоморфизм G -модулей:

$$H^1(G^1, H^0(\lambda)) \oplus H^0(G^1, H^0(\lambda)/L(\lambda)) \cong \text{Hom}_G(k, H^1(G^1, H^0(\lambda))^{(-1)}) \oplus \text{Hom}_G(k, H^0(G^1, H^0(\lambda)/L(\lambda))^{(-1)}). \quad (2.6)$$

Если (2.6) – нетривиальный изоморфизм, то

1) $H^1(G^1, H^0(\lambda))^{(-1)} \neq 0$ или

2) $H^0(G^1, H^0(\lambda)/L(\lambda)) \neq 0$.

Случай 1) невозможен. Действительно, согласно [5; 4.1] из условия

$$H^1(G^1, H^0(\lambda))^{(-1)} \neq 0$$

следует, что $\lambda = p\lambda_i - \alpha_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, l\}$. Тогда

$$\text{Hom}_G(k, H^1(G^1, H^0(\lambda))^{(-1)}) = 0$$

и по (2.6) имеет место нетривиальный изоморфизм

$$H^1(G^1, H^0(\lambda)) \oplus H^0(G^1, H^0(\lambda)/L(\lambda)) \cong \text{Hom}_G(k, H^0(G^1, H^0(\lambda)/L(\lambda))^{(-1)}).$$

Но это невозможно, так как

$$\text{Hom}_G(k, H^0(G^1, H^0(\lambda)/L(\lambda))^{(-1)}) \subseteq H^0(G^1, H^0(\lambda)/L(\lambda)).$$

Выполнимость условия (1.5) доказана.

Условия (1.4) и (1.6) следуют из 2), (1.5) и (2.6).

Достаточность следует из (1.2), (2.4) и (2.5).

Доказательство следствия 1.1 завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В следствии 1.1 условия (1.3) и (1.5) могут быть объединены в одно условие:

$$V = L(\lambda) \quad \text{и} \quad \lambda \in X_1(T) \setminus \{0, p\lambda_1 - \alpha_1, \dots, p\lambda_l - \alpha_l\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Нетривиальности когомологии

$$H^1(\mathfrak{g}, L(p\lambda_1 - \alpha_1)), \quad \dots, \quad H^1(\mathfrak{g}, L(p\lambda_l - \alpha_l))$$

доказаны в работе [6; теорема 2.2].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Согласно [5; 5.1–5.10] следствие 1.1 верно и в малых характеристиках поля k , за исключением следующих случаев:

1) $R = B_l$, $l \geq 4$, $p = 2$ и $\lambda = p\lambda_l - \alpha_l$;

2) $R = C_l$, $l \geq 2$, $p = 2$ и $\lambda = p\lambda_i - \alpha_i$, где $1 \leq i < l$ и $i \equiv n + 1 \pmod{2}$;

3) $R = F_4$, $p = 2$ и $\lambda = p\lambda_3 - \alpha_3$;

4) $R = G_2$, $p = 3$ и $\lambda = p\lambda_1 - \alpha_1$.

В случаях 1)–4) условия (1.5) можно исключить, так как в указанных случаях каноническое отображение $H^1(G^1, L(\lambda)) \rightarrow H^1(G^1, H^0(\lambda))$ окажется нулевым.

3. Нетривиальные когомологии

3.1. Предположим что $p \geq h$, где h – число Кокстера. Пусть α_0 – максимальный корень и $\tilde{\alpha}_0$ – максимальный короткий корень.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Если $V = L(s_{\tilde{\alpha}_0, p} \cdot 0)$, то

$$H^1(G, V) \cong H^1(\mathfrak{g}, V) \cong k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\lambda = s_{\tilde{\alpha}_0, p} \cdot 0 = (p - \langle \rho, \tilde{\alpha}_0^\vee \rangle) \tilde{\alpha}_0 = (p - h + 1) \tilde{\alpha}_0,$$

то при $p \geq h$ имеем $s_{\tilde{\alpha}_0, p} \cdot 0 \in X_1(T) \setminus \{0\}$. Кроме того, $s_{\tilde{\alpha}_0, p} \cdot 0 \neq p\lambda_i - \alpha_i$ для всех $i \in \{1, \dots, l\}$. Следовательно, $H^1(G^1, H^0(s_{\tilde{\alpha}_0, p} \cdot 0)) = 0$. Из длинной точной когомологической последовательности короткой точной последовательности

$$0 \rightarrow L(s_{\tilde{\alpha}_0, p} \cdot 0) \rightarrow H^0(s_{\tilde{\alpha}_0, p} \cdot 0) \rightarrow k \rightarrow 0$$

