Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Арутюнов, А. С. Мищенко, Редукция исчисления псевдодифференциальных операторов на некомпактном многообразии к исчислению на компактном многообразии удвоенной размерности, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 4, 488–505

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10318>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:33:10

Редукция исчисления псевдодифференциальных операторов на некомпактном многообразии к исчислению на компактном многообразии удвоенной размерности

А. А. Арутюнов, А. С. Мищенко

Работа посвящена изложению результатов, анонсированных в заметке [1]. Строится редукция (в соответствии с идеей, предложенной С. П. Новиковым) исчисления псевдодифференциальных операторов на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ к аналогичному исчислению в пространстве сечений некоторого одномерного расслоения ξ на $2n$ -мерном торе $\mathbb{T}^{2n}$. Эта редукция позволяет отождествить пространство Шварца на $\mathbb{R}^n$ с пространством гладких сечений $\Gamma^\infty(T^{2n}, \xi)$, сравнить соболевские нормы в соответствующих пространствах, псевдодифференциальные операторы в них и описать класс эллиптических операторов, приводящих в соболевских нормах к фредгольмовым операторам. Таким образом, для некоторого естественного класса эллиптических псевдодифференциальных операторов на некомпактном многообразии $\mathbb{R}^n$ строится формула индекса в соответствии с классической формулой Атьи–Зингера.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10318

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

Мы следуем идее сравнения двух естественных функциональных пространств, предложенной в 1966–68 гг. С. П. Новиковым (неопубликованное приватное сообщение).

В качестве первого функционального пространства мы рассматриваем классическое пространство Шварца $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из бесконечно-дифференцируемых функций $f(x)$, для которых выполнены стандартные оценки

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta f(x)| < \infty \quad (1.1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00057-а).

для любых мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, где α_i, β_j – целые неотрицательные числа. Здесь

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad \partial_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Вторым функциональным пространством, которое будет участвовать в сравнении, служит пространство бесконечно-дифференцируемых функций $M(\mathbb{R}^{2n}) \subset \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, удовлетворяющих условиям типа периодичности

$$h(t + e, v) \equiv h(t, v) \quad \forall e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.2)$$

$$h(t, v + e) \equiv e^{-2\pi i(t, e)} h(t, v), \quad (t, e) = t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n. \quad (1.3)$$

Как показано в работе [1], пространство $M(\mathbb{R}^{2n})$ изоморфно пространству бесконечно гладких сечений некоторого расслоения ξ тора $\mathbb{T}^{2n}$, т.е. $\Gamma^\infty(\mathbb{T}^{2n}, \xi) \approx M(\mathbb{R}^{2n})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Через Λ обозначим отображение $\Lambda: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, ставящее в соответствие функции $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ функцию от переменных $(t, v) \in \mathbb{R}^{2n}$, задаваемую рядом

$$\Lambda: f(x) \rightarrow \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} f(v + u) e^{2\pi i(u, t)}. \quad (1.4)$$

Будем обозначать через $\mathbf{I}^n \subset \mathbb{R}^n$ единичный куб: $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{I}^n \Leftrightarrow 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$.

ТЕОРЕМА 1. Ряд (1.4) сходится абсолютно. Преобразование Λ из определения 1 осуществляет изоморфизм пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ пространству $M(\mathbb{R}^{2n})$. Обратное преобразование Λ^{-1} задается по формуле

$$f(x) := \Lambda^{-1} h(t, v) = \int_{\mathbf{I}^n} h(t, x) dt. \quad (1.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. В пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ норма функции $f(x)$ задается по формуле

$$\|f\|_{p,k}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^p ((1 + \Delta)^k f(x)) \bar{f}(x) dx. \quad (1.6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. В пространстве $M(\mathbb{R}^{2n}) \subset \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ соболевская норма определяется по формуле

$$\|h\|_{p,k}^2 = \int_{\mathbf{I}^{2n}} ((1 + \Delta_t)^p (1 + \Delta_v)^k h(t, v)) \bar{h}(t, v) dt dv. \quad (1.7)$$

ТЕОРЕМА 2. Соболевские нормы пространств $\mathcal{S}$ и M эквивалентны относительно изоморфизма Λ в следующем смысле. Существуют такие положительные константы C_1 и C_2 , что выполняются следующие неравенства:

$$C_1 \|f\|_{p,k}^2 \leq \|\Lambda f\|_{p,k}^2 \leq C_2 \|f\|_{p,k}^2 \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}). \quad (1.8)$$

Более коротко: $\|f\|_{p,k} \sim \|\Lambda f\|_{p,k}$. При этом, если $p = k = 0$, то нормы совпадают, т.е. $\|f\|_{0,0} = \|\Lambda f\|_{0,0}$.

Из совпадения этих норм при $p = k = 0$ вытекает совпадение и скалярных произведений, порождаемых этими нормами. В пространстве $M(\mathbb{R}^{2n})$ скалярное произведение для функций $h_1, h_2 \in M(\mathbb{R}^{2n})$ задается формулой

$$(f, g)_M = \int_{\mathbb{R}^{2n}} h_1(t, v) \bar{h}_2(t, v) dt dv. \quad (1.9)$$

Соответствующие соболевские пространства над $\mathbb{R}^n$, отвечающие нормам с номерами (s_1, s_2) мы будем обозначать H^{s_1, s_2} , а в пространстве $M(\mathbb{R}^{2n})$ мы будем пользоваться обозначением $H_M^{s_1, s_2}$.

Пусть $D(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ – бесконечно-дифференцируемые функции с компактным носителем. В пространстве $D(\mathbb{R}^n)$ возьмем стандартную топологию [2; определение 6.3, с. 162]. Обозначим через D' пространство обобщенных функций, т.е. пространство непрерывных линейных функционалов на пространстве пробных функций D (см. [2; определение 6.7, с. 166]). Обозначим через DM образ пространства D при преобразовании Λ , т.е. $DM = \Lambda(D)$, и рассмотрим пространство DM' , состоящее из линейных функционалов над пространством пробных функций DM , непрерывных в топологии, индуцированной преобразованием Λ .

Рассмотрим отображение $\Lambda_D: D'(\mathbb{R}^n) \rightarrow DM'(\mathbb{R}^{2n})$, формально определенное следующим образом:

$$\Lambda_D f = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i(u, t)} f(u + v). \quad (1.10)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ – обобщенная функция. Ряд

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}^n} (f(u + v) e^{2\pi i(u, t)}, \widetilde{\phi}(t, v)) \quad (1.11)$$

сходится в обобщенном смысле (т.е. для каждой пробной функции $\widetilde{\phi}(t, v) \in DM$), и задает непрерывный функционал. Кроме того, $(f, \phi) = (\Lambda_D f, \Lambda \phi)$.

В $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ рассматривают (см., например, [3; с. 15]) ПДО (псевдодифференциальные операторы) с символами, определяемыми следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что определенная на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ бесконечно-дифференцируемая функция $\sigma(x, \xi)$ принадлежит пространству $\mathcal{S}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, если для любых мультииндексов α, β неравенства

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - |\beta|} \quad (1.12)$$

выполнены для некоторых положительных констант $C_{\alpha, \beta}$.

