Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Распределение типа распределения Бозе–Эйнштейна для неидеального газа. Двухжидкостная модель надкритического состояния и ее приложения, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 2, 237–245

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10316>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:13:15

УДК 517+536

Распределение типа распределения Бозе–Эйнштейна для неидеального газа.

Двухжидкостная модель надкритического состояния и ее приложения

В. П. Маслов

В работе строится спинодаль по значениям при $\mu = 0$ и $\mu = -\infty$ изотермы нового идеального газа на Z, P диаграмме. Дается обобщение для неидеального газа типа самосогласованного поля Боголюбова–Власова, если известен потенциал парного взаимодействия. Строится “двухжидкостная” модель надкритической области - сверхтекучая “жидкость” (молекулы-мономеры) и нормальная “жидкость” (кластеры). Дается приложение к транспортным задачам.

Библиография: 22 названия.

DOI: 10.4213/mzm10316

Нам известны два значения числа степеней свободы для данного газа при $\mu = 0$ и $\mu \rightarrow -\infty$. Обе точки на Z, P диаграмме отвечают соответственно $P = 1$ и $P = 0$. При этом спинодаль в точке $P = 1$ перпендикулярна отрезку прямой

$$Z = Z_c = \frac{\zeta(\gamma_0 + 2)}{\zeta(\gamma_0 + 1)}, \quad 0 \leq P \leq 1,$$

а в точке $P = 0$ перпендикулярна оси Z . Иначе говоря, в первой точке $dZ/dP = \infty$, а во второй $dZ/dP = 0$.

Будем говорить, что кривая, проходящая через эти точки, минимально сглажена, если кривизна κ линейна вдоль кривой и отношение кривизны в двух указанных точках пропорционально длине перпендикуляров, проведенных из каждой точки до точки пересечения. Такое минимальное сглаживание приближенно отвечает спинодали. Можно проверить на модели Ван-дер-Ваальса (ВдВ) и других эмпирических уравнениях, что совпадение со спинодалью вполне удовлетворительное.

Теперь мы знаем для каждой изотермы значение константы γ в точке $\mu = 0$ и $T < T_c$ и можем провести изотерму “распределения Бозе–Эйнштейна” вплоть до точки $P = 0$. Совпадение изотерм с моделью ВдВ получается такое же, как и для критической изотермы. Согласно [1], [2] строим бинодаль. Совпадение оказывается приблизительно с той же точностью.

Перейдем к обобщениям на неидеальный газ.

1. Нетрудно убедиться, что все рассуждения справедливы для общего гамильтониана, в частности, для

$$\frac{p^2}{2m} + V(x).$$

Можно рассмотреть и оператор Гамильтона в квазиклассическом приближении.

2. Можно также обобщить задачу на случай самосогласованного гамильтониана, т.е. когда

$$V = V\left(x, \int U(x - \xi)\rho(\xi) d\xi\right), \quad (1)$$

где $U(x - \xi)$ – потенциал парного взаимодействия Леннарда–Джонса (см. [3]) и $\rho(\xi)$ – плотность в уравнении Власова.

3. Квазиклассическая асимптотика такой квантовой задачи при $\hbar \rightarrow 0$ уже не совпадает с исходным классическим самосогласованным уравнением типа уравнения Власова, а содержит при применении метода комплексного роста квазиклассическую поправку, которая впервые была обнаружена в работе Боголюбова о слабо неидеальном бозе-газе и которой нельзя пренебречь при $\hbar \rightarrow 0$ (см. статью автора “Уравнение Власова” в [4]).

Согласно статье [5], в случае потенциала отталкивания (т.е. в области надкритической температуры $T > T_c$) возникает два типа частиц: “сверхтекучие” и нормальные.

Таким образом, в области $T > T_c$ возникает двухжидкостная ситуация, причем, частицы одной жидкости проходят без столкновения через частицы другой.

Вероятно, это кластеры и мономеры: надкритическая “жидкость-газ” мутна от кластеров, мономеры проходят через них практически без торможения.

