Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. К. Ишкин, О критерии безмонодромности уравнения Штурма–Лиувилля, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 4, 552–568

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10319>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 11:20:18

О критерии безмонодромности уравнения Штурма–Лиувилля

Х. К. Ишкин

Получено необходимое и достаточное условие безмонодромности уравнения $-y''(z) + q(z)y(z) = \lambda y(z)$, $z \in \gamma$, где γ – кусочно-гладкая кривая, являющаяся границей некоторой выпуклой ограниченной области.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10319

1. Постановка задачи и формулировка результата. Пусть функция q мероморфна в некоторой области $\Omega \in \mathbb{C}$. Выберем точку $z_0 \in \Omega = \Omega \setminus P$, где P – множество полюсов q , и рассмотрим фундаментальную систему решений $Y(z, \lambda) = (y_1(z, \lambda), y_2(z, \lambda))$ уравнения

$$-y'' + qy = \lambda y, \quad (1.1)$$

аналитичную вблизи z_0 . Пусть после обхода точкой z некоторой петли $\gamma \subset \dot{\Omega}$ с началом в z_0 вектор-функция $Y(z, \lambda)$ принимает вблизи z_0 значение $\tilde{Y}(z, \lambda)$. Тогда $\tilde{Y}(z, \lambda) = Y(z, \lambda)G_\gamma$, где $G_\gamma = G_\gamma(\lambda)$ – невырожденная матрица 2×2 . Уравнение (1.1) будем называть *безмонодромным* в области Ω , если для любого $\gamma \subset \dot{\Omega}$ выполнено $G_\gamma(\lambda) \equiv I$, где I – единичная матрица. Известно [1], что уравнение (1.1) безмонодромно в Ω тогда и только тогда, когда для любого полюса a функции q

$$q(z) = \frac{m(m-1)}{(z-a)^2} + \sum_{k=0}^{m-1} c_k(z-a)^{2k} + (z-a)^{2m-1}r(z), \quad (1.2)$$

где $m \in \mathbb{N}$, $c_0, \dots, c_{m-1}$ – некоторые числа, функция $r(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки a .

Обозначим через $M(\Omega)$ множество мероморфных в Ω функций q , для которых уравнение (1.1) безмонодромно. Пусть Ω и ω – две односвязные области такие, что $\bar{\omega} \subset \Omega$. Положим $K = \Omega \setminus \bar{\omega}$. Из определения безмонодромности следует, что $M(\Omega) \subset M(K)$. В работе [2] показано, что если ω выпукла, то $M(\Omega) = M(K)$.

Кривую γ будем называть *кусочно-гладкой*, если для γ существует параметризация $z = z(x)$, $x \in [0, 1]$, удовлетворяющая следующим условиям: при некотором разбиении

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = 1$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 12-01-00567-а, 11-01-97009-р_поволжье_а) и Министерства образования и науки РФ (соглашение 14.В37.21.0358).

функция $z(x)$ непрерывно дифференцируема на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ и $z'(x) \neq 0$ для любого $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, m$. Такую параметризацию будем называть допустимой. Если функция $y(z)$ абсолютно непрерывна на γ (т.е. при некоторой допустимой параметризации функция $v(x) = y(z(x))$ абсолютно непрерывна на $[0, 1]$), то при почти всех $z \in \gamma$ существует $y'(z) := v'(x)/z'(x)$. Легко проверить, что $y'(z)$ не зависит от выбора параметризации. Аналогично определим $y''(z)$.

Пусть γ – замкнутая кусочно-гладкая кривая, функция q определена и суммируема на γ . Уравнение (1.1) (или потенциал q) будем называть безмонодромным на кривой γ , если $G(\lambda) \equiv I$, где $G(\lambda)$ матрица монодромии для кривой γ . Ясно, что безмонодромность не зависит от выбора параметризации. Обозначим через $M(\gamma)$ множество безмонодромных на γ потенциалов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть G – односвязная область со спрямляемой границей. Будем говорить, что $q \in ME_1(G)$, если q мероморфна в области G и

- (i) имеет конечное число полюсов z_k , $k = 1, \dots, n$, каждый из которых удовлетворяет условию (1.2) с соответствующими $m_k \in \mathbb{N}$;
- (ii) функция

$$q(z) - \sum_{k=1}^n \frac{m_k(m_k - 1)}{(z - z_k)^2}$$

принадлежит классу Смирнова $E_1(G)$ [3; с. 205].

Основной результат статьи – это следующая

ТЕОРЕМА 1. Если Ω – ограниченная выпуклая область с кусочно-гладкой границей γ , то

$$M(\gamma) = ME_1(\Omega).$$

2. Определения, обозначения, соглашения. Всюду далее β будет означать $\arg \lambda$. Пусть $z = z(x)$, $x \in [0, 1]$, – параметризация кривой γ ,

$$a = z(x_a), \quad b = z(x_b), \quad 0 \leq x_a < x_b \leq 1,$$

– точки кривой γ ,

$$\gamma_{ab} = \{z = z(x), x_a \leq x \leq x_b\}, \quad \dot{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab} \setminus \{a, b\},$$

Γ_{ab} – замкнутая кривая, состоящая из дуги γ_{ab} и отрезка $[a, b]$, Ω_{ab} – область, ограниченная кривой Γ_{ab} . Если $\gamma_{ab} = [a, b]$, то $\Omega_{ab} = \emptyset$. Всюду, где будет появляться Ω_{ab} , будем считать, что $\gamma_{ab} \neq [a, b]$. Если $c \in \dot{\gamma}_{ab}$, то будем говорить, что дуга γ_{ab} содержит внутри точку $c = z(x_c)$. Так как γ выпукла, то существует точка $O \in \gamma$ такая, что для всех γ_{ab} , содержащих внутри точку O , область Ω_{ab} непуста. Далее, пусть Ω_{ab}^* – область, симметричная Ω_{ab} относительно середины отрезка $[a, b]$, $G_{ab} = \mathbb{C} \setminus (\Omega_{ab} \cup \overline{\Omega_{ab}^*})$, B_β^+ и B_β^- – точки максимума и минимума¹ функции $I(z) = \operatorname{Im}(ze^{i\beta})$, $z \in \gamma$. Символ $\int_a^b f(z) dz$ или $\int_{\gamma_{ab}} f(z) dz$ будет означать интеграл

$$\int_{x_a}^{x_b} f(z(x)) z'(x) dx,$$

если последний существует.

¹Если указанный максимум или минимум достигается не в единственной точке, то в качестве B_β берем любую из них.

Если $p \in L^1(\gamma_{ab})$, то через $\varphi_a[p](z, \lambda)$ обозначим решение уравнения

$$-y''(z) + p(z)y(z) = \lambda^2 y(z), \quad z \in \gamma_{ab}, \quad (2.1)$$

удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(a, \lambda) = 0$, $(\partial/\partial z)\varphi(z, \lambda)|_{z=a} = 1$.