Определим более узкий класс символов ПДО, действующих в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Возьмем произвольную пару $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$. Функция $\sigma(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству $\mathcal{S}^{m_1, m_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, если для любых мультииндексов α, β найдется положительная константа $C_{\alpha, \beta}$ такая, что

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{m_1 - |\alpha|} (1 + |\xi|)^{m_2 - |\beta|} \quad \forall x, \xi. \quad (1.13)$$

Пару (m_1, m_2) будем называть *обобщенным порядком символа* σ . ПДО с символом, обладающим обобщенным порядком (m_1, m_2) , мы будем называть *псевдодифференциальным оператором обобщенного порядка* (m_1, m_2) .

Для определения псевдодифференциальных операторов над пространством $M(\mathbb{R}^{2n})$, отождествленном нами выше с пространством гладких сечений некоторого расслоения, будем пользоваться определением, данным в работе [4] (см. параграф 2, определение 2.1.1).

Рассмотрим функции на торе $\phi, \psi \in C^\infty(\mathbb{T}^{2n})$. Пусть их носители $\text{supp } \phi, \text{supp } \psi$ лежат в множестве U , где U – некоторая карта на торе, и χ – диффеоморфизм между картой U и $\mathbb{R}^{2n}$. Обозначим через χ^* индуцированный диффеоморфизм между пространствами функций с компактными носителями $\mathcal{D}(U)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$.

Рассмотрим оператор $\tilde{A}$, действующий в пространстве гладких сечений одномерного расслоения тора $\mathbb{T}^{2n}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем называть оператор $\tilde{A}$ *псевдодифференциальным оператором над пространством гладких сечений некоторого расслоения*, если для любых введенных выше функций ϕ, ψ существует такой псевдодифференциальный оператор $\tilde{A}_U$, действующий в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(U) & \xrightarrow{\quad \phi \tilde{A} \psi \quad} & \mathcal{D}(U) \\ \chi^* \downarrow & & \downarrow \chi^* \\ \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n}) & \xrightarrow{\quad \chi^*(\phi) \tilde{A}_U \chi^*(\psi) \quad} & \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n}) \end{array} \quad (1.14)$$

коммутативна.

Пусть A – ПДО с символом $\sigma(x, \xi) \in \mathcal{S}^{m_1, m_2}$, задаваемый по формуле

$$Af(x) = (2\pi)^{-n} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} \sigma(x, \xi) d\xi f(y) dy. \quad (1.15)$$

Рассмотрим оператор $\tilde{A}$, порождаемый оператором A , т.е. оператор $\tilde{A} = \Lambda A \Lambda^{-1}$, действующий в пространстве M .

ТЕОРЕМА 4. Если оператор A является ПДО с символом обобщенного порядка (m_1, m_2) , то оператор $\tilde{A}$ также является псевдодифференциальным оператором в пространстве M с символом $\sigma(\xi_1/(2\pi) + v, \xi_2)$. Оператор $\tilde{A}$ задается по формуле

$$\tilde{A}h(t, v) = \iiint_{\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}} e^{i\xi_1(t-t_y)} e^{i\xi_2(v-v_y)} \sigma\left(\frac{\xi_1}{2\pi} + v, \xi_2\right) h(t_y, v_y) d\xi_1 d\xi_2 dt_y dv_y. \quad (1.16)$$

Для любых $2n$ -мерных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ найдется такая неотрицательная константа $C_{\alpha, \beta}$, что имеет место неравенство

$$\left| \partial_{t, v}^\beta \partial_{\xi_1, \xi_2}^\alpha \sigma\left(\frac{\xi_1}{2\pi} + v, \xi_2\right) \right| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi_1|)^{m_1 - |\alpha_1|} (1 + |\xi_2|)^{m_2 - |\alpha_2|}. \quad (1.17)$$

Формулу (1.16) следует понимать в следующем смысле. Если взять функцию $h \in M(\mathbb{R}^{2n})$ и применить к ней, как к обобщенной функции, оператор $\tilde{A}$, определенный в формуле (1.16) и действующий, вообще говоря, в пространстве обобщенных

функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$, то, как будет показано при доказательстве теоремы 4, получится регулярная функция, причем принадлежащая пространству $M(\mathbb{R}^{2n})$.

Символы для псевдодифференциальных операторов, удовлетворяющих неравенству (1.17), ранее рассматривались в работе [5]. Определим понятие эллиптического оператора. Пусть A – ПДО из условия теоремы 4 и $\sigma_A(x, \xi)$ – его символ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Если существуют такие вещественные константы m^1, m^2 , что для символа $\sigma_A(x, \xi) \in \mathcal{S}^{m^1, m^2}$ при всех (x, ξ) таких, что $|x|^2 + |\xi|^2 > 0$, выполняется условие

$$|\sigma_A(x, \xi)| \geq (1 + |x|)^{m^1} (1 + |\xi|)^{m^2}, \quad (1.18)$$

то такой символ будем называть *эллиптическим символом*, а оператор A – *эллиптическим псевдодифференциальным оператором*.

ТЕОРЕМА 5. Пусть A и $\tilde{A}$ – операторы из условия теоремы 4 обобщенного порядка (m_1, m_2) . Если оператор A является эллиптическим, то для любых s_1, s_2 операторы A и $\tilde{A}$ продолжаются до фредгольмовых операторов

$$\begin{aligned} A: H^{s_1, s_2} &\rightarrow H^{s_1 - m_1, s_2 - m_2}, \\ \tilde{A}: H_M^{s_1, s_2} &\rightarrow H_M^{s_1 - m_1, s_2 - m_2}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Кроме того, имеет место следующая формула для индекса:

$$\text{index } A = \text{index } \tilde{A} = \left(\text{ch} \left[\sigma \left(\frac{\xi_1}{2\pi} + v, \xi_2 \right) \right], [\mathbb{T}^{2n}] \right). \quad (1.20)$$

В формуле (1.20) мы обозначаем через $\text{ch}[\sigma]$ характер Черна (см. [6; с. 81]) расслоения, задаваемого символом $[\sigma]$, приведенным к базе $\mathbb{T}^{2n}$ при помощи изоморфизма Тома.

Теоремы 1 и 2 выполнены авторами совместно. Теоремы 3, 4 и 5 выполнены первым автором, А. А. Арутюновым

2. Доказательства теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В главе 12 монографии [7] была доказана лемма 12.1, устанавливающая изоморфность пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и пространства $C^\infty(\mathbb{T}^2, \gamma)$, определяемого при фиксированном $\theta > 0$ следующим образом:

$$C^\infty(\mathbb{T}^2, \gamma) = \{g \in C^\infty(\mathbb{R} \times S^1) \mid g(\phi + \theta, \psi) = g(\phi, \psi)e^{-2\pi i \psi} \quad \forall (\phi, \psi) \in (\mathbb{R} \times S^1)\}.$$

В цитированной монографии [7] показано (см. [7; лемма 12.1, с. 140]), что изоморфизм между указанными пространствами устанавливает отображение $I: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^2, \gamma)$, определенное в формулировке леммы 12.1 следующим образом:

$$(If)(\phi, \psi) = \sum_n f(\phi + \theta n) e^{2\pi i n \psi}. \quad (2.1)$$

При $\theta = 1$ отображение I совпадает с отображением Λ , а определенное там же пространство $C^\infty(\mathbb{T}^2, \gamma)$ совпадает с определенным нами пространством $M(\mathbb{R}^2)$.