Метод комплексного роста, разработанный подробно автором [6], заключается, грубо говоря, в том же, что и так называемое $(u - v)$ -преобразование Боголюбова: собственные функции, отвечающие собственным значениям, лежащим вблизи точек, где производная потенциала обращается в нуль, имеют вид

$$\Psi(x) = A(x)e^{-\bar{x}^2/\hbar} + O(\hbar), \quad (2)$$

где $\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i (x_i - x_i^0)^2$, при чем $A(x)$ и α_i вычисляются из уравнения в вариациях вблизи соответствующей критической точки.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Комплексным методом называется потому, что он вписывается в общую квазиклассику вида $\sqrt{\rho(x)}e^{(i/\hbar)S(x)}$, где действие $S(x)$ чисто мнимое, а ростком он называется потому, что в силу (2) вне точки $\bar{x} = 0$ функция $\Psi(x) = O(\hbar)$. А следовательно, комплексное (мнимое) действие от $S(x)$ может быть вычислено лишь вблизи точки $\bar{x} = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работе Боголюбова парадоксальный факт 3 не так бросается в глаза, поскольку в отсутствие внешнего поля квазиклассика всегда совпадает с точным решением.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В уравнениях Гинзбурга–Ландау и Гросса–Питаевского [7], а также в так называемом нелинейном уравнении Шредингера потенциал от $(x - y)$ предполагается равным δ -функции. В приведенной ситуации слабо неидеального бозе-газа

Боголюбова потенциал $V(x-y)$ можно интерпретировать так, что он медленно стремится к δ -функции в зависимости от параметра h .

Отметим, что при $U(x-\xi) = 0$ мы получаем обычную классическую формулу для кинетической энергии идеального газа.

Можно сказать, что метод комплексного ростка есть обобщение $(u-v)$ -преобразования Боголюбова на случай, например, фокальных точек и других особенностей. В частности, автору удалось распространить известное соотношение Боголюбова [3] на случай, когда присутствует внешнее поле $v(x)$. При этом оказалось, что переход при $h \rightarrow 0$, т.е. переход в классическую механику, содержит дополнительный член, обобщающий формулу Боголюбова (6'), приведенную в работе [3], и он остается в классическом пределе, поскольку несмотря на то, что значение h бесконечно мало, оно умножается на константу, вообще говоря, неограниченную. Таким образом, параметр h в этом случае включается в предельную классическую картину (см. также [6], [8]).

Лагранжево многообразие $\Lambda^n = \{x = X(\alpha), p = P(\alpha)\}$ инвариантно относительно гамильтоновой системы

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H(x, p)}{\partial x}, \quad (3)$$

где

$$H(x, p) = H_0(x, p) + \int d\mu_\alpha H_1(x, p; X(\alpha), P(\alpha)).$$

Здесь $H_0(x, p_x) = p_x^2/2 + V(x)$ и $H_1(x, p_x; y, p_y) = U(x, y)$, $\alpha \in \Lambda^n$, $d\mu_\alpha$ – инвариантная мера на Λ^n . Лагранжево многообразие лежит на поверхности $H(x, p) = \Omega$. Если Λ^n диффеоморфно проектируется на x -плоскость, то канонический оператор действует как умножение на $\exp\{(i/h)S(x)\}/\sqrt{J}$, где $S(x) = \int p dx$ на Λ^n и $J = Dx/D\mu_\alpha$.

Главный член формулы в случае присутствия внешнего поля дает следующую систему относительно функций $\tilde{g}$ и $\tilde{c}$ [10]

$$\begin{aligned} (i\nabla S \nabla - \tilde{\beta})\tilde{g} + \int U(x, X(\alpha'))\tilde{c}(X(\alpha')) d\mu_{\alpha'} + \frac{h}{2}(-\Delta\tilde{g} + \nabla \ln J \nabla \tilde{g}) &= 0, \\ (i\nabla S \nabla - \tilde{\beta})\tilde{c} - \Delta\tilde{g} + \nabla \ln J \nabla \tilde{g} - \frac{h}{2}(-\Delta\tilde{c} + \nabla \ln J \nabla \tilde{c}) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

Мы кратко описали математическую подоплеку получающегося физического результата. Возвращаемся к тем обобщениям идеального газа, которые мы производим для того, чтобы получить неидеальный газ, включив парное взаимодействие.