Далее,

$$F_{ab}[p](\lambda) := \int_a^b e^{i\lambda(t-a)} p(t) \varphi_a[p](t, \lambda) dt. \quad (2.2)$$

Обозначим через $h_{ab}[p](\beta)$ индикатор (см. [4; с. 72]) функции $F_{ab}[p](\lambda)$. Положим

$$H_{ab}[p](z) = \int_0^{\infty e^{i\beta}} e^{-2i\lambda(z-a)} F_{ab}(\lambda) d\lambda, \quad \text{Im}(e^{i\beta}(z-a)) < -\frac{h_{ab}[p](\beta)}{2}, \quad (2.3)$$

$$A_{ab}[p](z) = \frac{1}{\pi} (H_{ab}[p](z) - J_{ab}[p](z)), \quad (2.4)$$

$$J_{ab}[p](z) = -\frac{1}{2i} \int_a^b \frac{P_b(t)}{t-z} dt, \quad P_b(t) = \int_t^b p d\tau, \quad (2.5)$$

$$B_{ab}[p](z) = \frac{d}{dz} (A_{ab}[p](z)). \quad (2.6)$$

Обозначим через $\psi_{\pm}[p](z, \lambda)$ решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям

$$\psi_{\pm}[p](B_{\beta}^{\pm}, \lambda) = e^{\pm i\lambda B_{\beta}^{\pm}}, \quad \left. \frac{\partial}{\partial z} \psi_{\pm}[p](z, \lambda) \right|_{z=B_{\beta}^{\pm}} = \pm i\lambda e^{\pm i\lambda B_{\beta}^{\pm}}.$$

Всюду, где p равна фиксированной функции q , мы будем опускать значок $[p]$, например, $F_{ab}(\lambda)$, $H_{ab}(z)$ и т.д.

3. Доказательство достаточности условий (i) и (ii). Пусть $\gamma' \subset \Omega$ – замкнутая кривая, охватывающая все полюса q . Обозначим через $K(\gamma')$ область, ограниченную кривыми γ и γ' . Согласно условию (ii) функция q принадлежит классу $E_1(K(\gamma'))$; следовательно (см. [3; с. 208]), любая ее первообразная Q аналитична в $K(\gamma')$ и непрерывна на $\overline{K(\gamma')}$. Далее, поскольку y является решением (1.1) тогда и только тогда, когда $Y = (y, -y' + Qy)^T$ – решение системы

$$Y' = \begin{pmatrix} Q & -1 \\ \lambda + Q^2 & -Q \end{pmatrix} Y, \quad (3.1)$$

то в силу условия (i) уравнение (1.1), а значит, и система (3.1) безмонодромны в области Ω . Следовательно, система (3.1) имеет фундаментальную матрицу решений, аналитичную в области $K(\gamma')$ и непрерывную вплоть до γ . Но тогда таким же свойством обладает и уравнение (1.1), откуда следует его безмонодромность на γ .

4. Схема доказательства необходимой части теоремы 1. Доказательство необходимости условий (i) и (ii) для безмонодромности уравнения (1.1) гораздо сложнее. Поэтому мы сначала изложим краткую схему доказательства.

Идея основана на (нелинейном) уравнении для q

$$q(\zeta) = q_{ab}(\zeta) + B_{ab}[q](\zeta), \quad \text{п.в. на } \gamma_{ab}, \quad (4.1)$$

где B_{ab} – оператор в $L^1(\gamma_{ab})$, действующий по формулам (2.6), (2.4),

$$q_{ab}(\zeta) = \frac{1}{\pi}(J_{ab}^+(\zeta) - H_{ab}(\zeta))', \quad (4.2)$$

$J_{ab}^+(\zeta)$ – угловое граничное значение (см. [3; с. 66]) функции $J_{ab}(z)$ слева (при движении от a к b).

Это уравнение обладает следующими свойствами:

- 1) для достаточно малых дуг γ_{ab} оператор B_{ab} является сжатием в $L^1(\gamma_{ab})$ (лемма 4);
- 2) если $p \in E_1(\Omega_{ab})$, то $B_{ab}[p] \in E_1(\Omega_{ab})$ (лемма 5);
- 3) “свободный член” $q_{ab}(\zeta)$ почти при всех $a, b \in \gamma$ допускает аналитическое продолжение в Ω_{ab} так, что $q_{ab} \in E_1(\Omega_{ab})$ (лемма 7).

Из свойства 1) следует, что последовательность

$$p_0 = q_{ab}, \quad p_n = q_{ab} + B_{ab}[p_{n-1}], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.3)$$

будет сходиться в $L^1(\gamma_{ab})$ к некоторой функции p из $L^1(\gamma_{ab})$, удовлетворяющей уравнению (4.1). В силу единственности решения имеем $p = q$ п.в. на γ_{ab} (лемма 4).

Из свойств 2), 3) следует, что при почти всех $a, b \in \gamma$ функции $p_0, p_1, \dots$ принадлежат классу $E_1(\Omega_{ab})$.

Воспользуемся следующей теоремой [3; с. 268].

ТЕОРЕМА А. Пусть G – область со спрямляемой границей Γ , $p > 0$. Тогда если последовательность $\{f_n(\zeta)\}$ граничных значений функций $f_n(z)$ класса $E_p(G)$ сходится по мере на множестве $e \subset \Gamma$, $m(e) > 0$, и

$$\int_{\Gamma} |f_n(\zeta)|^p |d\zeta| < C,$$

где C не зависит от n , то последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится в области G к функции $f(z)$ класса E_p и последовательность $\{f_n(\zeta)\}$ сходится по мере на множестве e к функции $f(\zeta)$ – угловым граничным значениям функции $f(z)$.

Достаточно просто доказывается (лемма 9) оценка

$$\int_{[a,b]} |p_n(\zeta)| |d\zeta| < C, \quad (4.4)$$

где постоянная C не зависит от n .

Таким образом, функции p_n удовлетворяют всем условиям цитированной выше теоремы А. Следовательно, для всех достаточно малых дуг γ_{ab} , содержащих внутри точку O , функция q принадлежит $E_1(\Omega_{a'b'})$ при п.в. $a', b' \in \gamma_{ab}$. Так мы находим некоторую непустую область Ω_{ab} , куда q продолжается как элемент $E_1(\Omega_{ab})$. Далее, используя метод работы [2], построим мероморфное продолжение q на всю область Ω , удовлетворяющее требованиям 1 и 2 теоремы 1.

Теперь поясним вывод уравнения (4.1). Введем семейство $\{F_{ab}, a, b \in \gamma\}$ операторов, которые каждой функции $p \in L^1(\gamma_{ab})$ ставят в соответствие по (2.2) целую функцию $F_{ab}[p](\lambda)$.

Важный факт (лемма 6), на котором будут основываться все дальнейшие выкладки, заключается в том, что если потенциал q удовлетворяет условию безмонодромности, то

$$\varphi_a[p](z, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda(z - a) + O\left(\frac{1}{\lambda^2} \exp |\operatorname{Im}(\lambda(z - a))|\right), \quad (4.5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \varphi_a[p](z, \lambda) = \cos \lambda(z - a) + O\left(\frac{1}{\lambda} \exp |\operatorname{Im}(\lambda(z - a))|\right), \quad (4.5b)$$

причем оценки остаточных членов равномерны по $a, z \in \gamma$ и $\arg \lambda$.