Приведенная в работе [7] формула обращения (см. [7; с. 140]) при $\theta = 1$ принимает следующий вид:

$$(I^{-1}g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} g(\{x\}, \psi) e^{-2\pi i[x]} d\psi. \quad (2.2)$$

Последнее выражение в силу условия косой периодичности в общем многомерном случае в используемой нами терминологии может быть записано более компактным образом. Пусть функция $h(t, v)$ принадлежит пространству $M(\mathbb{R}^{2k})$. Тогда обратное преобразование Λ^{-1} задается формулой

$$\Lambda^{-1}[h(t, v)] = \int_{\mathbb{I}^k} h(t, x) dt. \quad (2.3)$$

Докажем лемму, описывающую действие частных производных в пространстве $M(\mathbb{R}^{2n})$.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $h(t, v) = \Lambda f(x)$, p – натуральное число. Тогда для всех натуральных j, k имеем

$$\Lambda \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_j^k} = \frac{\partial^k h(t, v)}{\partial v_j^k}, \quad (2.4)$$

$$\Lambda(x_j^p f(x)) = \left(v_j + \frac{\partial}{\partial t_j}\right)^p h(t, v). \quad (2.5)$$

Кроме того, существуют положительные константы C_1, C_2 такие, что для всех точек $(t, v) \in \mathbb{I}^{2n}$ выполняются неравенства

$$C_1 \left| \left(v_j + \frac{\partial}{\partial t_j}\right)^p h(t, v) \right| \leq \left| \sum_{m=0}^p \frac{1}{(2\pi i)^m} \frac{\partial^m h(t, v)}{\partial t_j^m} \right| \leq C_2 \left| \left(v_j + \frac{\partial}{\partial t_j}\right)^p h(t, v) \right|. \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения преобразования Λ справедливо разложение

$$h(t, v) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} f(u + v) e^{2\pi i(u, t)}.$$

По теореме 1 указанный ряд сходится абсолютно, и его можно почленно дифференцировать. Отсюда следует первое утверждение леммы. Докажем второе утверждение. Пусть сначала $p = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda[f(x)x_j] &= \sum_u f(u + v)(u_j + v_j) e^{2\pi i(u, t)} = \sum_u u_j f(u + v) e^{2\pi i(u, t)} \\ &\quad + \sum_u v_j f(u + v) e^{2\pi i(u, t)} = \sum_u \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial h(t, v)}{\partial t_j} + v_j h(t, v). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Отсюда с учетом того, что $0 \leq v_j \leq 1$, $j = 1, \dots, n$, получаем неравенство (2.6).

Рассмотрим случай $p > 1$. Рассуждая аналогичным образом, получаем

$$\begin{aligned} \Lambda f(x)x_j^p &= \sum_u f(u + v)(u_j + v_j)^p e^{2\pi i(u, t)} = \sum_u \left(f(u + v) \sum_{m=0}^p C_p^m u_j^m v_j^{p-m} e^{2\pi i(u, t)} \right) \\ &= \sum_{m=0}^p \left(C_p^m v_j^{p-m} \sum_u u_j^m f(u + v) e^{2\pi i(u, t)} \right) = \sum_{m=0}^p C_p^m v_j^{p-m} \frac{1}{(2\pi i)^m} \frac{\partial^m h(t, v)}{\partial t_j^m}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Отсюда снова, поскольку $0 \leq v_j \leq 1$, $j = 1, \dots, n$, получаем справедливость неравенства (2.6) при всех натуральных значениях параметра p .

Рассмотрим частный случай теоремы 2 при $p = k = 0$.

ЛЕММА 2. Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $h = \Lambda f$. Тогда справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bar{f}(x) dx = \int_{\mathbb{I}^{2n}} h(t, v) \bar{h}(t, v) dt dv. \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство в многомерном случае полностью аналогично одномерному. Поэтому ограничимся одномерным случаем. Преобразуя правую часть выражения (2.9), получаем

$$\begin{aligned} \iint \left| h(t, v) \right|^2 dt dv &= \int_{v=0}^1 \int_{t=0}^1 (h(t, v) \cdot \bar{h}(t, v)) dt dv \\ &= \int_{v=0}^1 \int_{t=0}^1 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+v) e^{2n\pi t} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{f}(m+v) e^{-2m\pi t} \right) dt dv \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{x=n}^{n+1} f(x) \bar{f}(x) dx \right) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \bar{f}(x) dx = \|f\|_{0,0}^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Таким образом, получаем искомое равенство

$$\|f(x)\|_{0,0}^2 = \|h(t, v)\|_{0,0}^2. \quad (2.11)$$

Перейдем к доказательству общего случая теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Подынтегральное выражение для нормы $f(x)$ из определения 2 с точностью до умножения на константу является конечной суммой слагаемых вида

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_i^{2l} \left(\frac{\partial^{2m} f(x)}{\partial x_j^{2k}}, \bar{f}(x) \right) dx.$$

В повторном интеграле можно менять порядок интегрирования. Поэтому достаточно доказать теорему для случая $n = 1$, $i = j = 1$. Пусть сначала $p \geq k$. Интегрируя по частям и применяя лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x^{2p} \frac{\partial^{2k} f}{\partial x^{2k}} f dx &= x^{2p} \frac{\partial^{2k} f}{\partial x^{2k}} f \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^{2k-1} f}{\partial x^{2k-1}} (f x^{2p})' dx \\ &= -C_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^{2k-1} f}{\partial x^{2k-1}} (f' x^{2p} + f(2p-1)x^{2p-1}) \\ &\sim C_2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^{2k-2} f}{\partial x^{2k-2}} (f'' x^{2p} + f' x^{2p-1} + f x^{2p-2}) \sim \dots \\ &\sim (f^{(k)})^2 (x^{2p} + x^{2p-2} + \dots + x^{2p-2k}) + (f^{(k-1)})^2 (x^{2p} + \dots) + \dots. \end{aligned} \quad (2.12)$$

При $p < k$ аналогичными вычислениями получаем

$$\int_{\mathbb{R}} x^{2p} \frac{\partial^{2k} f}{\partial x^{2k}} dx = \int_{\mathbb{R}} (f^{(k)})^2 (x^{2p} + x^{2p-2} + \dots + 1) + (f^{(k-1)})^2 (x^{2p} + \dots) + \dots. \quad (2.13)$$

Далее, применяя лемму 2 к каждому слагаемому, окончательно получаем выражение

$$\Lambda((1 + |x|^2)^p (1 + \Delta)^k f(x)) f(x) \sim ((1 + \Delta_t)^p (1 + \Delta_v)^k h(t, v))^2. \quad (2.14)$$

Следовательно, по лемме 2 получаем эквивалентность соболевских норм в пространствах $\mathbb{S}$ и M . Вторая часть утверждения теоремы 2 о совпадении скалярных произведений следует из леммы 2 и формулы, выражающей скалярное произведение через норму.

