Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Пустовойтов, Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 1, 107–117

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1032>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:27:17

УДК 517

ПРИБЛИЖЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННОЙ МАЖОРАНТОЙ СМЕШАННЫХ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Н. Н. Пустовойтов

В работе получены точные по порядку верхние грани наилучших приближений классов H_q^Ω тригонометрическими полиномами. Спектр приближающих полиномов лежит в множествах, порожденных поверхностями уровня функции $\Omega(t)$. Эти множества являются обобщением гиперболических крестов на случай произвольного $\Omega(t)$.

Библиография: 13 названий.

В работе рассматриваются приближения классов H_q^Ω тригонометрическими полиномами, гармоники которых лежат в множествах, порожденных поверхностями уровня мажоранты $\Omega(t)$.

Введем некоторые обозначения. Мы будем изучать 2π -периодические функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ из пространств $L_q(\pi_d)$, т.е. функции с конечной нормой

$$\|f(x)\|_q = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^q dx \right)^{1/q}, \quad 1 \leq q < \infty,$$

$$\|f(x)\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|, \quad q = \infty,$$

где $\pi_d = [-\pi, \pi]^d$.

Для $f(x) \in L_q(\pi_d)$ введем смешанный модуль непрерывности порядка l

$$\Omega(f; t)_q = \sup_{\substack{|h_j| \leq t_j \\ j=1, \dots, d}} \|\Delta_h^l f(x)\|_q,$$

где $\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_d}^l \cdots \Delta_{h_1}^l f(x)$ есть l -я разность с шагом h_j по переменной x_j . Запись $f(x) \in L_q^0(\pi_d)$ равносильна тому, что $f(x) \in L_q(\pi_d)$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = 1, \dots, d.$$

Классы H_q^Ω — это классы функций $f(x) \in L_q^0(\pi_d)$, для которых $\Omega(f; t)_q \leq \Omega(t)$, где $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — заданная функция типа смешанного модуля непрерывности порядка l , т.е. $\Omega(t)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = 1, \dots, d$; $\Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^d t_j = 0$;
- 2) $\Omega(t)$ возрастает по каждой переменной;
- 3) $\Omega(k_1 t_1, \dots, k_d t_d) \leq (\prod_{j=1}^d k_j)^l \Omega(t)$, $k_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$;
- 4) $\Omega(t)$ непрерывна при $t_j \geq 0$, $j = 1, \dots, d$.

Будем считать, что $\Omega(t)$ удовлетворяет условиям (S) и (S_l) [1]. Это означает следующее.

Функции одного переменного $\varphi(\tau) \geq 0$ удовлетворяет условию (S) , если $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ почти возрастает при некотором $0 < \alpha < 1$, т.е. найдется число $C > 0$, не зависящее от τ_1 и τ_2 , такое, что

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Функция $\varphi(\tau) \geq 0$ удовлетворяет условию (S_l) , если $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ почти убывает при некотором $0 < \gamma < l$, т.е. найдется число $C > 0$, не зависящее от τ_1 и τ_2 , такое, что

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \geq C \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Будем говорить, что $\Omega(t)$ удовлетворяет условиям (S) и (S_l) , если $\Omega(t)$ удовлетворяет этим условиям по каждому t_j при фиксированных $t_i, i \neq j$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\Omega(t)$ удовлетворяет условию (S) с некоторыми $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ по переменным $t_1, \dots, t_d$, то, взяв $\alpha = \min_{1 \leq j \leq d} \alpha_j$, можно утверждать, что $\Omega(t)$ удовлетворяет условию (S) при этом значении α по всем переменным.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из свойств функции $\Omega(t)$ можно вывести, что $\Omega(t)/\prod_{j=1}^d t_j^l$ почти убывает.

Положим $2^{-s} = (2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_d})$ для вектора $s = (s_1, \dots, s_d)$ с натуральными компонентами.