Математическая трактовка первого обобщения нашей задачи – это переход от гамильтониана, который равен кинетической энергии, к общему гамильтониану. Но здесь возникает трудность, которая связана с тем фактом, который мы называли вязкостью, т.е. торможением, и использовали его подспудно в задаче рассеяния. Здесь мы прежде всего обратимся к точке зрения Ландау на квантово-механическое уравнение Шрёдингера, которое очень красиво и математически безупречно применил Боголюбов в работе [3].

Как известно [5], *вероятностью перехода частицы из состояния λ_k (отвечающего собственному значению λ_k) в состояние $\lambda_{k'}$ (отвечающее собственному значению $\lambda_{k'}$) оператора H_N под действием оператора V_N называется (в квантовой механике) квадрат модуля скалярного произведения $(\Psi_{\lambda_k}, V_N \Psi_{\lambda_{k'}})$.*

Это выражение называется “матричным элементом”. Это важное физическое понятие существенно меняет представление о стандартных понятиях спектра оператора в функциональном анализе, разбивая спектр оператора на *спектральные серии* [9], [10].

В физике имеет место закон, который Боголюбов называет “энергетически выгодное состояние”. Частица с течением времени теряет энергию и переходит на более низкий уровень под влиянием возмущений типа “трения”. Сразу из “состояния” уровня λ_i на уровень λ_{i-k} она перейти не может, однако она может сначала перейти на уровень λ_{i-1} , затем на уровень λ_{i-2} и т.д. пока не спустится на уровень λ_{i-k} , а затем в конце концов на нижний уровень λ_1 , который и называется в физике “основным состоянием”.

Для того чтобы описать математически возмущения типа трения, мы должны все матричные элементы перехода на более высокие уровни энергии (на большие собственные значения) положить равными нулю. Такой оператор возмущения $\tilde{V}_N^{(s)}$ не будет уже самосопряженным.

Этот подход в простейшем случае, когда гамильтониан равен кинетической энергии, в результате процедуры торможения в конечном счете приводит нас к наименьшему собственному значению. Однако этот подход возможен отнюдь не для всех потенциальных энергий. Здесь мы должны принять во внимание понятие серии собственных значений, определенное автором в работах [11], [12].

Рассмотрим вначале следующий наглядные примеры.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим оператор Лапласа с условиями Дирихле на границе, причем область состоит из двух несимметричных непересекающихся областей. Пусть

$$\Delta U(x) = \lambda U(x), \quad U(x)|_{\Gamma} = 0$$

и

$$\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2,$$

где Γ – граница.

Очевидно, что этот оператор распадается на два разных оператора. Если, тем не менее, их рассматривать как один оператор, возникают две разные серии собственных значений и соответствующих им собственных функций U_m и $\tilde{U}_n$. Тогда для любой функции $f(x)$, принадлежащей области, включающей в себя обе границы, имеет место соотношение

$$(U_m, f(x)\tilde{U}_n) = 0, \quad f(x) = L_2(R^2). \quad (5)$$

Тогда $\{\tilde{U}_n\}$ и $\{U_m\}$ – серии.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим одномерное уравнение Шредингера

$$-\frac{h^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi + U(x)\Psi = E\Psi \quad (6)$$

с потенциалом $U(x)$, который представляет собой две несимметричные впадины (ямы), барьер между которыми уходит на бесконечность. В этом случае задача точно так же разбивается на два разных оператора Шредингера с двумя разными потенциальными впадинами.

$$E_n = \{E'_n \cup E''_n\},$$

E'_n, E''_n – серии.

Точные серии E'_n , E''_n уходят на бесконечность. Асимптотические серии E'_n , E''_n не уходят на бесконечность.