Вясним, как устроено пространство пробных функций DM . Напомним, что ряд $\sum_{i=0}^{\infty} g_i$ называется *локально-конечным*, если на всяком компакте K лишь конечное число слагаемых ряда отлично от нуля, т.е. $g_i|_K \equiv 0$ для всех достаточно больших i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Функция $h(t, v) \in M(\mathbb{R}^{2n})$ тогда и только тогда принадлежит пространству $DM(\mathbb{R}^{2n})$, когда локально конечен ряд*

$$h(t, v) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i u t} f(u + v), \quad (2.15)$$

где $f = \Lambda^{-1}h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что $h(t, v) \in DM(\mathbb{R}^{2n})$ равносильно тому, что найдется такое конечное множество $U \subset \mathbb{Z}^n$, что при всех $v \in \mathbb{I}^n$ для $h(t, v)$ имеет место представление

$$h(t, v) = \sum_{u \in U} e^{2\pi i u t} f(u + v), \quad (2.16)$$

где $f(x) = \Lambda^{-1}h(t, v)$. Рассмотрим функцию $f(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\{x\} := v \in \mathbb{I}^n$, $[x] = u \in \mathbb{Z}^n$. Значит, $f(x) \equiv f(u + v)$. Определим множество U следующим образом:

$$U = \{u \in \mathbb{Z}^n \mid \exists v \in \mathbb{I}^n \ (u + v) \in \text{supp } f\}. \quad (2.17)$$

Поскольку функция $f(x)$ обладает компактным носителем, множество U конечно. Следовательно, Λf представимо следующим образом:

$$(\Lambda f)(t, v) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i u t} f(u + v) \equiv \sum_{u \in U} e^{2\pi i u t} f(u + v), \quad (2.18)$$

что и является искомым представлением для функции $h(t, v)$ в виде локально конечного ряда. В силу условия косой периодичности аналогичные рассуждения справедливы в любом единичном кубе с вершинами в $\mathbb{Z}^n$. Следовательно, в любом таком кубе лишь конечное число слагаемых ряда (2.18) отлично от нуля. Поскольку любой компакт $K \subset \mathbb{R}^n$ может быть покрыт конечным числом таких кубов, окончательно получаем локальную конечность ряда (2.18).

Для краткости изложения доказательства теоремы введем следующие обозначения: $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $M := M(\mathbb{R}^2)$, $D := D(\mathbb{R})$, $DM := DM(\mathbb{R}^2)$, $D' := D'(R)$, $DM' := DM'(\mathbb{R}^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Доказательство в многомерном случае отличается от одномерного только более громоздкими обозначениями. Поэтому рассмотрим лишь случай $n = 1$. В силу изоморфности пространств $\mathcal{S}$ и M изоморфными являются пространства D' и DM' . Зафиксируем произвольную пробную функцию $\phi(x) \in D$. Обозначим через $\tilde{\phi}$ образ функции $\phi(x)$, т.е. положим $\tilde{\phi} = \Lambda\phi \in DM$.

Определим линейное отображение $\Lambda_D: D' \rightarrow DM'$ формально по формуле

$$\Lambda_D f = \sum_{u \in \mathbb{Z}} f(u+v) e^{2\pi i u t}. \quad (2.19)$$

Для того, чтобы придать смысл этому выражению, надо показать, что для любого функционала $f \in D'$ и любой пробной функции $\phi \in D$ ряд

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}} (f(u+v) e^{2\pi i u t}, \overline{(\Lambda\phi)}(t, v)) \quad (2.20)$$

сходится. Действительно, каждый член указанного ряда имеет вид

$$(f(u+v) e^{2\pi i u t}, \overline{(\Lambda\phi)}(t, v)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \iint_{\mathbb{I}^2} e^{2\pi i u t} f(u+v) e^{-2\pi i k t} \bar{\phi}(k+v) dt dv. \quad (2.21)$$

В этом ряду единственный отличный от нуля член соответствует номеру $k = u$. Следовательно, этот ряд равен

$$\int_{\mathbb{I}} f(u+v) \bar{\phi}(u+v) dv. \quad (2.22)$$

Из свойств обобщенных функций вытекает, что ряд

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{I}} f(u+v) \bar{\phi}(u+v) dv$$

сходится абсолютно и, более того,

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{I}} f(u+v) \bar{\phi}(u+v) dv = \int_{\mathbb{R}} f(v) \bar{\phi}(v) dv = (f, \phi). \quad (2.23)$$

Таким образом доказано, что ряд (2.20) сходится абсолютно. И кроме того, для произвольных $f \in D'$, $\phi \in D$ справедлива формула

$$(\Lambda_D f, \Lambda\phi) = (f, \phi). \quad (2.24)$$

В силу этой формулы, поскольку f является непрерывным функционалом, в индуцированной топологии пространства DM непрерывным будет и функционал $\Lambda_D f$.

Далее для краткости по аналогии с регулярным случаем будем писать просто Λ вместо Λ_D , понимая Λ_D как расширение преобразования Λ на пространство обобщенных функций $DM'(\mathbb{R}^{2n})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Рассмотрим псевдодифференциальный оператор $A = \sigma(x, \partial/\partial x)$, обладающий символом $\sigma(x, \xi) \in \mathcal{S}^{m_1, m_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Требуется найти

оператор $\tilde{A}$, действующий в $M(\mathbb{R}^{2n})$, являющийся псевдодифференциальным оператором и замыкающим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\Lambda} & M(\mathbb{R}^{2n}) \\ A \downarrow & & \downarrow \tilde{A} \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\Lambda} & M(\mathbb{R}^{2n}) \end{array} \quad (2.25)$$

Определим оператор $\tilde{A}$, действующий, вообще говоря, в пространстве $D'(\mathbb{R}^{2n})$, следующим образом:

$$\tilde{A} = \mathcal{F}_{\xi_2 \rightarrow v}^{-1} \mathcal{F}_{\xi_1 \rightarrow t}^{-1} \sigma\left(\frac{\xi_1}{2\pi} + v, \xi_2\right) \mathcal{F}_{v_y \rightarrow \xi_2} \mathcal{F}_{t_y \rightarrow \xi_1}, \quad (2.26)$$

где $\mathcal{F}$ – соответствующие преобразования Фурье. Или более подробно, формально определим действие на функцию $h(t, v) \in M(\mathbb{R}^{2n})$ в интегральном виде:

$$\tilde{A}h(t, v) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \iiint_{\mathbb{R}^{4n}} e^{i\xi_1(t-t_y)} e^{i\xi_2(v-v_y)} \sigma\left(\frac{\xi_1}{2\pi} + v, \xi_2\right) h(t_y, v_y) dt_y dv_y d\xi_1 d\xi_2. \quad (2.27)$$

Докажем сначала, что пространство $M(\mathbb{R}^{2n})$ является инвариантным относительно преобразования (2.27). Для этого необходимо проверить, что функция $\tilde{A}h$ регулярна и коммутативна диаграмма (2.25). В силу теоремы 2 об эквивалентности норм, эти условия достаточно проверить для пробных функций $h \in DM(\mathbb{R}^{2n})$.

Зафиксируем произвольную пробную функцию $h(t_y, v_y) \in DM(\mathbb{R}^{2n})$ и возьмем соответствующую ей финитную функцию $f(x) = \Lambda^{-1}h(t_y, v_y)$. Перепишем в эквивалентном виде:

$$\Lambda f(x) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i u t_y} f(u + v_y) = h(t_y, v_y).$$

В силу предложения 1 этот ряд локально конечен.

Обозначим через $\mathbf{I}_l^n$ куб в $\mathbb{R}^n$ с единичными ребрами, параллельными осям, у которого вершина, имеющая наименьшие координаты, находится в точке $l \in \mathbb{Z}^n$. Последовательно применяя преобразования Фурье к функции $h \in M(\mathbb{R}^{2n})$, получаем

$$\mathcal{F}_{v_y \rightarrow \xi_2} \mathcal{F}_{t_y \rightarrow \xi_1} h(t_y, v_y) = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-i\xi_1 t_y} e^{-i\xi_2 v_y} \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i u t_y} f(u + v_y) dt_y dv_y. \quad (2.28)$$

Запишем правую часть в удобном виде:

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-i\xi_1 t_y} e^{-i\xi_2 v_y} \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i u t_y} f(u + v_y) dt_y dv_y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbf{I}_l^n} e^{-i\xi_1 t_y} e^{-i\xi_2 v_y} \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i u t_y} f(u + v_y) dt_y dv_y. \end{aligned} \quad (2.29)$$

В силу локальной конечности ряда в подынтегральном выражении в каждом кубе $\mathbf{I}_l^n$ лишь конечное число слагаемых отлично от нуля. Следовательно можно вынести знак суммирования из под интеграла. Функция f имеет компактный носитель.