Введем обозначения приближающих множеств. Для натурального N положим

$$\begin{aligned} \kappa(N) = \kappa(\Omega, N) &= \left\{ s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, \Omega(2^{-s}) \geq \frac{1}{N} \right\}, \\ Q(N) = Q(\Omega, N) &= \bigcup_{s \in \kappa(N)} \rho(s), \end{aligned}$$

где $\rho(s) = \{k = (k_1, \dots, k_d) : k_j - \text{целые}, 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}\}$ – двоичная пачка. Далее,

$$\begin{aligned} \kappa^\perp(N) &= \left\{ s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, \Omega(2^{-s}) < \frac{1}{N} \right\}, \\ Q^\perp(N) &= \bigcup_{s \in \kappa^\perp(N)} \rho(s), \quad \theta(N) = \kappa^\perp(N) \setminus \kappa^\perp(2^l N). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Множество $\theta(N)$ непусто. Действительно, по свойству модуля непрерывности порядка l

$$\Omega(2^{-s_1}, \dots, 2 \cdot 2^{-s_j}, \dots, 2^{-s_d}) \leq 2^l \Omega(2^{-s}).$$

Возьмем s_j такое, что $(s_1, \dots, s_j + 1, \dots, s_d) \in \kappa^\perp(2^l N)$, но $s = (s_1, \dots, s_j, \dots, s_d) \notin \kappa^\perp(2^l N)$. Предположим, что $s \notin \theta(N)$. Тогда $s \in \kappa(N)$. Отсюда

$$\frac{1}{N} \leq \Omega(2^{-s}) \leq 2^l \Omega(2^{-s_1}, \dots, 2^{-(s_j+1)}, \dots, 2^{-s_d}) < 2^l \frac{1}{2^l N} = \frac{1}{N}.$$

Полученное противоречие показывает, что $s \in \theta(N)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При доказательстве оценок снизу в теореме 1 в п. 3 будет доказано, что для $\Omega(\mathbf{t})$, удовлетворяющего условиям (S) и (S_l) , количество элементов множества $\theta(N)$ по порядку равно $|\theta(N)| \asymp (\log_2 N)^{d-1}$.

Будем приближать классы H_q^Ω тригонометрическими полиномами

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in Q(N)} C_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})},$$

а наилучшее приближение функции $f(\mathbf{x})$ полиномами такого вида в норме $L_p(\pi_d)$ обозначим $E_{Q(N)}(f)_p$. Соответственно

$$E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_p = \sup_{f \in H_q^\Omega} E_{Q(N)}(f)_p.$$

Как видно из определений, гармоника приближающих полиномов лежат в множествах, порожденных поверхностями уровня функции $\Omega(\mathbf{t})$. В случае классов Никольского H_q^r , порождаемых мажорантой $\Omega(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}$, мы приходим к гиперболическим крестам, которые в ряде случаев являются оптимальными приближающими множествами в смысле поперечников по Колмогорову (см., например, [2]).

Известна теорема о представлении классов H_q^Ω [3].

ТЕОРЕМА А. Пусть $\Omega(\mathbf{t})$ удовлетворяет условиям (S) и (S_l) . Функция $f(\mathbf{x})$ из $L_q^0(\pi_d)$ принадлежит классу H_q^Ω тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \|\delta_{\mathbf{s}}(f; \mathbf{x})\|_q &\ll \Omega(2^{-\mathbf{s}}), & 1 < q < \infty, \\ \|A_{\mathbf{s}}(f; \mathbf{x})\|_q &\ll \Omega(2^{-\mathbf{s}}), & 1 \leq q \leq \infty. \end{aligned} \quad (1)$$

При $1 < q < \infty$ эти условия эквивалентны. Здесь

$$\delta_{\mathbf{s}}(f; \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}$$

– двоичная пачка ряда Фурье функции $f(\mathbf{x})$, а

$$A_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = A_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) * \delta_{\mathbf{s}}(f; \mathbf{x}) \quad (2)$$

– свертка $\delta_{\mathbf{s}}(f; \mathbf{x})$ с ядром

$$A_{\mathbf{s}}(f; \mathbf{x}) = 2^d \prod_{j=1}^d (V_{2^{s_j-1}}(x_j) - V_{2^{s_j-2}}(x_j)),$$

порожденным ядрами Валле-Пуссена $V_m(\tau)$ порядка $2m - 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Достаточность в теореме А означает, что если неравенства (1) выполняются с некоторыми константами, то существует число $B > 0$ такое, что $B \cdot f(\mathbf{x}) \in H_q^\Omega$.

Отметим, что без условий (S) и (S_l) подобная характеристика по пачкам невозможна [3], [4].

В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения.