следует, что

$$H^1(G^1, L(s_{\tilde{\alpha}_0, p} \cdot 0)) \cong k.$$

Тогда

$$H^1(G^1, L(s_{\tilde{\alpha}_0, p} \cdot 0)) \cong \text{Hom}_G(k, H^1(G^1, L(s_{\tilde{\alpha}_0, p} \cdot 0))^{(-1)}) \cong k \neq 0.$$

Таким образом, доказано, что все условия следствия 1.1 выполняются. Следовательно,

$$H^1(G, V) \cong H^1(\mathfrak{g}, V), \quad \text{если } V = L(s_{\tilde{\alpha}_0, p} \cdot 0).$$

Наконец, согласно (1.2)

$$H^1(G, L(s_{\tilde{\alpha}_0, p} \cdot 0)) \cong H^1(\mathfrak{g}, L(s_{\tilde{\alpha}_0, p} \cdot 0)) \cong k.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Согласно результатам работ [7]–[11] для алгебраических групп ранга 2 модуль $V = L(s_{\tilde{\alpha}_0, p} \cdot 0)$, $p \geq h$, – единственный простой модуль, в котором изоморфизм $H^1(G, V) \cong H^1(\mathfrak{g}, V)$ является нетривиальным. Однако в общем случае нетривиальные изоморфные первые группы когомологий не исчерпываются простым модулем $L(s_{\tilde{\alpha}_0, p} \cdot 0)$.

ПРИМЕР. Согласно [5; 6.10] для $R = A_3$ при $p \geq 3$ имеем

$$H^1(G^1, L(s_{\tilde{\alpha}_0, p} s_{\alpha_3, 0} s_{\alpha_1, 0} \cdot 0)) = H^1(G^1, L((p-3)\lambda_1 + 2\lambda_2 + (p-3)\lambda_3)) \cong k$$

и все условия следствия 1.1 выполняются. Поэтому

$$H^1(G, L(s_{\tilde{\alpha}_0, p} s_{\alpha_3, 0} s_{\alpha_1, 0} \cdot 0)) \cong H^1(\mathfrak{g}, L(s_{\tilde{\alpha}_0, p} s_{\alpha_3, 0} s_{\alpha_1, 0} \cdot 0)) \cong k.$$

3.2. Малые характеристики.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть выполнено одно из следующих условий:

- (a) $R = A_l$, $l \geq 3$, и $p > 2$; предположим, что $l + 1$ делится на p и $V = L(\alpha_0)$;
- (b) $R = C_l$, $l \geq 3$, и $p > 2$; предположим, что l делится на p и $V = L(\tilde{\alpha}_0)$;
- (c) $R = F_4$, $p = 3$ и $V = L(\tilde{\alpha}_0)$;
- (d) $R = E_6$, $p = 3$, и $V = L(\alpha_0)$;
- (e) $R = B_l$, $l \geq 4$, $p = 2$ и $V = L(\tilde{\alpha}_0)$;
- (f) $R = C_l$, $l = 2m$, $m \geq 1$, $p = 2$ и $V = L(\tilde{\alpha}_0)$;
- (g) $R = A_l$, $l = 2m + 1$, $m \geq 2$, $p = 2$ и $V = L(\alpha_0)$;
- (h) $R = E_7$, $p = 2$ и $V = L(\alpha_0)$.

Тогда

$$H^1(G, V) \cong H^1(\mathfrak{g}, V) \cong k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [5; 6.6–6.8] во всех перечисленных случаях предложения 3.2 имеем $H^1(G^1, V) \cong k$. Далее, если λ – старший вес простого модуля V , то

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_1 + \lambda_l && \text{в случаях (a) и (g),} \\ \lambda &= \lambda_1 && \text{в случаях (e) и (h),} \\ \lambda &= \lambda_2 && \text{в случаях (b), (d) и (f),} \\ \lambda &= \lambda_4 && \text{в случае (c).} \end{aligned}$$

Тогда по [5; 4.1, 5.1] имеем $H^1(G^1, H^0(\lambda)) = 0$, за исключением случая (f). В последнем случае $H^1(G^1, H^0(\lambda))^{(-1)} \cong H^0(\lambda_1)$, но согласно замечанию 3 тривиальность когомологии $H^1(G^1, H^0(\lambda))$ необязательна.