Поэтому при каждом фиксированном v_y лишь конечное число слагаемых $f(u + v_y)$ отлично от нуля и, значит, суммирование по индексам u и l коммутитивно. Учитывая это, получаем

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbf{I}_l^n} e^{-i\xi_1 t_y} e^{-i\xi_2 v_y} \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i u t_y} f(u + v_y) dt_y dv_y \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{u, l \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbf{I}_l^n} e^{-i\xi_1 t_y} e^{-i\xi_2 v_y} e^{2\pi i u t_y} f(u + v_y) dt_y dv_y \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi_1 t_y} e^{-i\xi_2 v_y} e^{2\pi i u t_y} f(u + v_y) dt_y dv_y \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} e^{-i\xi_2 v_y} f(u + v_y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi_1 t_y} e^{2\pi i u t_y} dt_y dv_y \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi_2 v_y} \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} f(u + v_y) (2\pi)^n \delta(\xi_1 - 2\pi u) dv_y \\
 &= (2\pi)^n \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi_2 v_y} f(u + v_y) \delta(\xi_1 - 2\pi u) dv_y. \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

Последнее равенство вытекает из финитности функции f . Преобразуя полученное выражение, далее получаем

$$\begin{aligned}
 & (2\pi)^n \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi_2 v_y} f(u + v_y) \delta(\xi_1 - 2\pi u) dv_y \\
 &= (2\pi)^n \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} \delta(\xi_1 - 2\pi u) \mathcal{F}_{v_y \rightarrow \xi_2} [f(u + v_y)]. \tag{2.31}
 \end{aligned}$$

Умножая полученное выражение на $\sigma(\xi_1/(2\pi) + v, \xi_2)$ и применяя обратные преобразования Фурье, получаем

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{F}_{\xi_2 \rightarrow v}^{-1} \mathcal{F}_{\xi_1 \rightarrow t}^{-1} \sigma\left(\frac{\xi_1}{2\pi} + v, \xi_2\right) (2\pi)^n \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} \delta(\xi_1 - 2\pi u) \mathcal{F}[f(\xi_2 + u)] \\
 &= (2\pi)^n \mathcal{F}_{\xi_2 \rightarrow v}^{-1} \left[\mathcal{F}_{\xi_1 \rightarrow t}^{-1} \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}[f(\xi_2 + u)] \delta(\xi_1 - 2\pi u) \sigma\left(\frac{\xi_1}{2\pi} + v, \xi_2\right) \right] \\
 &= \mathcal{F}_{\xi_2 \rightarrow v}^{-1} \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}[f(\xi_2 + u)] \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi_1 t} \delta(\xi_1 - 2\pi u) \sigma\left(\frac{\xi_1}{2\pi} + v, \xi_2\right) d\xi_1 \\
 &= \mathcal{F}_{\xi_2 \rightarrow v}^{-1} \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i u t} \mathcal{F}[f(\xi_2 + u)] \sigma(u + v, \xi_2) \\
 &= \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i u t} \mathcal{F}_{\xi_2 \rightarrow v}^{-1} [\mathcal{F}f(\xi_2 + u)] \sigma(u + v, \xi_2) \\
 &= \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i u t} [A[f(u + v)]] = \Lambda[Af]. \tag{2.32}
 \end{aligned}$$

При выводе последней формулы, использована коммутация операций суммирования и интегрирования так же, как это было сделано при доказательстве (2.30). Таким

образом показано, что функция $\tilde{A}h$ является регулярной обобщенной функцией, так как $\tilde{A}[\Lambda f] = \Lambda[Af]$. Также мы получили, что диаграмма (2.25) коммутативна. Поэтому $M(\mathbb{R}^{2n})$ действительно инвариантно относительно действия оператора $\tilde{A}$ и, кроме того, $\tilde{A} = \Lambda^{-1}A\Lambda$.

Проверим псевдодифференциальность оператора $\tilde{A}$. Возьмем произвольные функции на торе $\phi, \psi \in C^\infty(\mathbb{T}^{2n})$. Пусть $\text{supp } \phi, \text{supp } \psi \subset U$, где U – карта на торе, содержащая носители функций ϕ и ψ .

По оператору $\tilde{A}$, определенному формулой (2.26), для фиксированных функций ϕ, ψ согласно определению 6 требуется найти оператор $\tilde{A}_U$ из диаграммы (1.14).

Выберем удобный диффеоморфизм χ . Положим $F = \text{supp } \phi \cup \text{supp } \psi$. Множество $F \subset U$ компактно. Через (t, v) будем обозначать угловые координаты на 1-периодическом торе. Через (t^*, v^*) будем обозначать декартовы координаты в $\mathbb{R}^{2n}$.

Рассмотрим каноническое накрытие $j: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{T}^{2n}$. С точностью до параллельного переноса можно считать, что пересечение $j^{-1}(U) \cap \partial\mathbb{I}^{2n}$ пусто. Не теряя общности, можно также считать, что U – это клетка со сторонами, параллельными осям (т.е. с гранями вида $t_j = \text{const}$ и $v_j = \text{const}$). Возьмем диффеоморфизм χ таким образом, чтобы для всех $(t, v) \in F$ выполнялось

$$j(\chi(t, v)) = (t, v). \quad (2.33)$$

Обозначим $\chi(t, v) = (t^*, v^*)$. При всех $(t, v) \in F$ должны в силу выбора диффеоморфизма χ выполняться соотношения

$$t^*(t, v) = t, \quad (2.34)$$

$$v^*(t, v) = v. \quad (2.35)$$

Следовательно, при всех $(t, v) \in F$ якобиан

$$J(t^*, v^*) = \frac{\partial(t^*, v^*)}{\partial(t, v)} = \det \begin{vmatrix} \frac{dt_1^*}{dt_1} & \cdots & \frac{dv_n^*}{dv_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dt_n^*}{dt_1} & \cdots & \frac{dv_n^*}{dv_n} \end{vmatrix} \equiv 1. \quad (2.36)$$

Через χ^* обозначим индуцированный диффеоморфизм пространства функций с компактными носителями $\mathcal{D}(U)$ и пространства $\mathcal{D}(\mathbb{I}^{2n}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, состоящего из функций с компактными носителями в кубе $\mathbb{I}^{2n}$, и продолженных нулем на остальное пространство $\mathbb{R}^{2n}$. Будем ниже пользоваться следующим обозначением: $d\xi = (2\pi)^{-n} d\xi$.