ТЕОРЕМА Б (теорема Литтлвуда–Пэли). Пусть $1 < q < \infty$. Тогда

$$\|f\|_q \ll \left\| \left(\sum_{\mathbf{s}} |\delta_{\mathbf{s}}(f; \mathbf{x})|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \ll \|f\|_q.$$

ТЕОРЕМА В (следствие из теоремы Литтлвуда–Пэли). Для $1 < q < \infty$

$$\|f\|_q \ll \left(\sum_{\mathbf{s}} \|\delta_{\mathbf{s}}(f; \mathbf{x})\|_q^{q_0} \right)^{1/q_0}, \quad q_0 = \min\{q, 2\}.$$

Также мы будем использовать два двойственных утверждения, доказанных В. Н. Темляковым в [2, лемма 3.1, с. 25, лемма 3.1', с. 28], которые формулируются следующим образом.

ЛЕММА А. Пусть $1 \leq q < p < \infty$ и $f(\mathbf{x}) \in L_q^0(\pi_d)$. Тогда

$$\|f\|_p^p \ll \sum_{\mathbf{s}} \|\delta_{\mathbf{s}}(f; \mathbf{x})\|_q^p 2^{\|\mathbf{s}\|_1(1/q-1/p)p}.$$

ЛЕММА Б. Пусть $1 < p < q \leq \infty$ и $f(\mathbf{x}) \in L_p^0(\pi_d)$. Тогда

$$\|f\|_p^p \gg \sum_{\mathbf{s}} \|\delta_{\mathbf{s}}(f; \mathbf{x})\|_q^p 2^{\|\mathbf{s}\|_1(1/q-1/p)p}.$$

В этих леммах суммы берутся по всем векторам $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$ с натуральными компонентами, $\|\mathbf{s}\|_1 = s_1 + \dots + s_d$.

Докажем две леммы, необходимые при оценке приближений $E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_p$ сверху.

ЛЕММА 1. Пусть функция типа смешанного модуля непрерывности порядка l $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ удовлетворяет условию (S). Тогда для $0 < p < \infty$

$$\sum_{\mathbf{s} \in \varkappa^\perp(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^p \ll \sum_{\mathbf{s} \in \theta(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^p. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим индукцию по размерности d . При $d = 1$ по свойству (S) имеем

$$\sum_{s \in \varkappa^\perp(N)} (\Omega(2^{-s}))^p = \sum_{s=s_0}^{\infty} \frac{(\Omega(2^{-s}))^p}{2^{-\alpha s p}} 2^{-\alpha s p} \ll \left(\frac{\Omega(2^{-s_0})}{2^{-\alpha s_0}} 2^{-\alpha s_0} \right)^p = (\Omega(2^{-s_0}))^p,$$

где s_0 – наименьшее натуральное число, при котором $\Omega(2^{-s_0}) < 1/N$. Предположим, что оценка (3) верна для размерности $d - 1$. Докажем ее для размерности d . Положим

$$s_d^N = \min \left\{ s_d \in \mathbb{N} : \Omega(1, \dots, 1, 2^{-s_d}) \leq \frac{1}{N} \right\}, \quad \mathbf{s}^d = (s_1, \dots, s_{d-1}).$$

Тогда (в первой сумме применяем предположение индукции, а во второй – свойство (S) и замечание 1)

$$\begin{aligned}
 \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{K}^\perp(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^p &= \sum_{s_d=1}^{s_d^N} \sum_{\mathbf{s}^d: \mathbf{s} \in \mathcal{K}^\perp(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^p + \sum_{s_d=s_d^N+1}^{\infty} \sum_{\mathbf{s}^d: \mathbf{s} \in \mathcal{K}^\perp(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^p \\
 &\ll \sum_{s_d=1}^{s_d^N} \sum_{\mathbf{s}^d: \mathbf{s} \in \theta(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^p + \sum_{s_d=s_d^N+1}^{\infty} \sum_{\mathbf{s}^d: \mathbf{s} \in \mathcal{K}^\perp(N)} \left(\frac{\Omega(2^{-\mathbf{s}})}{2^{-\alpha \|\mathbf{s}^d\|_1}} 2^{-\alpha \|\mathbf{s}^d\|_1} \right)^p \\
 &\ll \sum_{\mathbf{s} \in \theta(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^p + \sum_{s_d=s_d^N+1}^{\infty} (\Omega(1, \dots, 1, 2^{-s_d}))^p,
 \end{aligned}$$

откуда в силу одномерного случая получаем утверждение леммы 1.