ПРИМЕР 3. Предположим, что в предыдущем примере барьер между впадинами не бесконечный, но достаточно высокий. В этом случае можно говорить об асимптотических сериях, где асимптотика берется по высокому барьеру. Квазиклассическая асимптотика также не дает возможности для собственных функций, отвечающих собственным значениям, лежащим внутри каждой из впадин, проникнуть на потенциальный барьер, если между собственными функциями нет резонанса.

Таким образом, мы привели примеры наличия разных серий, отвечающих одному и тому же гамильтониану. Приведем определения спектральной серии.

В физической энциклопедии [13] дается следующее определение спектральной серии: “Спектральные серии – группы спектральных линий, возникающие при разрешенных переходах с различных уровней на один и тот же конечный уровень. Линии спектральных серий сходятся к пределу, или границе спектральных серий. Наблюдаемая совокупность спектральных линий наиболее отчетливо разбивается на спектральные серии в спектрах элементов первых подгрупп периодической системы Менделеева: водорода, гелия, щелочных и щелочноземельных металлов”.

Как видим, это определение в точности отвечает точке зрения Ландау относительно наличия трения.

Приведем теперь точное математическое определение асимптотических спектральных серий [11].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть L_h – однопараметрическое семейство самосопряжённых операторов в $L_2(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}_+$. Фиксируем бесконечно малое число h .

Пусть выбрано стандартное число $A > 1$. Рассмотрим класс таких стандартных гладких функций $f(x)$, что

$$|f(x)| \leq A, \quad |\nabla f(x)| \leq A. \quad (7)$$

Пусть ψ – нормированная собственная функция оператора L_h с конечным собственным значением λ .

Если ψ' – другая такая собственная функция, то скажем, что она входит в A -серию относительно (ψ, λ) , если

$$(\psi', f\psi) > \frac{1}{A}$$

для некоторого f из класса (7).

Пусть μ таково, что существует собственная функция ψ' с собственным значением μ , входящим в A -серию. Это равносильно тому, что

$$\|E_\mu f\psi\| > \frac{1}{A}$$

для f из класса (7), где E_μ – проектор на собственное подпространство, отвечающее собственному значению μ .

Пусть E_μ^α – проектор на подпространство, такое, что $E_\mu^\alpha L_2 \subset E_\mu L_2$. Назовем собственным подпространством A -серии, отвечающим собственному значению μ , пересечение всех таких подпространств $E_\mu^\alpha L_2 \subset E_\mu L_2$, что

$$\|E_\mu f\psi\| - \|E_\mu^\alpha f\psi\| \leq \frac{1}{2A}.$$

Таким образом у нас задача разбивается на различные спектральные серии, которые можно трактовать как смеси различных газов или различных жидкостей. В частности, если серий только две, то по аналогии с двухжидкостной моделью Тиса–Ландау, можно говорить о двухжидкостной или двухгазовой модели. Однако автор не стал бы употреблять слово “модель”, потому что результаты получаются математически строго обоснованными.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Как видно из формулы (4), замечательный эффект присутствия параметра h в классическом пределе возможен только в случае, грубо говоря, отталкивающего потенциала. Поэтому согласно общей концепции Zeno line, “двухжидкостная” картина возможна только для надкритических состояний.

Значение флюидной надкритической области для технических приложений очень хорошо описано в недавнем обзоре В. Бражкина, В. Рыжова и др. в журнале “Успехи физических наук” [14]. Поэтому на технических эффектах двухжидкостной модели надкритических состояний мы не будем останавливаться. Мы остановимся на довольно неожиданном, но важном приложении приведенных математических результатов.

Приблизительно год назад ректором Высшей школы экономики Я. И. Кузминовым, к которой был присоединен Московский институт электроники и математики (МИЭМ), где автор работает уже более 50 лет, автору была поставлена задача математической разработки проблемы автомобильных пробок на дорогах города.

Транспортной тематике в последние годы посвящено огромное количество работ. Существуют десятки (если не сотни) журналов и электронных ресурсов, в которых регулярно публикуются статьи на эту тему; ежегодно проводятся конференции. В частности, раз в два года проходит крупнейшая конференция “Traffic and granular flow”, посвященная математическому моделированию транспортных потоков; труды этой конференции публикуются издательством Springer.