По определению оператор $\tilde{A}_U$ должен быть псевдодифференциальным оператором в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$, т.е. задаваться в следующем виде:

$$\tilde{A}_U u(t^*, v^*) = \iiint_{\mathbb{R}^{4n}} e^{i\xi_1^*(t^* - t_y^*)} e^{i\xi_2^*(v^* - v_y^*)} \hat{\sigma}(t^*, v^*, \xi_1^*, \xi_2^*) u(t_y^*, v_y^*) dt_y^* dv_y^* d\xi_1^* d\xi_2^*. \quad (2.37)$$

В данной формуле символ $\hat{\sigma}$ при некоторых вещественных параметрах (m_1, m_2) должен лежать в пространстве $\mathcal{S}^{m_1, m_2}(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n})$. Для краткости введем обозначения $\chi^*(\psi) = \psi^*$, $\chi^*(\phi) = \phi^*$. В силу определения диффеоморфизма χ функции $\chi^*(t^*, v^*)$,

$\phi^*(t^*, v^*)$ являются финитными, причем поскольку $(t^*, v^*) = \chi(t, v)$, выполняются следующие тождества:

$$\psi^*(t^*, v^*) \equiv \psi(t, v), \quad (2.38)$$

$$\phi^*(t^*, v^*) \equiv \phi(t, v). \quad (2.39)$$

Выпишем действие оператора, стоящего в нижней части диаграммы (1.14), на функцию u :

$$\begin{aligned} & [\phi^* A_U \psi^*] u(t^*, v^*) \\ &= \phi^*(t^*, v^*) \iiint_{\mathbb{R}^{4n}} e^{i\xi_1^*(t^*-t_y^*)} e^{i\xi_2^*(v^*-v_y^*)} \sigma(t^*, v^*, \xi_1^*, \xi_2^*) \\ & \quad \times \widehat{\psi}^*(t_y^*, v_y^*) u(t_y^*, v_y^*) dt_y^* dv_y^* d\xi_1^* d\xi_2^*. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Оператор, стоящий в верхней части диаграммы (1.14), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & [\phi \widetilde{A} \psi] h(t, v) \\ &= \phi(t, v) \iiint_{\mathbb{R}^{4n}} e^{i\xi_1(t-t_y)} e^{i\xi_2(v-v_y)} \sigma\left(\frac{\xi_1}{2\pi} + v, \xi_2\right) \psi(t_y, v_y) h(t_y, v_y) dt_y dv_y d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Обозначим $h^* = \chi^* h$. Коммутативность диаграммы (1.14) равносильна тому, что при всех $h \in \mathcal{D}(U)$ выполняется

$$\begin{aligned} & \phi^*(t^*, v^*) \iiint_{\mathbb{R}^{4n}} e^{i\xi_1^*(t^*-t_y^*)} \sigma(t^*, v^*, \xi_1^*, \xi_2^*) e^{i\xi_2^*(v^*-v_y^*)} \\ & \quad \times \widehat{\psi}^*(t_y^*, v_y^*) h^*(t_y^*, v_y^*) J dt_y^* dv_y^* d\xi_1^* d\xi_2^* \\ &= \phi^*(t, v) \iiint_{\mathbb{R}^{4n}} e^{i\xi_1(t-t_y)} e^{i\xi_2(v-v_y)} \sigma\left(\frac{\xi_1}{2\pi} + v, \xi_2\right) \\ & \quad \times \psi(t_y, v_y) h(t_y, v_y) dt_y dv_y d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Здесь J – якобиан диффеоморфизма χ . Преобразуем левую часть полученного равенства. Так как функции ϕ , ψ имеют компактные носители, интегрирование по переменным (t^*, v^*) можно проводить лишь по области $\text{supp } \psi$, а интегрирование по переменным (ξ_1^*, ξ_2^*) происходит только по области $\text{supp } \phi$. В силу (2.36) в данных областях интегрирования якобиан $J \equiv 1$, значит, получаем

$$\begin{aligned} & \phi^*(t^*, v^*) \iiint_{\mathbb{R}^{4n}} e^{i\xi_1^*(t^*-t_y^*)} e^{i\xi_2^*(v^*-v_y^*)} \widehat{\sigma}(t^*, v^*, \xi_1^*, \xi_2^*) \\ & \quad \times \psi^*(t_y^*, v_y^*) h^*(t_y^*, v_y^*) J dt_y^* dv_y^* d\xi_1^* d\xi_2^* \\ &= \int_{\text{supp } \phi} \int_{\text{supp } \psi} e^{i\xi_1^*(t^*-t_y^*)} e^{i\xi_2^*(v^*-v_y^*)} \phi(t^*, v^*) \widehat{\sigma}(t^*, v^*, \xi_1^*, \xi_2^*) \\ & \quad \times \psi(t_y^*, v_y^*) h(t_y^*, v_y^*) dt_y^* dv_y^* d\xi_1^* d\xi_2^*. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Определим символ $\widehat{\sigma}$ следующим образом:

$$\widehat{\sigma}(t^*, v^*, \xi_1^*, \xi_2^*) = \sigma\left(\frac{\xi_1^*}{2\pi} + \chi_2(v), \xi_2^*\right). \quad (2.44)$$

Тогда для всех $(t, v) \in F$ получаем

$$\begin{aligned}
 & \int_{\text{supp } \phi} \int_{\text{supp } \psi} e^{i\xi_1^*(t^*-t_y^*)} e^{i\xi_2^*(v^*-v_y^*)} \phi(t^*, v^*) \widehat{\sigma}(t^*, v^*, \xi_1^*, \xi_2^*) \psi(t_y^*, v_y^*) \\
 & \quad \times h(t_y^*, v_y^*) dt_y^* dv_y^* d\xi_1^* d\xi_2^* \\
 & = \chi^* \left[\phi(t, v) \int_{\text{supp } \phi} \int_{\text{supp } \psi} e^{i\xi_1(t-t_y)} e^{i\xi_2(v-v_y)} \sigma\left(\frac{\xi_1}{2\pi} + v, \xi_2\right) \right. \\
 & \quad \left. \times \psi(t_y, v_y) h(t_y, v_y) dt_y dv_y d\xi_1 d\xi_2 \right]. \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

В полученном выражении, очевидно, можно заменить область интегрирования на все пространство. Тем самым, доказана коммутативность диаграммы (1.14), а значит, и псевдодифференциальность оператора $\tilde{A}$. Теперь остается проверить, что определенный таким образом символ $\widehat{\sigma}$, удовлетворяет асимптотическому условию (1.17).

По предположению теоремы у исходного оператора $A = \sigma(x, \partial x)$ с символом $\sigma(x, \xi)$ обобщенный порядок равен (m_1, m_2) . Как мы показали, оператор $\tilde{A} = \Lambda A \Lambda^{-1}$ в локальных координатах обладает символом $\widehat{\sigma}(t, v, \xi_1, \xi_2) \equiv \sigma(\xi_1/(2\pi) + v, \xi_2)$. Зафиксируем $2n$ -мерные мультииндексы $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, где α_1, β_1 – первые n переменных, а α_2, β_2 – оставшиеся переменные. Тогда, поскольку символ $\widehat{\sigma}$, определенный выше, не зависит от переменной t^* , при $|\beta_1| > 0$ производная символа $\widehat{\sigma}$ равна нулю.