ЛЕММА 2. Пусть $\Omega(\mathbf{t})$ удовлетворяет условию (S) при $0 < \alpha < 1$ таком, что $\alpha > \beta > 0$. Тогда при $0 < p < \infty$

$$\sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{K}^\perp(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}) 2^{\|\mathbf{s}\|_1 \beta})^p \ll \sum_{\mathbf{s} \in \theta(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}) 2^{\|\mathbf{s}\|_1 \beta})^p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в лемме 1, применим индукцию по размерности. При $d = 1$

$$\sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{K}^\perp(N)} (\Omega(2^{-s}) 2^{\|s\|_1 \beta})^p = \sum_{s=s_0}^{\infty} \left(\frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-(\alpha-\beta)s} \right)^p \ll (\Omega(2^{-s_0}) 2^{\beta s_0})^p$$

в силу условия (S). Предположим, что лемма верна для размерности $d - 1$. Докажем ее для размерности d . Аналогично доказательству леммы 1

$$\begin{aligned}
 \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{K}^\perp(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}) 2^{\|\mathbf{s}\|_1 \beta})^p &= \sum_{s_d=1}^{s_d^N} \sum_{\mathbf{s}^d: \mathbf{s} \in \mathcal{K}^\perp(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}) 2^{\|\mathbf{s}\|_1 \beta})^p \\
 &\quad + \sum_{s_d=s_d^N+1}^{\infty} \sum_{\mathbf{s}^d: \mathbf{s} \in \mathcal{K}^\perp(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}) 2^{\|\mathbf{s}\|_1 \beta})^p.
 \end{aligned}$$

Применяя к первой сумме предположение индукции, а ко второй условие (S), приходим к утверждению леммы 2.

Перейдем к рассмотрению приближений классов H_q^Ω .

ТЕОРЕМА 1. Пусть параметры q и p удовлетворяют одному из следующих условий:

- 1) $1 \leq q = p < \infty$;
- 2) $1 < p < q \leq \infty$, $q \geq 2$;
- 3) $1 \leq p < q \leq 2$.

Пусть, далее, $\Omega(\mathbf{t})$ удовлетворяет условиям (S) и (S₁). Тогда

$$E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_p \asymp \frac{1}{N} |\theta(N)|^{1/q_0},$$

где $q_0 = \min\{q, 2\}$, $|\theta(N)|$ – число элементов множества $\theta(N)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В доказательстве теорем 1 и 2 используются известные методы оценок сверху и снизу, применявшиеся для классов Никольского H_q^r и использующие характеризацию по двоичным пачкам (теорему А).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем оценки сверху.

1) Пусть $1 < q = p < \infty$. Тогда для $f(x)$ из H_q^Ω по теоремам В, А и лемме 1

$$\begin{aligned} E_{Q(N)}(f)_q &\asymp \left\| \sum_{s \in \mathcal{K}^\perp(N)} \delta_s(f; x) \right\|_q \ll \left(\sum_{s \in \mathcal{K}^\perp(N)} \|\delta_s(f; x)\|_q^{q_0} \right)^{1/q_0} \\ &\ll \left(\sum_{s \in \mathcal{K}^\perp(N)} (\Omega(2^{-s}))^{q_0} \right)^{1/q_0} \ll \left(\sum_{s \in \theta(N)} (\Omega(2^{-s}))^{q_0} \right)^{1/q_0} \asymp \frac{1}{N} |\theta(N)|^{1/q_0}. \end{aligned}$$

2) Рассмотрим случай $q = p = 1$. Тогда при $f(x) \in H_1^\Omega$ по теореме А и лемме 1

$$\begin{aligned} E_{Q(N)}(f)_1 &\leq \left\| \sum_{s \in \mathcal{K}^\perp(N)} A_s(f; x) \right\|_1 \leq \sum_{s \in \mathcal{K}^\perp(N)} \|A_s(f; x)\|_1 \\ &\ll \sum_{s \in \mathcal{K}^\perp(N)} \Omega(2^{-s}) \ll \frac{1}{N} |\theta(N)|. \end{aligned}$$