Приведем вкратце известные модели транспортных потоков, каждая из которых связана с соответствующими работами автора. Затем сформулируем нашу общую точку зрения на эту проблему, которая связана с надкритической областью.

1. Ряд моделей основаны на представлении о транспортном потоке как о движении сплошной среды (например, жидкости). Для этого выписываются уравнения на характеристики транспортного потока; чаще всего это скорость $v(x, t)$ потока в точке x в момент времени t и плотность $\rho(x, t)$ (число машин на единицу длины). В простейшем случае считается, что скорость (или поток $Q = \rho v$) есть функция плотности; зависимость $Q = Q(\rho)$ называется фундаментальной диаграммой. Уравнения на функции ρ, v аналогичны уравнениям гидродинамики (они получаются из условий сохранения общего числа машин).

Модель Лайтхилла–Уизема¹–Ричардса (LWR-модель). Считается, что движение происходит по прямой (шоссе без светофоров), т.е. $x \in \mathbb{R}$. Эволюция плотности описывается квазилинейным уравнением

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = 0.$$

Хорошо известно, что решения такого уравнения, вообще говоря, теряют гладкость: образуются разрывы (ударные волны), скорость движения которых определяется

¹Обобщение метода Уизема на комплексный случай см. в работе [6].

условиями Гюгонио. Этот эффект интерпретируется как образование пробок и их распространение по магистрали.

2. Начиная с работ Пригожина, используется описание транспортных потоков при помощи кинетических уравнений, аналогичных уравнению Больцмана. Вместо интеграла столкновений в них присутствует интеграл взаимодействия автомобилей.

3. Задачи связанные с неограниченной теорией вероятностей.

Вследствие неустойчивости решений нелинейных уравнений, возникающих при моделировании потоков, задача достоверного прогноза движения в данной транспортной сети оказывается чрезвычайно сложной. Основная проблема связана с невозможностью точно собрать исходные данные и в большой чувствительности транспортной системы по отношению к этим данным. Один из путей решения этой проблемы состоит в рассмотрении усредненных характеристик транспортной системы (см. [15]). Соответствующие модели основаны на теории массового обслуживания, теории релаксационно-шаговых процессов и т.д.

Теория случайных графов активно развивается в последние годы (в частности, в работах А. М. Райгородского и его коллег); ряд результатов этой теории применяется к описанию транспортных сетей.

Пусть, например, в заданном связном графе с заданной вероятностью p исчезает ребро; такую ситуацию можно интерпретировать как износ дороги между двумя населенными пунктами за фиксированный промежуток времени. Задача поиска максимальной вероятности p , при которой граф останется связным с вероятностью, не меньшей $1/2$, представляет собой задачу о надежности транспортной сети (несмотря на ремонтные работы на отдельных дорогах, сохраняется возможность проезда между населенными пунктами).

4. *Кластеры и теория трех фаз.* В работах Кернера, Конхойзера и др. эмпирически обнаружены состояния потока машин, названные широкими кластерами – волны большой амплитуды, скорость внутри которых мала, а вне близка к скорости свободного потока. В связи с наличием таких состояний в работах Кернера была развита теория трех фаз. Среди возможных состояний транспортных потоков выделены три основных состояния: свободное движение, широкие движущиеся кластеры и синхронизованные потоки. Последние два состояния отличаются, в первую очередь, по поведению заднего фронта. В случае кластера фронт движется с постоянной средней скоростью, в то время как в синхронизованном потоке он может ускоряться, замедляться или вообще останавливаться в некоторых точках. Эти состояния F , J , S подобны состояниям “газ – жидкость – ледовые глыбы”; переходы между ними аналогичны соответствующим фазовым переходам.