Рассмотрим случай $\beta_1 = 0$. Обозначим $\chi^{-1}(v^*) = v$ и получаем

$$\begin{aligned}
 & |\partial_{(t^*, v^*)}^{\beta} \partial_{(\xi_1^*, \xi_2^*)}^{\alpha} \widehat{\sigma}(t^*, v^*, \xi_1^*, \xi_2^*)| = \left| \partial_v^{\beta_2} \partial_{\xi_1^*}^{\alpha_1} \partial_{\xi_2^*}^{\alpha_2} \sigma\left(\frac{\xi_1^*}{2\pi} + v, \xi_2^*\right) \right| \\
 & \leq C \left(1 + \left|\frac{\xi_1^*}{2\pi} + v\right|\right)^{m_1 - |\alpha_1| - |\beta_2|} (1 + |\xi_2^*|)^{m_2 - |\alpha_2|} \\
 & \leq C \left(1 + \left|\frac{\xi_1^*}{2\pi}\right| + |v|\right)^{m_1 - |\alpha_1| - |\beta_2|} (1 + |\xi_2^*|)^{m_2 - |\alpha_2|}. \quad (2.46)
 \end{aligned}$$

Здесь C – некоторая положительная константа. Поскольку U является картой на торе, значит, найдутся такие $v_1, v_2 > 0$, что

$$(t, v) \in U \quad \Rightarrow \quad v_1 \leq |v| \leq v_2 \quad \forall (t, v) \in U \quad (2.47)$$

Кроме того, производная $\partial^{\beta_2} \widehat{\sigma}$ ограничена на карте U . С учетом этого получаем из (2.46)

$$\begin{aligned}
 & C \left(1 + \left|\frac{\xi_1^*}{2\pi}\right| + |v|\right)^{m_1 - |\alpha_2| - |\beta_2|} (1 + |\xi_2^*|)^{m_2 - |\alpha_2|} \\
 & \leq C' \left(1 + \left|\frac{\xi_1^*}{2\pi}\right|^2 + |v_2|\right)^{m_1 - |\alpha_1|} (1 + |\xi_2^*|)^{m_2 - |\alpha_2|} \\
 & \leq C'' (1 + |\xi_1^*|)^{m_1 - |\alpha_1|} (1 + |\xi_2^*|)^{m_2 - |\alpha_2|}. \quad (2.48)
 \end{aligned}$$

Здесь C' , C'' – некоторые положительные константы. Следовательно функция σ удовлетворяет условию (1.17) в карте U . И поскольку тор $\mathbb{T}^{2n}$ – компактное многообразие, он покрывается конечным числом карт. Следовательно, при всяких мультииндексах (α, β) найдется такая неотрицательная константа $C_{\alpha, \beta}$, что условие (1.17) выполняется.

Теперь вычислим индекс оператора A , пользуясь формулой Атьи–Зингера (см., например, [6; с. 171–172]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Возьмем два псевдодифференциальных оператора A и B с символами соответственно $\sigma_A \in \mathcal{S}^{(m_1^A, m_2^B)}$ и $\sigma_B \in \mathcal{S}^{(m_1^B, m_2^B)}$. Их композиция $BA \in \mathcal{S}^{(m_1^A + m_1^B, m_2^A + m_2^B)}$. Проверим, что их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ обладает меньшим порядком, т.е. $[A, B] \in \mathcal{S}^{(m_1^A + m_1^B - 1, m_2^A + m_2^B - 1)}$.

Рассмотрим оператор $C = BA$. Вычислим его символ σ_C . Напомним формулу композиции (см. [3; теорема 3.4, с. 41]). В наших обозначениях

$$\sigma_C(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} \sigma_B(x, \xi) D_x^{\alpha} \sigma_A(x, \xi). \quad (2.49)$$

Здесь α – мультииндексы (в том числе и нулевой), и $D_x = \partial_x / i$. Выпишем, пользуясь соотношением (1.13), нужные нам неравенства:

$$|\partial_{\xi}^{\alpha} \sigma_A(x, \xi)| \leq (1 + |x|)^{m_1^A} (1 + |\xi|)^{m_2^A - |\alpha|}, \quad (2.50)$$

$$|\partial_x^{\alpha} \sigma_B(x, \xi)| \leq (1 + |x|)^{m_1^B - |\alpha|} (1 + |\xi|)^{m_2^B}. \quad (2.51)$$

Откуда получаем, что α -й член ряда (2.49) имеет вид

$$\begin{aligned} |\partial_{\xi}^{\alpha} \sigma_A(x, \xi) \partial_x^{\alpha} \sigma_B(x, \xi)| &\leq C_{\alpha} (1 + |x|)^{m_1^A} (1 + |\xi|)^{m_2^A - |\alpha|} (1 + |x|)^{m_1^B - |\alpha|} (1 + |\xi|)^{m_2^B} \\ &= C_{\alpha} (1 + |x|)^{m_1^A + m_1^B - |\alpha|} (1 + |\xi|)^{m_2^A + m_2^B - |\alpha|}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Здесь константа $C_{\alpha} = 1/(i^{|\alpha|} \alpha!)$. Получаем, что

$$|\partial_{\xi}^{\alpha} \sigma_A(x, \xi) \partial_x^{\alpha} \sigma_B(x, \xi)| \in S^{m_1 - |\alpha|, m_2 - |\alpha|}. \quad (2.53)$$

Проверим теперь, что коммутатор операторов A и B действительно удовлетворяет свойству

$$[A, B] = AB - BA \in \mathcal{S}^{(m_1^A + m_1^B - 1, m_2^A + m_2^B - 1)}. \quad (2.54)$$

Старшие коэффициенты порядка $(m_1^A + m_1^B, m_2^A + m_2^B)$, отвечающие мультииндексу $\alpha = 0$ в ряде (2.49) для операторов AB и BA , одинаковы и равны $\sigma_A(x, \xi) \sigma_B(x, \xi)$. Следовательно, в коммутаторе $[A, B]$ они сокращаются. Следовательно, старшим членом будет отвечающий значению мультииндекса $|\alpha| = 1$ и обладающий, следовательно, обобщенным порядком $(m_1^A + m_1^B - 1, m_2^A + m_2^B - 1)$.

Проверим фредгольмовость оператора A . В силу предложения 2.1 из работы [5; с. 200] для любых вещественных s_1, s_2 оператор A продолжается до ограниченного оператора

$$A: H^{s, s'} \rightarrow H^{s_1 - m_1^A, s_2 - m_2^A}. \quad (2.55)$$

Следовательно, в силу выражения (2.54) коммутатор $[A, B]$ продолжается до ограниченного оператора

$$[A, B]: H^{s_1, s_2} \rightarrow H^{(s_1 - (m_1^A + m_1^B) + 1, s_2 - (m_2^A + m_2^B) + 1)}. \quad (2.56)$$

Покажем теперь, что для любых вещественных s_1, s_2 естественное вложение $H^{s_1, s_2} \rightarrow H^{s_1-1, s_2-1}$ является компактным или, что то же самое, компактным будет вложение $\zeta: H_M^{s_1, s_2} \rightarrow H_M^{s_1-1, s_2-1}$. Достаточно рассмотреть карту U на торе T^{2n} , совпадающую со стандартным кубом. Рассмотрим функцию $u \in H^{s_1, s_2}$ с носителем, лежащем в карте U . То есть $\text{supp } u \subset U$. Разложим функцию u в ряд Фурье:

$$u(t, v) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}^n} u_{l, k} e^{2\pi i l t} e^{2\pi i k v}. \quad (2.57)$$

Значит, для нормы с номером (s_1, s_2) выполняется следующее неравенство:

$$\|u\|_{s_1, s_2}^2 \leq \sum_{k, l \in \mathbb{Z}^n} (1 + k^2)^{s_1} (1 + l^2)^{s_2} u_{k, l}. \quad (2.58)$$

Аналогично, для нормы с номером $(s_1 - 1, s_2 - 1)$ выполняется неравенство

$$\|u\|_{s_1-1, s_2-1}^2 \leq \sum_{k, l \in \mathbb{Z}^n} (1 + k^2)^{s_1-1} (1 + l^2)^{s_2-1} u_{k, l}. \quad (2.59)$$

Вложению ζ на слагаемом с мультииндексом k, l соответствует действие

$$u_{k, l} \rightarrow u_{k, l} \frac{1}{(1 + k^2)(1 + l^2)}. \quad (2.60)$$

При $(k, l) \rightarrow \infty$ правая часть выражения (2.60) стремится к нулю; следовательно, вложение ζ компактно. Значит, компактным является также и вложение $H^{s_1, s_2} \rightarrow H^{s_1-1, s_2-1}$. В силу показанного выше свойства для коммутаторов (2.54) существуют правый и левый параметрикс операторов A и $\tilde{A}$; значит, по теореме Фредгольма они будут фредгольмовыми. К фредгольмову оператору $\tilde{A}$ можно применить формулу Атьи–Зингера, что и дает формулу для индекса (1.20).