3) Пусть теперь $1 \leq p < q < \infty$. Тогда, используя неубывание L_p -нормы по параметру p и уже доказанные оценки, получим

$$E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_p \ll E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_q \ll \frac{1}{N} |\theta(N)|^{1/q_0}.$$

4) Рассмотрим, наконец, случай $1 < p < \infty$, $q = \infty$. Имеем

$$E_{Q(N)}(H_\infty^\Omega)_p \ll E_{Q(N)}(H_{p+1}^\Omega)_{p+1} \ll \frac{1}{N} |\theta(N)|^{1/2},$$

так как $p+1 > 2$. Оценки сверху в теореме 1 доказаны. Докажем оценки снизу.

1) Пусть $2 \leq p = q < \infty$. Рассмотрим функцию

$$f_N(x) = \sum_{s \in \theta(N)} \Omega(2^{-s}) e^{i(\mathbf{k}^s, \mathbf{x})},$$

где $\mathbf{k}^s \in \rho(s)$. В силу теоремы А (см. замечание 5) существует число $B > 0$ такое, что $B \cdot f_N(x) \in H_q^\Omega$. Тогда согласно теореме В

$$E_{Q(N)}(f_N)_q \asymp \left\| \sum_{s \in \theta(N)} \Omega(2^{-s}) e^{i(\mathbf{k}^s, \mathbf{x})} \right\|_q \asymp \left(\sum_{s \in \theta(N)} (\Omega(2^{-s}))^2 \right)^{1/2} \asymp \frac{1}{N} |\theta(N)|^{1/2}.$$

2) Пусть $1 < q = p \leq 2$. Положим

$$f_q(x) = B \sum_s \Omega(2^{-s}) 2^{\|\mathbf{s}\|_1(1/q-1)} \sum_{\mathbf{k} \in \rho(s)} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}. \quad (4)$$

Здесь сумма берется по всем $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$ с натуральными компонентами. В силу того, что

$$\left\| \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \right\|_q \asymp 2^{\|\mathbf{s}\|_1(1-1/q)}, \quad 1 < q < \infty, \quad (5)$$

при некотором $B > 0$ будет $f_q(\mathbf{x}) \in H_q^\Omega$. Применяя лемму Б и неравенство (5), для некоторого $z > q$ получим

$$\begin{aligned} (E_{Q(N)}(f_q)_q)^q &\gg \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{K}^\perp(N)} \|\delta_{\mathbf{s}}(f_q)\|_2^q 2^{\|\mathbf{s}\|_1(1/z-1/q)q} \\ &\asymp \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{K}^\perp(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}) 2^{\|\mathbf{s}\|_1(1/q-1)} 2^{\|\mathbf{s}\|_1(1-1/z)} 2^{\|\mathbf{s}\|_1(1/z-1/q)})^q \\ &\geq \sum_{\mathbf{s} \in \theta(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^q \asymp \left(\frac{1}{N}\right)^q |\theta(N)|, \end{aligned}$$

откуда получаем неравенство

$$E_{Q(N)}(f_q)_q \gg \frac{1}{N} |\theta(N)|^{1/q}.$$

3) Рассмотрим $q = p = 1$. Здесь мы построим функцию, аналогичную той, которую построил Темляков для классов Никольского H_q^r (см. [5]).

Сначала докажем, что $|\theta(N)| \ll (\log_2 N)^{d-1}$. Прежде всего покажем, что если $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \theta(N)$, то существует лишь конечное натуральное число n_d такое, что

$$\tilde{\mathbf{s}} = (s_1, \dots, s_{d-1}, s_d + n_d) \in \theta(N).$$

Действительно, из условия (S) следует, что

$$\frac{\Omega(2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_{d-1}}, 2^{-(s_d+n_d)})}{2^{-\alpha(s_d+n_d)}} \leq C_1 \frac{\Omega(2^{-\mathbf{s}})}{2^{-\alpha s_d}}.$$

Если теперь предположим, что $\mathbf{s}$ и $\tilde{\mathbf{s}}$ принадлежат $\theta(N)$, то получим неравенство

$$2^{\alpha n_d} \leq C_1 \frac{\Omega(2^{-\mathbf{s}})}{\Omega(2^{-\tilde{\mathbf{s}}})} \leq C_1 \frac{2^l N}{N} = C_1 2^l.$$