Из этих оценок и равенства

$$F_{ab}[p](\lambda) = \left(\frac{\partial}{\partial z} \varphi_a[p](z, \lambda) \right) \Big|_{z=b} - i\lambda \varphi_a[p](b, \lambda) e^{i\lambda(b-a)} - 1 \quad (4.6)$$

имеем

$$h_{ab}(\beta) = 2 \max\{\operatorname{Im}(e^{i\beta}(a - b)), 0\}. \quad (4.7)$$

Отсюда следует, что функция $H_{ab}(z)$ (см. (2.3) при $p = q$) аналитична в области $\mathbb{C} \setminus [a, b]$.

Будет доказано, что при любом $p \in L^1(\gamma_{ab})$ функция $A_{ab}[p](z)$ удовлетворяет некоторому интегральному уравнению (лемма 1), откуда будет следовать аналитичность $A_{ab}[p](z)$ в области G_{ab} и непрерывность на $\overline{G_{ab}}$ и абсолютная непрерывность на γ_{ab} (леммы 2, 3). Отсюда в свою очередь будет следовать, что функция

$$J_{ab}(z) = H_{ab}(z) - \pi A_{ab}(z) \quad (4.8)$$

имеет непрерывное продолжение $J_{ab}^-(\zeta)$ с области G_{ab} на $\dot{\gamma}_{ab}$, абсолютно непрерывное на $\dot{\gamma}_{ab}$. Следовательно, функция $J_{ab}(z)$, как интеграл типа Коши, допускает непрерывное продолжение $J_{ab}^+(\zeta)$ на $\dot{\gamma}_{ab}$ и слева (при движении от a к b) от γ_{ab} , которое связано с $J_{ab}^-(\zeta)$ формулой Сохоцкого–Племеля

$$Q_b(\zeta) = \frac{1}{\pi} (J_{ab}^-(\zeta) - J_{ab}^+(\zeta)), \quad \zeta \in \dot{\gamma}_{ab}, \quad (4.9)$$

где

$$Q_b(\zeta) = \int_{\zeta}^b q \, dt. \quad (4.10)$$

Следовательно, функция $J_{ab}^+(\zeta)$ также абсолютно непрерывна на $\dot{\gamma}_{ab}$.

Равенство (4.8) по непрерывности продолжается на $\dot{\gamma}_{ab}$:

$$A_{ab}(\zeta) = \frac{1}{\pi} (H_{ab}(\zeta) - J_{ab}^-(\zeta)), \quad \zeta \in \dot{\gamma}_{ab}.$$

Подставляя сюда (4.9) и дифференцируя по ζ , получим (4.1).

5. Свойства функций $A_{ab}[p]$ и $B_{ab}[p]$.

ЛЕММА 1. Функция $A_{ab}[p](z)$ удовлетворяет уравнению

$$A_{ab}[p](z) = \frac{1}{2i} \int_a^b P_b(t) \int_a^t \frac{P_t(\tau)}{\tau - t + z - a} d\tau dt - \int_a^b P_b(t) A_{at}[p](t - z + a) dt, \quad z \in G_{ab}. \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем (см., например, [5; с. 12])

$$\varphi_a[p](z, \lambda) = \frac{\sin \lambda(z-a)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_a^z \sin \lambda(z-t) p(t) \varphi_a[p](t, \lambda) dt. \quad (5.2)$$

Подставляя (5.2) в (2.2) и интегрируя полученное выражение по частям, получим

$$F_{ab}[p](\lambda) = \int_a^b e^{2i\lambda(t-a)} P_b(t) dt + \int_a^b e^{2i\lambda(t-a)} P_b(t) F_{at}[p](-\lambda) dt. \quad (5.3)$$

Положим в (2.3) $\beta = -\alpha_a$. Из (5.2) имеем

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \varphi_a[p](t, \lambda) = O(\lambda^{-1+k} e^{-i\lambda t}), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Тогда функция

$$e^{2i\lambda(t-a)} F_{at}[p](-\lambda) = e^{i\lambda(t-a)} (\varphi'_a[p](t, \lambda) - i\lambda \varphi_a[p](t, \lambda)) - 1$$

ограничена на множестве $\{(t, \lambda) : t \in \gamma_{ab}, \beta = -\alpha_a\}$, поэтому при каждом фиксированном z из полуплоскости $\Pi = \{\operatorname{Im}[(z-a)e^{-i\alpha_a}] < 0\}$ имеем оценку

$$|e^{2i\lambda(t-z)} P_b(t) F_{at}[p](-\lambda)| \leq C,$$

где $C = C(p)$ не зависит от t, z, a, b . Следовательно, после подстановки (5.3) в (2.3) мы можем поменять порядок интегрирования по переменным t и λ . Тогда при всех $z \in \Pi$

$$H_{ab}[p](z) = -\frac{1}{2i} \int_a^b \frac{P_b(t)}{t-z} dt - \int_a^b P_b(t) H_{at}[p](t-z+a) dt. \quad (5.4)$$

Так как $H_{at}[p](\zeta)$ аналитична вне $[a, t]$, то правая часть (5.4) аналитична в области $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega_{ab}}$, так что равенство (5.4) верно при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega_{ab}}$. Сравнивая (5.4) с (2.4), получим

$$A_{ab}[p](z) = - \int_a^b P_b(t) H_{at}[p](t-z+a) dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega_{ab}}. \quad (5.5)$$

Так как отображение $z \mapsto t-z+a$ область Ω_{at} переводит в область Ω_{at}^* , то из (2.5) имеем

$$H_{at}[p](t-z+a) = A_{at}[p](t-z+a) + J_{at}[p](t-z+a), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega_{at}^*}. \quad (5.6)$$

Легко проверить, что при любом $t \in \gamma_{ab}$ $\overline{\Omega_{at}^*} \cap G_{ab} = \emptyset$. Поэтому при каждом $z \in G_{ab}$ мы можем заменить $H_{at}[p](t-z+a)$ в (5.5) правой частью (5.6). Отсюда следует (5.1).

СЛЕДСТВИЕ 1. При любых $a, b \in \gamma$ и $p \in L^1(\gamma_{ab})$ функция $B_{ab}[p](z)$ удовлетворяет уравнению

$$B_{ab}[p](z) = B_{ab}^0[p](z) - \int_a^b P_b(t) B_{at}[p](t-z+a) dt, \quad z \in G_{ab}, \quad (5.7)$$

где

$$B_{ab}^0[p](z) = -\frac{1}{2i} \int_a^b P_b(t) \int_a^t \frac{P_t(\tau)}{(\tau-t+z-a)^2} d\tau dt. \quad (5.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения функции $H_{ab}[p](z)$ следует, что функция $(\partial/\partial z)H_{at}[p](z)$ непрерывна по (t, z) на множестве $\gamma_{ab} \times (\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega_{ab}})$. Отсюда на основании (2.4) заключаем, что то же самое верно и для $(\partial/\partial z)A_{at}[p](z)$. Следовательно, при каждом фиксированном $z \in G_{ab}$ функция $(\partial/\partial \zeta)A_{at}[p](\zeta)|_{\zeta=t-z+a}$ непрерывна по t на γ_{ab} . Поэтому

$$\frac{d}{dz} \left(\int_a^b P_b(t) A_{at}[p](t - z + a) dt \right) = - \int_a^b P_b(t) B_{at}[p](t - z + a) dt.$$

Дифференцируя теперь обе части (5.5) по z и учитывая при этом последнее равенство, получим (5.7).