3. Примеры

Пример 1. В работе [8] были рассмотрены символы $\sigma(x, \xi) \in \mathcal{S}^m$, $m \in \mathbb{R}$, на которые наложены следующие дополнительные условия. Для каждого положительного мультииндекса β , т.е. при $|\beta| > 0$, существует функция $C_\beta(x) \rightarrow 0$ такая, что выполняется

$$\left| \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} \sigma(x, \xi) \right| \leq C_\beta(x) (1 + |\xi|)^m, \quad C_\beta(x) \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

и, кроме того, существует такая константа $C_0 > 0$, что при всех достаточно больших (x, ξ) выполняется

$$|\sigma(x, \xi)| > C_0 (1 + |\xi|)^m. \quad (3.2)$$

Наложим на функции C_β дополнительное условие равномерного стремления к нулю при некотором вещественном параметре m_1 :

$$|C_\beta(x)| \leq (1 + |x|)^{m_1 - |\beta|}. \quad (3.3)$$

Потребуем также ограниченности символа при некотором вещественном параметре m_2 :

$$|\sigma(x, \xi)| \leq (1 + |x|)^{m_1} (1 + |\xi|)^{m_2}. \quad (3.4)$$

Если для класса символов, рассмотренных в работе [8], выполнены также условия (3.3), (3.4), то такие символы являются символами класса $\mathcal{S}^{m_1, m_2}$. В класс символов, рассмотренный в работе [8], попадают классы $\mathcal{S}^{m_1, m_2}$ при $m_1 \leq 0$. При $m_1 > 0$, получаются символы, вообще говоря, более общего типа, чем в цитированной работе [8].

В формуле (4.1) работы [8], позволяющей вычислять индекс ПДО с символами рассматриваемого класса, используется многообразие $\Gamma = \partial \bar{\mathcal{S}}_+^n \times \bar{\mathcal{S}}_+^n$, где $\bar{\mathcal{S}}_+^n$ – полу-сфера. В нашей работе многообразие Γ заменяется на более простое многообразие – тор $\mathbb{T}^{2n}$. Отметим, что как в цитированной работе, так и в нашей, при вычислении индекса, замкнутое многообразие, к которому происходит редукция, также является многообразием удвоенной размерности.

В следующем примере приведены операторы, которые могут быть изучены посредством редукции Λ , но не попадают в класс операторов, рассмотренных в работе [8].

Пример 2. Для вещественных $p, q > 0$ рассмотрим оператор

$$B_{p,q} = \left(1 + \sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^p \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^q. \quad (3.5)$$

Этот оператор нужно понимать как оператор с символом

$$b_{p,q}(x, \xi) = \left(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^p \left(1 + \sum_{i=1}^n \xi_i^2\right)^q. \quad (3.6)$$

Как легко видеть, символ $b_{p,q} \in \mathcal{S}^{2p, 2q}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Очевидно, при $p, q > 1/2$ производные по x_i не стремятся к нулю, значит, для таких символов не выполняется условие (3.1), и значит, такие операторы не попадают в класс операторов, рассматриваемых в работе [8].

Вычислим оператор $\tilde{B}_{p,q} = \Lambda B_{p,q} \Lambda^{-1}$. По теореме 4 символ $\tilde{b}_{p,q}$ оператора $\tilde{B}_{p,q}$ определяется следующим образом:

$$\tilde{b}_{p,q}(t, v, \xi_1, \xi_2) = \left(1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\pi i} \xi_{1i} + v_i\right)^2\right)^p \left(\sum_{i=1}^n \xi_{2i}^2\right)^q. \quad (3.7)$$

Легко видеть, что символ $\tilde{b}_{p,q}$ эллиптический, а значит, операторы $B_{p,q}$ и $\tilde{B}_{p,q}$ фред-гольмовы в соответствующих нормах, и индекс оператора $B_{p,q}$ равен индексу оператора $\tilde{B}_{p,q}$ и вычисляется по формуле (1.20).

Отдельно отметим случай, когда параметры p, q целые. Оператор $\partial/\partial x_i$ является ПДО с символом $\sigma(x, \xi) = \xi_i$. Значит, в силу теоремы 4 коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\Lambda} & M(\mathbb{R}^{2n}) \\ \partial/\partial x_i \downarrow & & \downarrow \partial/\partial v_i \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\Lambda} & M(\mathbb{R}^{2n}). \end{array} \quad (3.8)$$

Оператор умножения на x_j , обладает символом $\sigma(x, \xi) = x_j$. Значит, в силу теоремы 4 коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\Lambda} & M(\mathbb{R}^{2n}) \\ x_j \downarrow & & \downarrow (1/2\pi i)(\partial/\partial t_j + v_j) \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\Lambda} & M(\mathbb{R}^{2n}). \end{array} \quad (3.9)$$

В силу коммутативности диаграмм (3.8) и (3.9), при целых параметрах p, q для оператора $\tilde{B}_{p,q}$ справедливо следующее операторное представление:

$$\tilde{B}_{p,q} = \left(1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t_i} + v_i \right)^2 \right)^p \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial v_i^2} \right)^q. \quad (3.10)$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Арутюнов, А. С. Мищенко, “Редукция ПДО исчисления на некомпактном многообразии”, *Докл. РАН*, **451**:4 (2013), 1–5.
- [2] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975.
- [3] М. А. Шубин, *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория*, Добросвет, 2003.
- [4] М. С. Агранович, “Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях”, *Дифференциальные уравнения с частными производными* – 6, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **63**, ВИНТИ, М., 1990, 5–129.
- [5] В. С. Рабинович, “Априорные оценки и фредгольмовость одного класса псевдодифференциальных операторов”, *Матем. сб.*, **92(134)**:2(10) (1973), 195–208.
- [6] А. С. Мищенко, *Векторные расслоения и их применения*, Наука, М., 1984.
- [7] V. E. Nazaikinskii, A. Yu. Savin, B. Yu. Sternin, *Elliptic Theory and Noncommutative Geometry. Nonlocal Elliptic Operators*, Oper. Theory Adv. Appl., **183**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.
- [8] В. В. Грушин, “Псевдодифференциальные операторы в $\mathbf{R}^n$ с ограниченными символами”, *Функц. анализ и его прил.*, **4**:3 (1970), 37–50.

А. А. Арутюнов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило

04.04.2013

А. С. Мищенко

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: asmish@mech.math.msu.su