Следовательно, n_d ограничено числом, не зависящим от N :

$$n_d \leq \frac{l + \log_2 C_1}{\alpha} \equiv m_2.$$

В силу условия (S) с учетом замечания 1 найдется $0 < \alpha < 1$ такое, что $\Omega(\mathbf{t}) / \prod_{j=1}^d t_j^\alpha$ почти возрастает. Поэтому

$$\Omega(\mathbf{t}) = \frac{\Omega(\mathbf{t})}{\prod_{j=1}^d t_j^\alpha} \prod_{j=1}^d t_j^\alpha \leq C \cdot \Omega(1, \dots, 1) \prod_{j=1}^d t_j^\alpha.$$

Следовательно, существует $C_2 > 0$, не зависящее от t , при котором

$$\Omega(t) \leq C_2 \prod_{j=1}^d t_j^\alpha.$$

Аналогично из замечания 2 вытекает, что найдется C_3 , $0 < C_3 < C_2$, такое, что

$$\Omega(t) \geq C_3 \prod_{j=1}^d t_j^l.$$

Итак, $C_3 2^{-\|s\|_1 l} \leq \Omega(2^{-s}) \leq C_2 2^{-\|s\|_1 \alpha}$.

Пусть $s \in \theta(N)$. Тогда $1/(2^l N) \leq \Omega(2^{-s}) < 1/N$ и

$$\frac{1}{l} \log_2(C_3 N) < \|s\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \log_2(C_2 2^l N). \quad (6)$$

Как известно, для количества элементов множества $\theta_n = \{s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, \|s\|_1 = n\}$, где $n \in \mathbb{N}$, верно соотношение $|\theta_n| \asymp n^{d-1}$.

Пусть

$$m_1 = \left\lceil \frac{1}{\alpha} \log_2(C_2 2^l N) \right\rceil + 1.$$

С учетом сказанного выше $\theta(N)$ можно взаимно однозначно отобразить на некоторое подмножество множества

$$A = \bigcup_{n=m_1}^{m_1+m_2} \theta_n.$$

Поэтому $|\theta(N)| \ll (\log_2 N)^{d-1}$.

Далее рассмотрим множество

$$\theta'(N) = \left\{ s \in \theta(N) : s_j > \frac{1}{2dl} \log_2(C_3 N), j = 1, \dots, d \right\}.$$

Докажем, что $|\theta'(N)| \gg (\log_2 N)^{d-1}$. Пусть

$$\theta'_N = \left\{ s : s_j \in \mathbb{N}, \|s\|_1 = \left\lceil \frac{1}{l} \log_2(C_3 N) \right\rceil, s_j > \frac{1}{2dl} \log_2(C_3 N) \right\}.$$

В силу (6) $\theta'_N \subset \kappa(N)$. Рассуждая так же, как в замечании 3, можно показать, что для всякого $s = (s_1, \dots, s_d) \in \kappa(N)$ и для любого j , $1 \leq j \leq d$, существует натуральное число $\tilde{s}_j$ такое, что $(s_1, \dots, s_{j-1}, \tilde{s}_j, s_{j+1}, \dots, s_d) \in \theta(N)$. Следовательно, θ'_N можно взаимно однозначно отобразить на некоторое подмножество множества $\theta'(N)$. Поэтому

$$|\theta'(N)| \geq |\theta'_N| \gg (\log_2 N)^{d-1}.$$

Итак,

$$|\theta'(N)| \asymp |\theta(N)| \asymp (\log_2 N)^{d-1}.$$

Возьмем $v = \lceil |\theta'(N)|^{1/d} \rceil$. Разобьем $\pi_d = [-\pi, \pi]^d$ на v^d кубов с ребром $2\pi/v$. Возьмем множество $\bar{\theta}(N) \subset \theta(N)$ такое, что $|\bar{\theta}(N)| = v^d$, и установим взаимно однозначное соответствие между множеством $\bar{\theta}(N)$ и множеством кубов. Пусть для $s \in \bar{\theta}(N)$

$\mathbf{x}^s$ означает центр соответствующего куба. Пусть, далее, $u = 2^{[(\log_2 |\theta(N)|)/d]}$. Рассмотрим функцию

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{s} \in \bar{\theta}(N)} e^{i(\mathbf{k}^s, \mathbf{x})} K_u(\mathbf{x} - \mathbf{x}^s), \quad k_j^s = 2^{s_j} + 2^{s_j-1}, \quad j = 1, \dots, d,$$

$K_u(\mathbf{x}) = 2^d \prod_{j=1}^d K_u(x_j)$ – произведение ядер Фейера порядка u .