ЛЕММА 2. *Функция $A_{ab}[p](z)$ аналитична в области G_{ab} и непрерывна на $\overline{G_{ab}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a, b \in \gamma$. Введем в рассмотрение Φ_{ab} – множество функций $f(c, z)$, непрерывных на $\gamma_{ab} \times \overline{G_{ab}}$ и аналитичных в области G_{ab} при каждом $c \in \gamma_{ab}$. Далее, зафиксируем $p \in L^1(\gamma_{ab})$ и обозначим через $f_0 = f_0(t, z)$ первый член правой части уравнения (5.1) и через T оператор, действующий на Φ_{ab} по формуле

$$[Tf](c, z) = - \int_a^c P_c(t) f(t, t - z + a) dt. \quad (5.9)$$

Легко проверить, что $f_0 \in \Phi_{ab}$ и $T\Phi_{ab} \subset \Phi_{ab}$. Покажем, что ряд

$$S(c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} [T^k f_0](c, z), \quad c \in \gamma_{ab}, \quad z \in G_{ab}, \quad (5.10)$$

сходится равномерно на $\gamma_{ab} \times \overline{G_{ab}}$. Отсюда будет следовать, что $S(b, z)$ аналитична в G_{ab} , непрерывна на $\overline{G_{ab}}$ и является решением уравнения (5.1). Ниже будет показано, что уравнение (5.1) может иметь только одно решение, следовательно, функция $S(b, z)$ должна совпасть с $A_{ab}[p](z)$, откуда будет следовать утверждение леммы.

Сначала докажем оценку

$$\sup_{\gamma_{ab} \times \overline{G_{ab}}} |f_0(c, z)| \leq C_0 (P_{ab})^2, \quad C_0 = C_0(\gamma), \quad (5.11)$$

$$P_{at} = \int_{\gamma_{at}} |p(\tau)| |d\tau|. \quad (5.12)$$

Поскольку при больших z оценка очевидна, будем считать $|z| \leq R$. Тогда интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} f_0(c, z) &= \frac{1}{2i} \int_a^c P_c(t) P_a(t) \ln(z - t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2i} \int_a^c p(\tau) \int_{\tau}^c P_c(t) \ln(\tau - t + z - a) dt d\tau, \end{aligned} \quad (5.13)$$

где ветвь логарифма любая фиксированная. Отсюда на основании очевидного неравенства

$$\sup_{a, b \in \gamma} \sup_{z \in \overline{G_{ab}}} \int_a^b |\ln(t - z)| |dt| < \infty$$

легко следует (5.11).

Далее, пусть $f(c, z)$ – произвольная функция, непрерывная и ограниченная на $\gamma_{ab} \times \overline{G_{ab}}$. Тогда

$$\sup_{z \in \overline{G_{ab}}} |[T^k f](b, z)| \leq \sup_{z \in \overline{G_{ab}}, c \in \gamma_{ab}} |[T^k f](c, z)| =: U_k(f, b).$$

Индукцией по k легко показать, что

$$U_k(f, b) \leq \|f\| \frac{(C_1 P_{ab}(x_b - x_a))^k}{k!}, \quad (5.14)$$

где

$$\|f\|_{ab} = \sup_{(c, z) \in \gamma_{ab} \times \overline{G_{ab}}} |f(c, z)|, \\ C_1 = C_1(\gamma) = \max_i \{M(\gamma_i)\}, \quad M(\gamma_i) = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |z'(x)|,$$

γ_i – i -й гладкий кусок кривой γ , а $z = z(x)$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$, – его параметризация. Отсюда следует равномерная сходимость ряда (5.10).

Теперь докажем, что оператор T , действующий в пространстве

$$C_{ab} = \{f \in C(\gamma_{ab} \times \overline{G_{ab}}) : \|f\|_{ab} < \infty\},$$

является вольтерровым. Отсюда будет следовать единственность решения уравнения (5.1).

Действительно, если $Tf = \lambda f$, $\lambda \neq 0$, то

$$f = \frac{T^k f}{\lambda^k},$$

откуда согласно (5.14) будем иметь

$$\|f\|_{ab} \leq \|f\| \frac{(C_1 P_{ab}(x_b - x_a))^k}{\lambda^k k!}.$$

Следовательно, $f \equiv 0$, что и означает вольтерровость T . Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Функция $A_{ab}[p](z)$ абсолютно непрерывна на ∂G_{ab} , и ее производная $B_{ab}[p](z)$ удовлетворяет оценке*

$$\int_{\partial G_{ab}} |B_{ab}[p]| |dz| \leq C e^{C_1 P_{ab}} P_{ab}^2, \quad (5.15)$$

где P_{at} определяется по (5.12), C_1 – та же константа, что в (5.14), $C = C(\gamma)$ – постоянная, зависящая только от γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $B_{ab}[p] \in E_1(G_{ab})$. Отсюда (см. [3; с. 208]) будет следовать абсолютная непрерывность $A_{ab}[p](z)$ на ∂G_{ab} . Попутно получим оценку (5.15).

По определению [3; с. 203] $B_{ab}[p](z) \in E_1(G_{ab})$ тогда и только тогда, когда существует последовательность спрямляемых кривых g_n , сходящихся к ∂G_{ab} , таких, что

$$\int_{g_n} |B_{ab}[p](z)| |dz| \leq K, \quad (5.16)$$

где постоянная $K = K(\gamma, p, a, b)$ не зависит от n . Покажем, что в качестве g_n в (5.16) можно взять кривую $g_{ab}(n)$, которая получается из границы области G_{ab} гомотетией относительно центра в точке $(a+b)/2$ с коэффициентом $1+1/n$.

Зафиксируем $a, b \in \gamma$, $p \in L^1(\gamma_{ab})$ и положим

$$h_0(c, z) = B_{ac}^0[p](z), \quad h(c, z) = B_{ac}[p](z), \quad c \in \gamma_{ab}, \quad z \in G_{ab}.$$

Далее введем множество функций

$$\Psi_{ab} = \{h(c, z) \in C(\gamma_{ab} \times G_{ab}) : \forall c \in \gamma_{ab} \quad h(c, z) \in H_1(G_{ac})\}$$

и оператор T , действующий на Ψ_{ab} в формуле (5.9).

Имеем

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{g_{ab}(n)} |h_0(b, z)| |dz| \leq \sup_{c \in \gamma_{ab}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{g_{ab}(n)} |h_0(c, z)| |dz| =: U_0(b).$$

Докажем, что при некотором $C = C(\gamma)$

$$U_0(c) \leq C \cdot (P_{ac})^2, \quad c \in \gamma_{ab}. \quad (5.17)$$

Дважды интегрируя по частям выражение (5.8), будем иметь

$$\begin{aligned} B_{ac}^0[p](z) = & -\frac{1}{2i} \int_a^c p(t) [(P_c(t) + P_a(t)) \ln(z-t) - P_c(t) \ln(z-a)] dt \\ & - \frac{1}{2i} \int_a^c p(t) \int_t^c p(\tau) \ln(z-(t-\tau+a)) d\tau dt. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Отсюда, используя элементарную оценку

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{M(\gamma)} \int_{g_{ac}(n)} |\ln(z-\zeta)| |dz| < \infty,$$

где $M(\gamma) = \{(a, c, \zeta) : a, c \in \gamma, \zeta \in \overline{\Omega_{ac}} \cup \overline{\Omega_{ac}^*}\}$, получим (5.17).