Хотя в нашей концепции по существу участвуют и концепция Пригожина и модель Уизема, но ближе всего к нашей концепции модель 4. Однако в отличие от этой модели у нас участвуют только две структуры: кластеры и мономеры. Кластеры как скопление машин, которые едут с одной скоростью, и мономеры как мотоциклы и полугоночные двухместные автомобили, которые движутся без столкновений. Фазовые переходы действительно есть. Они связаны с резким уплотнением, как мы знаем, аналогом бозе-конденсата. Это пробки, которые возникают при скоростях – температурах, меньших критической.

Основные фазовые переходы, которые происходят в этих задачах, связаны с аналитическим продолжением асимптотических формул, которые были достаточно хо-

рошо исследованы как переход через так называемые линии Стокса. Во всех моделях, которые здесь представлены, важнейшее значение имеет продолжение асимптотических формул, подобно тому, как это было сделано в работах [2], [16]. Здесь существенную роль будет играть революционная работа А. И. Шафаревича, который нашел совершенно неожиданный для специалистов в этой труднейшей области рецепт выбора правильного “корня” для многозначного продолжения асимптотических формул.

Опишем математическую подоплеку открытия А. И. Шафаревича более детально.

Спектральные серии самосопряженных h -псевдодифференциальных операторов соответствуют вещественным лагранжевым многообразиям, инвариантным относительно классической гамильтоновой системы, и вычисляются из условий квантования на них. Эти условия представляют собой требования целочисленности определенного класса когомологий: значение этого класса на произвольном цикле лагранжева многообразия должно быть целым числом. В частности, если классическая система, определяемая старшим символом оператора, интегрируема по Лиувиллю, в качестве многообразий выступают лиувиллевы торы, а условия квантования представляют собой уравнения на переменные действия [17], [18].

Для несамосопряженных операторов спектральные серии возникают в различных приложениях (например, собственные частоты оператора Орра–Зоммерфельда в теории гидродинамической устойчивости). В работах А. И. Шафаревича [19]–[22] развиты методы аналитического продолжения асимптотических решений несамосопряженных операторов на риманову поверхность (комплексное лагранжево многообразие).

Асимптотика собственных значений вычисляется из условий квантования, аналогичных вещественным условиям квантования, по циклам на комплексной поверхности постоянной энергии. В отличие от самосопряженного случая, для нахождения спектральной серии достаточно требовать выполнения условий квантования не на всех, а на одном цикле: разные циклы определяют разные спектральные серии.

Результаты, полученные А. И. Шафаревичем, безусловно, помогут найти единственный правильный выбор в приведенных моделях и определить фазовые переходы в задачах неравновесной термодинамики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. P. Maslov, “On a serious mathematical error in the “Mathematical Encyclopedia” related to the solution of the Gibbs paradox”, *Math. Notes*, **93**:5 (2013), 732–739.
- [2] V. P. Maslov, “Old Mathematical Errors in Statistical Physics”, *Russian J. Math. Phys.*, **20**:2 (2013), 214–229.
- [3] Н. Н. Боголюбов, *Избранные труды*. В 3-х т. Т. 2., Наукова Думка, Киев, 1970.
- [4] В. П. Маслов, “Уравнение Власова”, *Энциклопедия низкотемпературной плазмы*. Сер. В, Т. VII–1/3. Математическое моделирование в низкотемпературной плазме, ред. В. Е. Фортон, Янус-К, М., 2008, 209–242.
- [5] В. П. Маслов, “Математические аспекты слабо неидеального бозе- и ферми-газа на кристаллической подложке”, *Функц. анализ и его прил.*, **37**:2 (2003), 16–27.
- [6] В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях*, Нелинейный анализ и его приложения, Наука, М., 1977.
- [7] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*. Т. 9. Статистическая физика. Ч. 2. Теория конденсированного состояния, Наука, М., 1978.
- [8] В. П. Маслов, О. Ю. Шведов, *Метод комплексного роста*, УРСС, М., 2000.