При больших N $\Psi(\mathbf{x}) \perp Q(N)$. В силу свойства ядра Фейера $K_u(\tau) \ll \min\{u, 1/(u\tau^2)\}$ получим, что

$$\|\Psi\|_\infty \leq \sum_{\mathbf{s} \in \bar{\theta}(N)} K_u(\mathbf{x} - \mathbf{x}^s) \ll u^d \ll |\theta(N)|.$$

Далее, применяя одномерную оценку

$$\|K_u(\tau)\|_q \asymp u^{1-1/q}, \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad (7)$$

получим

$$|\theta(N)| \cdot u^d \ll \|\Psi\|_2^2 \ll E_{Q(N)}(\Psi)_1 \cdot \|\Psi\|_\infty.$$

Таким образом,

$$E_{Q(N)}(\Psi)_1 \gg |\theta(N)|.$$

Теперь возьмем функцию

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \Psi(\mathbf{x}).$$

Тогда по теореме А при некотором $B > 0$ $f_1(\mathbf{x}) = B \cdot f(\mathbf{x}) \in H_1^\Omega$ и

$$E_{Q(N)}(f_1)_1 \gg \frac{1}{N} |\theta(N)|.$$

4) Положим $1 < p < q \leq \infty$, $q \geq 2$. В этом случае оценка снизу доказывается совершенно аналогично случаю $2 \leq q = p < \infty$.

5) Далее рассмотрим $1 \leq p < q \leq 2$. Оценка снизу следует из рассмотрения функции

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \Psi(\mathbf{x}) \cdot u^{-d(1-1/q)},$$

где $\Psi(\mathbf{x})$ и u те же, что и при доказательстве оценок снизу в случае 3). Действительно, в силу (7) $f_2(\mathbf{x}) = B \cdot f(\mathbf{x}) \in H_q^\Omega$ и

$$E_{Q(N)}(f_2)_p \geq E_{Q(N)}(f_2)_1 \gg \frac{1}{N} |\theta(N)|^{1/q}.$$

Теорема 1 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. С учетом замечания 4 оценка величины $E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_p$ в теореме 1 может быть записана в виде

$$E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_p \asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)/q_0}.$$

Перейдем к случаю $q < p$. В этом случае нам потребуются дополнительные условия на $\Omega(\mathbf{t})$, обеспечивающие вложение $H_q^\Omega \subset L_p$. Необходимые и достаточные условия указанного вложения для $l = 1$ и $l = 2$ доказаны Динь Зунгом [6]. Мы используем другое достаточное условие этого вложения, а именно, это вложение верно при $\Omega(\mathbf{t})$, удовлетворяющем условию (S) с некоторым $\alpha > 1/q - 1/p$ (см. [3]).

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что $1 \leq q < p < \infty$. Кроме того, предположим, что $\Omega(t)$ удовлетворяет условию (S) с некоторым $\alpha > \beta = 1/q - 1/p$ и удовлетворяет условию (S_l) . Тогда*

$$E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_p \asymp \frac{1}{N} \left(\sum_{s \in \theta(N)} 2^{\|s\|_1(1/q-1/p)p} \right)^{1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки сверху легко следуют из лемм А и 2, а также теоремы А. Докажем оценки снизу.

1) Пусть $1 < q < p < \infty$. Используем функцию $f_q(x)$ из (4). Аналогично доказательству оценок снизу в случае 2 теоремы 1 по лемме Б для $z > p$ получим

$$(E_{Q(N)}(f_q)_p)^p \gg \sum_{s \in \pi^\perp(N)} \|\delta_s(f_q)\|_z^p 2^{\|s\|_1(1/z-1/p)p} \gg \left(\frac{1}{N}\right)^p \sum_{s \in \theta(N)} 2^{\|s\|_1(1/q-1/p)p}.$$

Отсюда следует оценка снизу в случае 1).