Далее, положим

$$U(c) = \sup_{t \in \gamma_{ac}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{g_{at}(n)} |h(t, z)| |dz|.$$

Из уравнения (5.7) имеем

$$U(c) \leq U_0(c) + P_{ac} \int_a^c U(t) |dt|.$$

Отсюда, переходя параметризацией $t = z(x)$, $x \in [x_a, x_c]$, к функции $V(x) = U(z(x))$, учитывая при этом, что $|dt| \leq C_1 dx$, где $C_1 = C_1(\gamma)$ – постоянная, фигурирующая в (5.14), и используя неравенство Гронуолла (см., например, [6; с. 37]), получим

$$V(x_c) \leq U_0(c) e^{P_{ac} C_1 (x_c - x_a)}.$$

Отсюда, учитывая (5.17), получаем (5.15).

6. Сходимость последовательности p_n в $L^1(\gamma_{ab})$. Лемма 3 помимо оценки (5.15) утверждает, что если $p \in L^1(\gamma_{ab})$, то и $B_{ab}[p] \in L^1(\gamma_{ab})$. Отсюда на основании равенства (2.4) заключаем, что $q_{ab} \in L^1(\gamma_{ab})$. Тогда из рекуррентных соотношений (4.3) следует, что $p_n \in L^1(\gamma_{ab})$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 4. *Существует положительное число δ такое, что для любых $a, b \in \gamma$, удовлетворяющих неравенству $|b - a| < \delta$,*

$$\|p_n - q\|_{L^1(\gamma_{ab})} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для любого положительного числа $\rho < 1$ существует постоянная $r = r(\gamma, \rho)$ такая, что для $a, b \in \gamma$ и f, g из $B_r := \{\|h\|_{L^1(\gamma_{ab})} \leq r\}$

$$\|B_{ab}[f] - B_{ab}[g]\|_{L^1(\gamma_{ab})} \leq \rho \|f - g\|_{L^1(\gamma_{ab})}. \quad (6.2)$$

Пусть $f, g \in B_r$. Положим $h_{ab}(z) = B_{ab}[f](z) - B_{ab}[g](z)$. Согласно (5.7)

$$h_{ab}(z) = U_{ab}(z) - \int_a^b G_b(t) h_{at}(t - z + a) dt, \quad (6.3)$$

где

$$\begin{aligned} U_{ab}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \int_a^t \frac{F_b(t)F_t(\tau) - G_b(t)G_t(\tau)}{(\tau - t + z - a)^2} d\tau dt \\ &\quad - \int_a^b [F_b(t) - G_b(t)] B_{at}[f](t - z + a) dt, \\ F_c(x) &= \int_x^c f(t) dt, \quad G_c(x) = \int_x^c g(t) dt. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям два раза, получим

$$\begin{aligned} U_{ab}(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \left[\int_a^b (f(t) - g(t)) \int_t^b g(\tau) \int_t^\tau \ln\left(\frac{t - s + z - a}{z - s}\right) ds d\tau dt \right. \\ &\quad \left. + \int_a^b dt f(t) \int_t^b d\tau (f(\tau) - g(\tau)) \int_t^\tau \ln\left(\frac{t - s + z - a}{z - s}\right) ds \right] \\ &\quad + \int_a^b [G_b(t) - F_b(t)] B_{at}[f](t - z + a) dt \\ &\equiv U_1 + U_2 + U_3. \end{aligned}$$

где ветвь логарифма любая, фиксированная.

Так как $f, g \in B_r$, то, рассуждая так же, как при выводе оценки (5.17), получим

$$\|U_i\| \leq C_i(\gamma) r \|f - g\|, \quad i = 1, 2.$$

(Здесь и далее в доказательстве $C_1(\gamma), C_2(\gamma), \dots$ – постоянные, зависящие только от γ .) Далее, применяя к функции $B_{at}[f](t - z + a)$ оценку (5.15), получим

$$\|U_3\| \leq C_3(\gamma) r^2 \|f - g\|_{L^1(\gamma_{ab})}.$$

Пусть $r \leq 1$. Тогда

$$\sup_{b' \in \gamma_{b1}} \sup_{z \in g_{ab'}} |U_{ab}(z)| \leq C_4(\gamma) r \|f - g\|_{L^1(\gamma_{ab})}, \quad f, g \in B_r. \quad (6.4)$$

Отсюда и из уравнения (6.3), повторяя все рассуждения, проведенные при выводе оценки (5.15), получим

$$\|B_{ab}[f] - B_{ab}[g]\|_{L^1(\gamma_{ab})} \leq C_5(\gamma) r \|f - g\|_{L^1(\gamma_{ab})}, \quad f, g \in B_r, \quad 0 < r \leq 1. \quad (6.5)$$

Отсюда видно, что в качестве $r(\gamma, \rho)$ можно взять $\rho/C_5(\gamma)$.

Возьмем произвольное $0 < \rho < 1$ и подберем $r(\gamma, \rho)$, для которого верно утверждение (6.2). Пусть ε – некоторое положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\varepsilon \cdot \left(1 + \frac{C(\gamma)e^\varepsilon \varepsilon}{1 - \rho}\right) < r(\gamma, \rho).$$

Так как q_{ab} суммируема на γ , то найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\|q_{ab}\|_{L^1(\gamma_{ab})} < \varepsilon$ при $|b - a| < \delta(\varepsilon)$. Тогда индукцией по n легко убедиться, что $\|p_n\|_{L^1(\gamma_{ab})} < r$ при всех n , откуда согласно (6.2)

$$\|B_{ab}[p_n] - B_{ab}[p_{n-1}]\|_{L^1(\gamma_{ab})} \leq \rho \|p_n - p_{n-1}\|_{L^1(\gamma_{ab})}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что последовательность $\{p_n\}$ сходится в $L^1(\gamma_{ab})$ к некоторому пределу p , удовлетворяющему уравнению (4.9). Но при $|b - a| < \delta$ $B_{ab}[p]$ – сжатие, следовательно, уравнение (4.9) может иметь только одно решение, так что $p = q$.

7. Аналитичность p_n . Утверждения лемм 1–4 верны для любой функции $p \in L^1(\gamma)$. Начиная с этого момента до конца доказательства теоремы 1 будем считать, что уравнение (1.1) безмонодромно. В этом пункте мы изучаем аналитические свойства последовательности (4.3).

Сначала установим одно важное свойство оператора B_{ab} .

ЛЕММА 5. Если $p \in E_1(\Omega_{ab})$, то

$$B_{ab}[p] \in E_1(\Omega_{ab}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \in E_1(\Omega_{ab})$. Тогда любая ее первообразная, например, $P(z) = \int_a^z p \, dt$, аналитична в Ω_{ab} и непрерывна на $\bar{\Omega}_{ab}$, поэтому то же самое верно для любого решения системы (3.1) с $Q = P$, а значит, и для $\varphi_a[p](z, \lambda)$. Следовательно, кривую γ_{ab} в определениях $F_{ab}[p](\lambda)$ и $B_{ab}[p](z)$ (см. (4.6) и (2.6)) можно заменить отрезком $[a, b]$. Тогда область G_{ab} , фигурирующая в формулировке леммы 3, есть $\mathbb{C} \setminus [a, b]$, откуда по той же лемме получаем $B_{ab}[p] \in E_1(\mathbb{C} \setminus [a, b])$.

