Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Алымкулов, Т. Д. Асылбеков, С. Ф. Долбеева, Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 4, 483–487

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10317>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 17:56:01

Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка

К. Алымкулов, Т. Д. Асылбеков, С. Ф. Долбеева

Рассматривается бисингулярная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения. Построена асимптотика решения в виде суммы внешнего разложения и аналога ряда функций пограничного слоя.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10317

В статье рассматривается краевая задача

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y'' + xy' - q(x)y = f(x), \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = y^0, \quad (2)$$

где ε – малый положительный параметр, y^0 – заданная постоянная, $q(x) \in C^\infty[0, 1]$, $f(x) \in C^\infty[0, 1]$, $q(0) = 1$, $q(x) \geq 1$.

Для невозмущенного уравнения (1) точка $x = 0$ является регулярной особой точкой, поэтому задача (1), (2) называется *бисингулярно возмущенной* [1] или *задачей с точкой поворота* [2].

Решение невозмущенной задачи

$$My \equiv xy' - q(x)y = f(x), \quad (3)$$

представляется в виде

$$y_0(x) = xp(x) \left[y^{(0)} + \int_1^x r(s)s^{-2} ds \right], \quad (4)$$

где

$$r(x) = \frac{f(x)}{p(x)}, \quad p(x) = \exp \left\{ \int_1^x \frac{q(s) - 1}{s} ds \right\}.$$

Работа выполнена при поддержке ФЦП (грант № 02.740.11.0612), Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00259-а), Министерства образования и науки КР (грант № ЕТ-52-2012).

Выделяя в (4) главную часть интеграла в смысле Адамара [3], его можно представить в виде

$$y_0(x) = a(x) + r_1 x p(x) \ln x, \quad (5)$$

где

$$a(x) = x p(x) \left[y^{(0)} + \int_1^x (r(s) - r_0 - r_1 s) s^{-2} ds \right] + r_0 p(x) [x - 1], \quad (6)$$

$$r_0 = r(0), \quad r_1 = r'(0) = p(0)^{-1} [f'(0) - q'(0) f(0)].$$

Функция $a(x) \in C^\infty[0, 1]$, но функция $y_0(x)$ имеет слабую особенность в нуле. При стандартном построении следующих членов асимптотического разложения:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x), \quad M y_{k+1} = -y_k'', \quad (7)$$

все коэффициенты $y_k(x)$ имеют нарастающие особенности в нуле, и равномерное приближение решения задачи на всем отрезке, таким образом, невозможно. Методом согласования ряда с рядом внутреннего разложения можно, вообще говоря, построить равномерное приближение решения [1]. Но при этом надо будет немного изменить вид ряда (7), надо будет добавить члены с коэффициентами $\varepsilon^j (\ln \varepsilon)^l$.

Здесь предлагается другой путь исследования. Внешнее разложение имеет простой вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(x), \quad z_0(x) = a(x),$$

но уравнения для $z_k(x)$ надо по ходу дела несколько исправлять по сравнению с уравнениями для $y_k(x)$ так, чтобы все функции $z_k(x)$ были бесконечно дифференцируемыми.

Здесь доказана следующая

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены указанные выше условия относительно $q(x)$ и $f(x)$. Тогда асимптотику решения задачи (1), (2) можно представить в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (z_k(x) + \pi_k(t)), \quad \varepsilon = \mu^2, \quad x = \mu t, \quad (8)$$

где $z_k(x) \in C^\infty[0, 1]$, $\pi_k(t) \in C^\infty[0, \mu^{-1}]$.

Отметим, что функции $\pi_k(t)$ зависят также от параметра μ , но эту зависимость мы не указываем для простоты записи. Очевидно, что ряд (8) напоминает нам ряд, получаемый методом погранфункций для решений сингулярно возмущенных задач [4].

Функция $z_0(x)$, таким образом, является решением уравнения

$$M z_0 = f(x) - c_0 x p(x), \quad \text{где } c_0 = p(0)^{-1} [f'(0) - q'(0) f(0)].$$

Коэффициенты $z_k(x)$ ряда (8) будем определять как решения уравнений

$$M z_k = -z_{k-1}''(x) - c_k x p(x), \quad \text{где } c_k = p(0)^{-1} [-z_{k-1}'''(0) + z_{k-1}''(0) q'(0)],$$

с граничным условием $z_k(1) = 0$, $k \geq 1$.

Функции $\pi_k(t)$ – это решения уравнений

$$L\pi_k \equiv \frac{d^2\pi_k}{dt^2} + t \frac{d\pi_k}{dt} - q(\mu t)\pi_k = c_k \mu t p(\mu t)$$

с граничными условиями $\pi_k(0) = -z_k(0)$, $\pi_k(\mu^{-1}) = 0$.

Далее мы используем следующие леммы.

ЛЕММА 1. *Задача*

$$My = f(x) - r_1 x p(x)$$

имеет единственное решение $y(x) \in C^\infty[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 1 вытекает из равенств (5), (6).

ЛЕММА 2. *Краевая задача*

$$L_0 v \equiv v'' + tv' - v(t) = 0, \quad v(0) = A,$$

имеет решение $v(t) = AX(t)$, где

$$X(t) = t \int_t^{\mu^{-1}} s^{-2} \exp\left(\frac{-s^2}{2}\right) ds, \quad 0 \leq X(t) \leq 1, \quad X(0) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2 очевидно.