2) Пусть $q = 1$, $1 < p < \infty$. В этом случае рассмотрим функцию

$$f_1(x) = B \sum_s \Omega(2^{-s}) \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k, x)}.$$

С учетом равенства (2) $A_s(f_1; x) = \Omega(2^{-s})A_s(x)$. И, учитывая, что $\|A_s(x)\|_1 \ll 1$, получим $\|A_s(f_1; x)\|_1 \ll \Omega(2^{-s})$, т.е. $f_1(x) \in H_1^\Omega$ при некотором $B > 0$ и аналогично случаю 1) получаем оценку снизу в случае 2). Теорема 2 доказана.

Рассмотрим в качестве иллюстрации три примера.

Во-первых, при

$$\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^r$$

мы получаем приближения классов Никольского H_q^r тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических крестов. В этом случае при $r = 1$

$$|Q(N)| \asymp N(\log_2 N)^{d-1}.$$

Как известно, указанные приближающие подпространства являются в ряде случаев оптимальными в смысле поперечников по Колмогорову. Приближения классов H_q^r , обоснование оптимальности подпространств тригонометрических полиномов со спектром из гиперболических крестов исследовались многими авторами, например, К. И. Бабенко [6], Я. С. Бугровым [7], Н. С. Никольской [8], [9], Э. М. Галеевым [10], [11], Динь Зунгом [12], [13], В. Н. Темляковым [2] и др. Во-вторых, возьмем

$$\Omega(t) = t_1 \cdots t_d \log_2 \frac{1}{t_d}.$$

В этом случае спектр приближающих полиномов лежит в множестве

$$Q(N) \subset \left\{ k = (k_1, \dots, k_d) : |k_j| \in \mathbb{N}, \frac{|k_1| \cdots |k_d|}{(\log_2 |k_d|)_+} \leq N \right\},$$

где $(\log_2 |k_d|)_+ = \max\{1, \log_2 |k_d|\}$, $|Q(N)| \asymp N(\log_2 N)^d$.

Наконец, в-третьих, положим

$$\Omega(t) = \frac{t_1 \cdots t_d}{\log_2(1/t_d)}.$$

Тогда

$$Q(N) \subset \{k = (k_1, \dots, k_d) : |k_j| \in \mathbb{N}, |k_1| \cdots |k_d| (\log_2 |k_d|)_+ \leq N\},$$

и приближающее подпространство имеет размерность

$$|Q(N)| \asymp N(\log_2 N)^{d-2} \log_2 \log_2 N.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. ММО. 1956. Т. 5. С. 483–522.
- [2] Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной. Тр. МИАН. Т. 178. М.: Наука, 1986.
- [3] Пустовойтов Н. Н. Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. 1994. V. 20. P. 35–48.
- [4] Пустовойтов Н. Н. О характеристизации пространства H_1^Ω // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 1. С. 144–148.
- [5] Темляков В. Н. Об оценках ортопоперечников классов функций с ограниченной смешанной производной // Вопросы чистой и прикл. матем. Докл. по матем. и ее прилож. 1987. Т. 1. № 1. С. 3–30.
- [6] Бабенко К. И. О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132. № 2. С. 247–250.
- [7] Бугров Я. С. Приближение класса функций с доминирующей смешанной производной // Матем. сб. 1964. Т. 64(106). № 3. С. 410–418.
- [8] Никольская Н. С. Приближение периодических функций класса SH_p^r суммами Фурье // Сиб. матем. ж. 1975. Т. 16. № 4. С. 761–780.
- [9] Никольская Н. С. Еще о приближении периодических функций классов SH_p^r суммами Фурье // Сиб. матем. ж. 1980. Т. 21. № 4. С. 180–193.
- [10] Галеев Э. М. Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных W_p^α и H_p^α в пространстве L_q // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 5. С. 916–934.
- [11] Галеев Э. М. Приближение классов периодических функций нескольких переменных ядерными операторами // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 3. С. 32–41.
- [12] Динь Зунг. Приближение классов гладких функций многих переменных // Тр. семинара И. Г. Петровского. 1984. Т. 10. С. 207–226.
- [13] Динь Зунг. Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами // Матем. сб. 1986. Т. 131. № 2. С. 251–271.

Московский государственный технический университет МАМИ

Поступило

05.06.95

Исправленный вариант

25.09.97