ЛЕММА 6. Для функции $\varphi_a(z, \lambda)$ и ее производной соответственно справедливы асимптотические оценки (4.5a) и (4.5b), где оценки остаточных членов равномерны по β , $a, z \in \gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решения $\psi_\pm$, введенные в п. 2, имеют асимптотики (см. [2; лемма 2]):

$$\frac{\partial^k \psi_\pm[p](z, \lambda)}{\partial z^k} = (\pm i \lambda)^k e^{\pm i \lambda z} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{2i \lambda} \int_{B_\beta^\pm} (1 + (-1)^{k-1} e^{\mp 2i \lambda(z-t)}) p(t) \, dt + O(\lambda^{-2})\right), \quad (7.1)$$

$\lambda \rightarrow \infty$, $k = 0, 1$, причем оценка остаточного члена равномерна по $z \in \gamma$ и β . Отсюда для вронскиана функций ψ_- и ψ_+ имеем $W(\psi_-, \psi_+) \sim 2i\lambda$, $\lambda \rightarrow \infty$, так что при больших λ

$$\varphi_a(z, \lambda) = \frac{\psi_-(a, \lambda)\psi_+(z, \lambda) - \psi_+(a, \lambda)\psi_-(z, \lambda)}{W(\psi_-, \psi_+)}. \quad (7.2)$$

Подставляя сюда (7.1), после несложных вычислений получим (4.5).

ЛЕММА 7. *При всех $a, b \in \gamma$ функция q_{ab} допускает представление*

$$q_{ab}(z) = I(z) + \tilde{q}_{ab}(z), \quad (7.3)$$

где

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{q}{t-z} dt, \quad (7.4)$$

$\tilde{q}_{ab}$ принадлежит классу Харди H_2 в полуплоскости $\Pi_{ab}^- = \{a + (b-a)\zeta, \operatorname{Im} \zeta < 0\}$
и

$$\|\tilde{q}_{ab}\|_{L^1(a,b)} \leq K_1 \cdot |b-a|^{1/2}, \quad (7.5)$$

где $K_1 = K_1(\gamma)$ зависит только от γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (4.2) имеем

$$q_{ab}(z) = -\frac{1}{\pi} (A_{ab}^0(z))', \quad z \in \Omega_{ab}, \quad (7.6)$$

где

$$A_{ab}^0(z) = H_{ab}(z) - J_{ab}(z), \quad z \notin \Gamma_{ab}. \quad (7.7)$$

Легко проверить, что уравнение (2.1) безмонодромно на γ тогда и только тогда, когда для всех решений $y(z, \lambda)$ уравнения (2.1)

$$\int_{\gamma} e^{\pm i\lambda z} p(z) y(z, \lambda) dz = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Поэтому

$$F_{ab}(\lambda) = - \int_{\gamma'_{ba}} e^{i\lambda(t-a)} q \varphi_a(t, \lambda) dt,$$

где $\gamma'_{ba} = \gamma \setminus \gamma_{ab}$. Тогда согласно (4.5a)

$$e^{i\lambda(t-a)} \varphi_a(t, \lambda) = \frac{1}{2i\lambda} (e^{2i\lambda(t-a)} - 1) + O(\lambda^{-2})$$

при $\lambda = re^{-i\alpha_{ab}}$, $\alpha_{ab} = \arg(b-a)$, $r \rightarrow +\infty$, равномерно по $a, b \in \gamma$, $t \in \gamma'_{ab}$. Следовательно,

$$F_{ab}(\lambda) = - \int_{\gamma'_{ab}} Q_b(t) e^{2i\lambda(t-a)} dt + O(\lambda^{-2})$$

с равномерной по $a, b \in \gamma$ оценкой остатка. Отсюда и из (2.3) при $\beta = -\alpha_{ab}$ будем иметь

$$H_{ab}(z) = \tilde{H}_{ab}(z) + \frac{1}{2i} \int_{\gamma'_{ab}} \frac{Q_b(t)}{t-z} dt, \quad (7.8)$$

где $(\tilde{H}_{ab}(z))'$ принадлежит $H_2(\Pi_{ab}^-)$ и удовлетворяет оценке

$$\int_{l_{ab}} |(\tilde{H}_{ab}(z))'|^2 |dz| \leq K_2. \quad (7.9)$$

Отсюда и из (7.6), (7.7) следуют (7.3)–(7.5).

Основной результат этого пункта – следующая

ЛЕММА 8. *При почти всех $a, b \in \gamma$, для которых $\Omega_{ab} \neq \emptyset$, функции p_n принадлежат классу $E_1(\Omega_{ab})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $q_{ab} \in E_1(\Omega_{ab})$ при почти всех $a, b \in \gamma$, отсюда по лемме 5 будет следовать утверждение леммы. Так как γ выпукла, то функция $I(z)$ (см. (7.4)) имеет конечные угловые граничные значения (слева и справа) п.в. на γ (см. [3; с. 194]). Отсюда в силу равенств (7.3)–(7.5) следует, что при почти всех $a, b \in \gamma$ функция q_{ab} имеет конечные угловые граничные значения п.в. на Γ_{ab} и $q_{ab} \in L^1(a, b)$. Поэтому остается только доказать суммируемость q_{ab} на γ_{ab} . Для этого достаточно показать, что ее первообразная абсолютно непрерывна на γ_{ab} (см. [3; с. 208]). Согласно (7.6), (7.7), (4.8) и (4.9)

$$\int_{\zeta}^b q_{ab} dt = A_{ab}(\zeta) + Q_b(\zeta), \quad \zeta \in \gamma_{ab}.$$

Функция $A_{ab}(\zeta)$ абсолютно непрерывна по лемме 3, а функция $Q_b(\zeta)$ абсолютно непрерывна как первообразная суммируемой функции q . Лемма доказана.

8. Аналитичность функции q вблизи γ . Основной результат пункта – это

ЛЕММА 9. *Существует некоторая область $\omega \subset \Omega$, примыкающая к γ , такая, что $q \in E_1(\omega)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы докажем лемму при дополнительном требовании на γ и q :

УСЛОВИЕ (OD). Точку O , удовлетворяющую условию из п. 2, можно подобрать так, что функция $Q_b(z) = \int_z^b q dt$ дифференцируема в точке O .

Отметим, что условие (OD) выполняется, если γ строго выпукла, т.е. $\Omega_{ab} \neq \emptyset$ при всех $a, b \in \gamma$. Из условия (OD) следует, что функция $I(z)$ (см. (7.4)) имеет конечное угловое граничное значение в точке O . Тогда из представления (7.3) будем иметь

$$\|q_{ab}\|_{L^1(a,b)} \rightarrow 0, \quad a, b \rightarrow O. \quad (8.1)$$

Пусть γ_{AB} содержит внутри точку O .