Наконец, так как $H^1(G^1, V) \cong k$, то

$$H^1(G^1, V) \cong \text{Hom}_G(k, H^1(G^1, V)^{(-1)}) \cong k \neq 0.$$

Следовательно, все условия следствия 1.1 выполнены. Тогда согласно замечанию 3 во всех перечисленных в предложении 3.2 случаях

$$H^1(G, V) \cong H^1(\mathfrak{g}, V) \cong k.$$

ЛЕММА 3.1. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – простая фактор-алгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$ по центру $C_{\mathfrak{g}}$. Тогда

$$H^1(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}) \cong H^1(\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве $\bar{\mathfrak{g}}$ можно ввести структуру модуля над алгебрами Ли $C_{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}$ и $\bar{\mathfrak{g}}$:

$$\begin{aligned} C_{\mathfrak{g}} \times \bar{\mathfrak{g}} &\rightarrow \bar{\mathfrak{g}}, & (c, \bar{a}) &\mapsto \mu(c)\bar{a}, & \text{где } \mu - \text{ненулевая линейная форма на } C_{\mathfrak{g}}; \\ \mathfrak{g} \times \bar{\mathfrak{g}} &\rightarrow \bar{\mathfrak{g}}, & (a_1, \bar{a}_2) &\mapsto [\overline{a_1}, \bar{a}_2], & a_1 \in \mathfrak{g}, \quad \bar{a}_2 \in \bar{\mathfrak{g}}; \\ \bar{\mathfrak{g}} \times \bar{\mathfrak{g}} &\rightarrow \bar{\mathfrak{g}}, & (\bar{a}_1, \bar{a}_2) &\mapsto [\overline{a_1}, \bar{a}_2], & \bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \bar{\mathfrak{g}}. \end{aligned}$$

Короткая точная последовательность коцепных комплексов

$$0 \rightarrow (C^*(C_{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}), d) \rightarrow (C^*(\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}), d) \rightarrow (C^*(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}), d) \rightarrow 0$$

дает длинную точную когомологическую последовательность

$$\cdots \rightarrow H^0(C_{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}) \rightarrow H^1(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}) \rightarrow H^1(C_{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}) \rightarrow \cdots.$$

Так как $H^j(C_{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}) = 0$ для всех $j \geq 0$ [12; лемма 4.2], то из точности последней длинной когомологической последовательности следует, что

$$H^1(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}) \cong H^1(\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}).$$

Лемма 3.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из предложения 3.2 и леммы 3.1 следует, что в случаях (а), (d), (g) и (h) $H^1(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}) \cong k$. Случаи (g) и (h) входят в список нетривиальных внешних дифференцирований над полем характеристики 2 работы [13].

4. Внешние дифференцирования

В работе [13] вычислены размерности пространств внешних дифференцирований алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\bar{\mathfrak{g}}$ в характеристике 2. В данном пункте мы опишем пространства внешних дифференцирований для алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\bar{\mathfrak{g}}$ над алгебраически замкнутым полем k неспециальной характеристики $p > 2$. Напомним, что характеристика поля называется *специальной*, если $p = 2$ и длина корней R неодинакова или $p = 3$ и $R = G_2$ [5; 2.2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Предположим, что характеристика поля неспециальна, и пусть $p > 2$. Тогда*

$$H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})^{(-1)} \cong \begin{cases} k, & \text{если } R = A_2 \text{ и } p = 3, \\ k, & \text{если } R = A_l, \ n \geq 3 \text{ и } p \mid l + 1, \\ k, & \text{если } R = E_6 \text{ и } p = 3, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ простая, то $\mathfrak{g} \cong H^0(\alpha_0)$. Тогда по [5; 6.7] выполнено $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$.

Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ непростая. Тогда имеет место следующая короткая точная последовательность $\mathfrak{g}$ -модулей:

$$0 \rightarrow C_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow 0, \quad (4.1)$$

где $C_{\mathfrak{g}}$ – центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Действия алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на $C_{\mathfrak{g}}$ и на $\bar{\mathfrak{g}}$ индуцируются присоединенным действием. Точную последовательность (4.1) также можно рассматривать как точную последовательность G -модулей. Учитывая, что

$$H^1(\mathfrak{g}, C_{\mathfrak{g}}) = 0,$$

выделим из соответствующей длинной когомологической последовательности следующую точную последовательность:

$$0 \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}) \rightarrow H^2(\mathfrak{g}, C_{\mathfrak{g}}) \rightarrow H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}).$$

Согласно [14] $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$, кроме случая, когда $p = 3$ и $R = C_2$. В этом случае алгебра Ли $\mathfrak{g}$ простая, поэтому, не нарушая общности, получим следующую точную последовательность:

$$0 \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}) \rightarrow H^2(\mathfrak{g}, C_{\mathfrak{g}}) \rightarrow 0. \quad (4.2)$$