ЛЕММА 3. *Для решения краевой задачи*

$$L_0 W = -\mu t, \quad W(0) = W(\mu^{-1}) = 0,$$

имеет место оценка

$$0 \leq W(\mu, t) \leq e^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вытекает из того, что решение этой задачи в силу принципа максимума [5], [6; § 26] единственно и представляется в виде

$$W(\mu, t) = \mu t \int_t^{\mu^{-1}} y^{-2} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \int_0^y s^2 \exp\left(\frac{s^2}{2}\right) ds dy.$$

Теперь естественно вспомнить, что функции π зависят также и от μ , и получить их оценку.

ЛЕММА 4. *Справедлива оценка*

$$|\pi_k(\mu, t)| < B_k, \tag{9}$$

где B_k – положительные постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функции

$$V_\pm(\mu, t) = \gamma_1 W(\mu, t) + \gamma_2 X(t) \pm \pi_k(\mu, t),$$

где γ_1 и γ_2 – положительные постоянные такие, что

$$\gamma_1 > |c_k| \max_{[0,1]} |p(x)|, \quad \gamma_2 > |z_k(0)|.$$

Очевидно, что

$$V_{\pm}(\mu, 0) > 0, \quad V_{\pm}(\mu, \mu^{-1}) > 0, \quad L_0 V_{\pm} \equiv \frac{d^2 V_{\pm}}{dt^2} + t \frac{dV_{\pm}}{dt} - V_{\pm} < 0.$$

Из принципа максимума вытекает, что $|\pi_k(\mu, t)| < \gamma_1 W(\mu, t) + \gamma_2 X(t)$.

Из оценок $W(\mu, t)$ и $X(t)$ вытекает утверждение леммы.

Если ввести обозначение

$$Y_n(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (z_k(x) + \pi_k(\mu, t)),$$

где $z_k(x)$, $\pi_k(\mu, t)$ – построенные выше функции, то

$$L_{\varepsilon} Y_n(x, \varepsilon) = f(x) + \varepsilon^{n+1} z_n''.$$

Пусть $y(x, \varepsilon)$ – это решение задачи (1), (2). Тогда

$$|L_{\varepsilon}(Y_n(x, \varepsilon) - y(x, \varepsilon))| < B_n \varepsilon^{n+1}, \quad Y_n(0, \varepsilon) - y(0, \varepsilon) = Y_n(1, \varepsilon) - y(1, \varepsilon) = 0.$$

Следовательно,

$$|Y_n(x, \varepsilon) - y(x, \varepsilon)| < B_n \varepsilon^{n+1}.$$

Итак, теорема доказана. Преимущество ряда (8) по сравнению с рядом, который получается методом согласования, состоит в том, что у него несколько более простой вид (отсутствуют коэффициенты, содержащие $\ln \varepsilon$), хотя он также дает равномерное приближение на всем отрезке.

Недостаток ряда (8), несомненно, состоит в том, что его коэффициенты π_k сами зависят от малого параметра μ , но оценка (9) показывает, что ряд действительно имеет асимптотический характер: каждый последующий член этого ряда при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет более быстрое стремление к нулю, чем предыдущий.

Следует отметить, что асимптотика решения рассмотренной задачи была построена методом согласования в [1] и в [7] и методом структурного сращивания в [8], т.е. она была представлена в виде

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k [u_{k,\text{out}}(x) + u_{k,\text{in}}(t) - u_{\text{cros}}(x)], \quad \varepsilon = \mu^2, \quad x = \mu t,$$

где $u_{k,\text{out}}(x)$, $u_{k,\text{in}}(t)$, $u_{\text{cros}}(x)$ – соответственно внешнее, внутреннее решения k -го приближения и их пересечение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1989.
- [2] E. M. de Jager, F. Jiang, *The Theory of Singular Perturbations*, North-Holland Ser. Appl. Math. Mech., **42**, North-Holland Publ., Amsterdam, 1996.
- [3] J. Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Hermann, Paris, 1932.

- [4] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Актуальные вопросы прикладной и вычислительной математики, Высшая школа, М., 1990.
- [5] М. Н. Protter, Н. Ф. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1967.
- [6] А. М. Ильин, А. Р. Данилин, *Асимптотические методы в анализе*, Физматлит, М., 2009.
- [7] К. В. Емельянов, “Об асимптотике решения первой краевой задачи для уравнения $\varepsilon u''(x) + \alpha a(x)u'(x) - b(x)u = f(x)$ ”, *Применение метода согласования асимптотических разложений к краевым задачам для дифференциальных уравнений*, Тр. Ин-та матем. и мех. УНЦ АН СССР, **28**, Свердловск, 1979, 5–14.
- [8] К. Алымкулов, А. З. Зулпукаров, “Равномерное приближение решения краевой задачи сингулярно возмущенного уравнения второго порядка в случае, когда невозмущенное уравнение имеет регулярную особую точку”, *Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям*, **33**, АН КиргССР, Ин-т матем., Бишкек, 1990, 118–122.

К. Алымкулов

Ошский государственный университет, Киргизия

E-mail: keldibay@mail.ru

Поступило

16.07.2012

Т. Д. Асылбеков

Ошский государственный университет, Киргизия

E-mail: keldibay@mail.ru

С. Ф. Долбеева

Челябинский государственный университет

E-mail: dolbeeva@gmail.com