Как было отмечено в п. 4, для доказательства включения $q \in E_1(\Omega_{ab})$ достаточно установить оценку (4.4).

Из лемм 2 и 3 следует, что если $p \in E_1(\Omega_{ab})$, то функция $B_{ab}[p](z)$ принадлежит $E_1(\mathbb{C} \setminus [a, b])$. Обозначим через $B_{ab}^-[p](\zeta)$ угловое граничное значение (изнутри Ω_{ab}) функции $B_{ab}[p](z)$ в точке $\zeta \in [a, b]$. Согласно (5.15) для любого $\rho < 1$ найдется

число $\sigma = \sigma(\rho, \gamma) > 0$ такое, что для всех $p \in E_1(\Omega_{ab})$, удовлетворяющих неравенству $\|p\|_{L^1(a,b)} < \sigma$, выполнена оценка

$$\|B_{ab}^-[p]\| < \rho \cdot \|p\|_{L^1(a,b)}.$$

Используя (8.1) и лемму 8, выберем $a \in \dot{\gamma}_{AO}$, $b \in \dot{\gamma}_{OB}$ так, что

- а) $|a - b| < \delta$, где δ удовлетворяет условиям следствия из леммы 4;
- б) $p_n \in E_1(\Omega_{ab})$, $n = 0, 1, 2, \dots$;
- в) $\|q_{ab}\|_{L^1(a,b)} < r(1 - \rho)$.

По индукции легко доказывается, что

$$\|p_n\|_{L^1(a,b)} < \|q_{ab}\|_{L^1(a,b)}.$$

Отсюда следует (4.4), значит, и утверждение леммы в случае выполнения условия (OD).

Если условие (OD) не выполнено, то доказательство сильно усложняется. Укажем только основные моменты. Пусть $a \in \dot{\gamma}_{AO}$, $b \in \dot{\gamma}_{OB}$ удовлетворяют условиям а) и б). Тогда функции

$$f_n(z) = \int_z^b p_n dt, \quad n = 0, 1, \dots,$$

по лемме 8 принадлежат множеству

$$\Phi_{ab} = \{f(z) \text{ аналитична в } \Omega_{ab} : f \in C(\overline{\Omega_{ab}}) \cap AC(\Gamma_{ab})\}$$

и равномерно сходятся на γ_{ab} к $Q_b(z)$ (лемма 4). Докажем, что при достаточно близких к O точках a, b , удовлетворяющих условиям а), б), при всех $n = 0, 1, \dots$

$$\|f_n\| \leq C, \quad (8.2)$$

где $C > 0$ не зависит от n . Отсюда согласно принципу компактности будет следовать, что некоторая подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ будет сходиться к некоторой функции $f \in \Phi_{ab}$, которая на γ_{ab} будет равна $Q_b(z)$. Тем самым, будет доказано, что $q \in E_1(\Omega_{ab})$.

Из (4.3) и (2.6) имеем

$$f_{n+1}(z) = f_0(z) + K_{ab}[f_n](z), \quad z \in [a, b],$$

где

$$K_{ab}[f](z) = C_{ab}[f](a) - C_{ab}[f](z), \quad (8.3)$$

$$f_0 = \int_z^b q_{ab} dt,$$

$$C_{ab}[f](z) = C_{ab}^-[f](z) + \int_a^b f(t) C_{at}(t - z + a) dt,$$

$C_{ab}^-[f](z)$ – угловое граничное значение (изнутри Ω_{ab}) функции

$$C_{ab}^0[f](z) = \frac{1}{2i} \int_a^b (f(s) - f(t)) \int_a^s \frac{f(r) - f(s)}{r - s + z - a} dr ds,$$

которое согласно формуле (5.13) существует всюду на $[a, b]$.

Из доказательства леммы 2 следует оценка

$$\sup_{t \in [a, b], z \in [a, t]} |C_{at}[f](z)| \leq C_0 \|f\|_{ab}^2 e^{2\|f\|_{ab}|b-a|},$$

где $C_0 = C_0(\gamma)$, $\|f\|_{ab} = \sup_{z \in [a, b]} |f(z)|$. Отсюда и из равенства (8.3) следует, что для любого $\rho < 1$ найдется $r = r(\rho)$, что для всех $f \in C[a, b]$ выполнена импликация

$$\|f\|_{ab} < r \implies \|K_{ab}\|_{ab} < \rho \cdot \|f\|_{ab}.$$

Далее, поскольку при почти всех $A, B \in \gamma$ функция $q_{AB} \in E_1(\Omega_{AB})$, то

$$\|f_0\|_{ab} \rightarrow 0, \quad a, b \rightarrow O.$$

Теперь, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве оценки (4.4), получим (8.2). Лемма доказана.

9. Мероморфное продолжение q в область Ω . Пусть $b \in \gamma$, $a \in \omega$, где ω – область, фигурирующая в формулировке леммы 9. Обозначим через $e_{ab}(z, \lambda)$ решение уравнения (2.1) при $p = q$, удовлетворяющее условиям

$$e_{ab}(b, \lambda) = e^{i(b-a)\lambda}, \quad e'_{ab}(z, \lambda)|_{z=b} = i\lambda e^{i(b-a)\lambda}.$$

Далее, положим

$$S_{ab}(\lambda) = \frac{e_{ab}(a, -\lambda)}{e_{ab}(a, \lambda)}. \quad (9.1)$$

ЛЕММА 10. *Существует постоянная $R = R(\gamma) > 0$ такая, что в полуплоскости $\Pi_{ab} = \{\lambda : \text{Im}[(b-a)\lambda] \geq R\}$ функция $S_{ab}(\lambda)$ не имеет полюсов и*

$$S_{ab}(\lambda) = 1 + s_{ab}^\pm(\lambda) + r_{ab}^\pm(\lambda), \quad \lambda \in l_{ab}^\pm = \left\{ \frac{x + iR}{b-a}, \pm x \in [0, +\infty) \right\}, \quad (9.2)$$

где

$$s_{ab}^\pm(\lambda) = \pm \int_{\gamma_{ab}} e^{\pm 2i\lambda(a-t)} Q_b(t) dt \pm \int_{\gamma'_{ba}} e^{\pm 2i\lambda(t-a)} Q_b(t) dt, \quad (9.3)$$

$$\sup_{\lambda \in l_{ab}^\pm, (a,b) \in \omega \times \gamma} |r_{ab}^\pm(\lambda)\lambda^2| < \infty. \quad (9.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $S_{ab}(-\lambda) = 1/S_{ab}(\lambda)$, то функцию $S_{ab}(\lambda)$ достаточно изучить в угле $\Pi_{ab}^+ := \{z \in \Pi_{ab} : \text{Re}[(b-a)\lambda] \geq 0\}$.