Из [5; 6.7] следует, что

$$H^1(\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}})^{(-1)} \cong \begin{cases} k \oplus H^0(\lambda_1) \oplus H^0(\lambda_2), & \text{если } R = A_2 \text{ и } p = 3, \\ k, & \text{если } R = A_l, n \geq 3 \text{ и } p \neq 2, p \mid l+1, \\ k, & \text{если } R = E_6, \text{ и } p = 3, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.3)$$

Согласно [15; с. 13]

$$H^2(\mathfrak{g}, C_{\mathfrak{g}})^{(-1)} \cong \begin{cases} H^0(\lambda_1) \oplus H^0(\lambda_2), & \text{если } R = A_2 \text{ и } p = 3, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.4)$$

Таким образом, предложение 4.1 следует из точности последовательности (4.2) и формул (4.3), (4.4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Предположим, что характеристика поля не специальна и пусть $p > 2$. Тогда*

$$H^1(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}})^{(-1)} \cong \begin{cases} k \oplus H^0(\lambda_1) \oplus H^0(\lambda_2), & \text{если } R = A_2 \text{ и } p = 3; \\ k, & \text{если } R = A_l, n \geq 3 \text{ и } p \mid l+1; \\ k, & \text{если } R = E_6, \text{ и } p = 3; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство следует из леммы 3.1 и формулы (4.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. При $p > 2$ характеристика поля специальна только в случае $p = 3$ для $R = G_2$. В характеристике $p = 3$ пространство внешних дифференцирований алгебры Ли типа G_2 тривиально [16; предложение § 1].

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В работе [17; лемма 7.1] (см. также [18; V.5]) доказано, что если $p > 3$, то все дифференцирования простых классических алгебр Ли являются внутренними, кроме простых фактор-алгебр Ли типа A_l , $p \mid l+1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. С. Джумадиляев, “О когомологиях модулярных алгебр Ли”, *Матем. сб.*, **119**:1 (1982), 132–149.
- [2] J. C. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups*, Pure Appl. Math., **131**, Academic Press, Boston, MA, 1987.
- [3] G. Hochschild, “Cohomology of restricted Lie algebras”, *Amer. J. Math.*, **76**:3 (1954), 555–580.
- [4] J. B. Sullivan, “Frobenius operations on Hochschild cohomology”, *Amer. J. Math.*, **102**:4 (1980), 765–780.

- [5] J. C. Jantzen, “First cohomology groups for classical Lie algebras”, *Representation Theory of Finite Groups and Finite-Dimensional Algebras*, Progr. Math., **95**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991, 289–315.
- [6] J. B. Sullivan, “Lie algebra cohomology at irreducible modules”, *Illinois J. Math.*, **23**:3 (1979), 363–373.
- [7] S. el B. Yehia, *Extensions of Simple Modules for the Universal Chevalley Group and Parabolic Subgroup*, PhD Thesis, Warwick, 1982.
- [8] Ye Jia-chen, “Extensions of simple modules for the group $Sp(4, K)$ ”, *J. London Math. Soc.* (2), **41**:1 (1990), 51–62.
- [9] Liu Jia-chun, Ye Jia-chen, “Extensions of simple modules for the algebraic group of type G_2 ”, *Commun. Algebra*, **21**:6 (1993), 1909–1946.
- [10] S. S. Ibraev, “The second cohomology groups of simple modules for G_2 ”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **8** (2011), 381–396.
- [11] S. S. Ibraev, “The second cohomology groups of simple modules over $Sp_4(k)$ ”, *Commun. Algebra*, **40**:3 (2012), 1122–1130.
- [12] F. L. Williams, “The cohomology of semisimple Lie algebras with coefficients in a Verma module”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **240** (1978), 115–127.
- [13] Д. С. Пермяков, “Дифференцирования классических алгебр Ли над полем характеристики 2”, *Вестн. ННГУ. Сер. Матем.*, 2005, № 1 (3), 123–134.
- [14] М. И. Кузнецов, Н. Г. Чебочко, “Деформации классических алгебр Ли”, *Матем. сб.*, **191**:8 (2000), 69–88.
- [15] W. L. J. van der Kallen, *Infinitesimally Central Extensions of Chevalley Groups*, Lecture Notes in Math., **356**, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [16] С. А. Кириллов, М. И. Кузнецов, Н. Г. Чебочко, “О деформациях алгебры Ли типа G_2 характеристики три”, *Изв. вузов. Матем.*, 2000, № 3, 33–38.
- [17] R. Block, “Trace form in Lie algebras”, *Canad. J. Math.*, **14** (1962), 553–564.
- [18] G. B. Seligman, *Modular Lie Algebras*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **40**, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

Ш. Ш. Ибраев

Университет «Болашақ», Казахстан

E-mail: ibrayevsh@mail.ru

Поступило

26.02.2013

Исправленный вариант

24.02.2014