- [9] В. П. Маслов, *Квантование термодинамики и ультравторичное квантование*, ИКИ, М., 2006.
- [10] V. P. Maslov, “Quasi-particles associated with Lagrangian manifolds corresponding to semiclassical self-consistent fields. IV”, *Russian J. Math. Phys.*, **3**:3 (1995), 401–406; “Quasi-particles associated with Lagrangian manifolds and (in the ergodic case) with constant energy manifolds corresponding to semiclassical self-consistent fields. V”, *Russian J. Math. Phys.*, **3**:4 (1995), 529–534; “Quasi-particles associated with Lagrangian manifolds corresponding to classical self-consistent fields. VI”, *Russian J. Math. Phys.*, **4**:1 (1996), 117–122; “Quasi-particles associated with isoenergetic manifolds corresponding to classical self-consistent fields. VII”, *Russian J. Math. Phys.*, **4**:2 (1996), 265–270; “Quasi-particles associated with isoenergetic manifolds corresponding to classical self-consistent fields. VIII”, *Russian J. Math. Phys.*, **4**:4 (1996), 539–546; “Quasi-particles associated with isoenergetic manifolds corresponding to classical self-consistent fields. IX”, *Russian J. Math. Phys.*, **5**:1 (1997), 123–130; “Quasi-particles associated with isoenergetic manifolds corresponding to classical self-consistent fields. X”, *Russian J. Math. Phys.*, **5**:2 (1997), 273–278; “Quasi-particles associated with isoenergetic manifolds corresponding to classical self-consistent fields. XI”, *Russian J. Math. Phys.*, **5**:3 (1997), 405–412.
- [11] В. П. Маслов, “Спектральные серии, сверхтекучесть и высокотемпературная сверхпроводимость”, *Матем. заметки*, **58**:6 (1995), 933–936.
- [12] V. P. Maslov, “Spectral series and quantization of thermodynamics”, *Russian J. Math. Phys.*, **9**:1 (2002), 112–122.
- [13] *Физический энциклопедический словарь*, Т. 5, Советская энциклопедия, М., 1966.
- [14] В. В. Бражкин, А. Г. Ляпин, В. Н. Рыжов, К. Траченко, Ю. Д. Фомин, Е. Н. Циок, “Где находится область сверхкритического флюида на фазовой диаграмме?”, *УФН*, **182**:11 (2012), 1137–1156.
- [15] P. Lotito, J.-P. Quadrat, E. Mancinelli, “Traffic assignment & Gibbs–Maslov semirings”, *Idempotent Mathematics and Mathematical Physics*, Contemp. Math., **377**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 209–219.
- [16] В. П. Маслов, “Эффект измерительного прибора в “бозе-конденсате” классического газа, в фазовом переходе и в экспериментах с отрицательным давлением”, *ТМФ*, **175**:1 (2013), 93–131.
- [17] В. П. Маслов, *Теория возмущений и асимптотические методы*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1965.
- [18] В. П. Маслов, “Аналитическое продолжение асимптотических формул и аксиоматика термодинамики и квазитермодинамики”, *Функц. анализ и его прил.*, **28**:4 (1994), 28–41.
- [19] А. И. Есина, А. И. Шафаревич, “Условия квантования на римановых поверхностях и квазиклассический спектр оператора Шрёдингера с комплексным потенциалом”, *Матем. заметки*, **88**:2 (2010), 229–248.
- [20] H. Roohian, A. I. Shafarevich, “Semiclassical asymptotics of the spectrum of a nonselfadjoint operator on the sphere”, *Russian J. Math. Phys.*, **16**:2 (2009), 309–314.
- [21] H. Roohian, A. I. Shafarevich, “Semiclassical asymptotic behavior of the spectrum of a nonselfadjoint elliptic operator on a two-dimensional surface of revolution”, *Russian J. Math. Phys.*, **17**:3 (2010), 328–333.
- [22] A. I. Esina, A. I. Shafarevich, “Analogues of Bohr–Sommerfeld–Maslov quantization conditions on Riemann surfaces and spectral series of nonself-adjoint operators”, *Russian J. Math. Phys.*, **20**:2 (2013), 172–181.

В. П. Маслов

Московский государственный институт электроники
и математики – Высшая школа экономики
E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Поступило

19.04.2013