Имеем

$$e_{ab}(z, \lambda) = \frac{1}{\langle \psi_+, \psi_- \rangle} (\langle e_{ab}, \psi_- \rangle \psi_+(z, \lambda) - \langle e_{ab}, \psi_+ \rangle \psi_-(z, \lambda)),$$

где $\langle u, v \rangle$ означает вронскиан функций u, v . Подставляя сюда разложения (7.1), получим

$$e_{ab}(b, \pm\lambda) = 1 \mp \frac{1}{2i\lambda} \int_{\gamma_{ab}} q dt - \frac{1}{2i\lambda} \int_{\gamma_{ba}^\pm} e^{\pm 2i\lambda(t-a)} q dt + O(\lambda^{-2} e^{\pm 2i\lambda(b-a)}), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

где $\gamma_{ab}^- = \gamma_{ab}$, $\gamma_{ab}^+ = \gamma'_{ba}$, оценка остаточного члена равномерная по $(a, b) \in \omega \times \gamma$, $\arg \lambda$. Подставляя эти оценки в (9.1), получим (9.2).

Поскольку все дальнейшие рассуждения работы [2; пп. 6–9] переносятся на наш случай без изменений, мы наметим лишь основные моменты оставшейся части доказательства.

Введем в рассмотрение функцию

$$f_{ab}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{l_{ab}} (S_{ab}(\lambda) - 1) e^{i(z-a)\lambda} d\lambda, \quad z \in m_{ab}, \quad (9.5)$$

где m_{ab} – полупрямая $\{z = a + (b-a)\zeta, \zeta > 0\}$.

ЛЕММА 11. *Функция f_{ab} обладает следующими свойствами:*

- 1) $f_{ab}(z) \equiv 0$ при $z = 2b - a + (b-a)t, t \geq 0$,
- 2) справедливо равенство

$$f_{ab}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{Q_b(t)}{2t - z - a} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{Q_b(t)}{2t + z - 3a} dt + \tilde{f}_{ab}(z), \quad (9.6)$$

где $\tilde{f}_{ab} \in AC(M_{ab})$, $M_{ab} = m_{ab} \cup \{a\}$, и

$$\sup_{(a,b) \in \omega \times \gamma} \|\tilde{f}_{ab}\|_{L^2(M_{ab})} < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует непосредственно из формул (9.2) и (9.5).

Если $a, b \in \omega$, то $[a; b] \subset \omega$, так что ядро оператора преобразования $k_{ab}(z, x)$, определяемое соотношением

$$e_{ab}(z, \lambda) = e^{i\lambda(z-a)} + \int_{M_{zb}} k_{ab}(z, x) e^{i\lambda(x-a)} dx, \quad (9.7)$$

удовлетворяет уравнению (см., например, [7])

$$k_{ab}(z, x) - \int_{M_{zb}} f_{ab}(x+s-a) k_{ab}(z, s) ds = f_{ab}(z+x-a), \quad z \in M_{ab}, \quad x \in M_{zb}. \quad (9.8)$$

Но уравнение (9.8) в силу определения $f_{ab}(z)$ имеет смысл для любой пары $(a, b) \in \omega \times \gamma$. Если при некоторой паре $(a', b') \in \omega \times \gamma$ это уравнение разрешимо, то мы можем функцию q продолжить с области ω на отрезок $[a', b']$ как решение обратной задачи по функции рассеяния $S_{a'b'}(\lambda)$ оператора Штурма–Лиувилля на полупрямой $M_{a'b'}$ с финитным потенциалом.

В ходе доказательства леммы 8 было установлено, что при почти всех $a, b \in \gamma$ функция $q_{ab} \in E_1(\Omega_{ab})$. Тогда из соотношений (7.3), (7.5) следует, что при почти всех $b \in \gamma$ функция $\int_{\gamma} (Q_b(t)/(t-z)) dt$ непрерывна на $\overline{\Omega}$, поэтому $f_{ab}(z)$ непрерывна на $[a, 2b-a]$ при почти всех $a, b \in \gamma$. Отсюда на основании леммы 5 из [2] заключаем, что интегральный оператор в (9.8) при почти каждом фиксированном $b \in \gamma$ является компактнозначной аналитической функцией от a в области ω . Поэтому мы можем применить к уравнению (9.8) аналитическую теорему Фредгольма [8; с. 224]. В результате (см. [2; лемма 7]) мы выделим в Ω конечный набор точек $\Delta = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ таких, что для любого отрезка $[a; b] \in \Omega$, не пересекающегося с Δ , уравнение (9.8) имеет единственное решение $k_{ab}(z, x)$, обладающее следующим

свойством: функция $e_{ab}(z, \lambda)$, построенная по $k_{ab}(z, x)$ согласно формуле (9.8), мероморфна в области Ω с полюсами в точках Δ .

Зафиксируем теперь любое $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. По доказанному функция $e_{ab}(z, \lambda_0)$ мероморфна в Ω , следовательно, имеет там конечное число нулей $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_l$, каждый из которых является простым. Обозначим это множество N . Тогда, поскольку $e_{ab}(z, \lambda_0)$ удовлетворяет уравнению (2.1) в ω , то

$$q(z) = \frac{e''_{ab}(z, \lambda_0) + \lambda_0^2}{e_{ab}(z, \lambda_0)}, \quad z \in \bar{\omega} \setminus N, \quad (9.9)$$

Отсюда следует, что функция $q(z)$ мероморфно продолжается с ω в область Ω с особенностями в точках из Δ и N . Ясно, что в точках z_k из Δ функция q имеет полюс второго порядка. Что касается особенностей в точках ζ_k из N , то они на самом деле являются устранимыми. Действительно, так как функция $f(\lambda) := e_{ab}(\zeta_k, \lambda)$ целая, то она отлична от 0 при всех λ из достаточно малой проколотой окрестности λ_0 . Выбирая такое λ в (9.9), мы получим аналитическое продолжение функции q в точке ζ_k . Отсюда следует пункт (i).

Докажем (ii). Так как $f_{ab}(z)$ непрерывна на $[a, 2b - a]$ при всех $a \in \omega$ и почти всех $b \in \gamma$, то из (9.8) и (9.7) следует, что любое (мероморфное в Ω) решение $y(z, \lambda)$ уравнения (2.1) имеет угловые граничные значения п.в. на γ . Но на самой кривой γ функция $y(z, \lambda)$ имеет абсолютно непрерывную производную, следовательно [3; с. 208], $y'' \in E_1(G)$ для любой области G , примыкающей к γ и не имеющей полюсов q ни внутри себя, ни на границе. Взяв в качестве $y(z, \lambda)$, например, $\psi_-(z, \lambda)$, которое при достаточно больших λ не имеет нулей на $\bar{G}$, получим $q(z) = \psi''_-(z, \lambda)/\psi_-(z, \lambda) + \lambda^2$, так что $q \in E_1(G)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. J. Duistermaat, F. A. Grünbaum, "Differential equations in the spectral parameter", *Comm. Math. Phys.*, **103**:2 (1986), 177–240.
- [2] Х. К. Ишкин, "О критерии однозначности решений уравнения Штурма–Лиувилля", *Матем. заметки*, **84**:4 (2008), 552–566.
- [3] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950.
- [4] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, ГИТТЛ, М., 1956.
- [5] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака*, Наука, М., 1988.
- [6] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970.
- [7] В. Э. Лянце, "Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора", *Матем. сб.*, **72(114)**:4 (1967), 537–557.
- [8] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики* Т. 1. *Функциональный анализ*, Мир, М., 1977.

Х. К. Ишкин

Башкирский государственный университет, г. Уфа
E-mail: Ishkin62@mail.ru

Поступило

24.04.2013