Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ванг, Л. Ю. Жанг, Р. Ф. Нью, Структурная теорема для двойственных квазихопфовых бимодулей и ее приложения, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 4, 506–520

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10320>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 12:43:42

Структурная теорема для двойственных квазихопфовых бимодулей и ее приложения

Ю. Ванг, Л. Ю. Жанг, Р. Ф. Нью

Доказана структурная теорема для двойственных квазихопфовых бимодулей, а также структурная теорема $C \cong D \rtimes H$ для двойственной квазихопфовой модульной коалгебры, где H – двойственная квазихопфова алгебра, C – правая H -модульная коалгебра, D – левая H -комодульная коалгебра в тензорной категории ${}^H\mathcal{M}$, индуцированная коалгеброй C , и $D \rtimes H$ – smash-копроизведение, введенное Булаку и Науэлаэртсом.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm10320

1. Введение и предварительные сведения. Квазихопфовы алгебры ввел Дринфельд [1]; он использовал эти алгебры при изучении системы уравнений Книжника–Замолдчикова [2]. Квазихопфовы алгебры получаются из хопфовых алгебр ослаблением аксиомы коассоциативности. Как оказалось, они играют очень важную роль в разных областях математики и физики (см. [3], [4]). Smash-произведения квазихопфовых алгебр и ассоциативных алгебр были введены Булаку, Панайтом и ван Ойстайеном в [5]; в случае хопфовой алгебры такое произведение является комодульной алгеброй. Булаку и Науэлаэртс рассмотрели также двойственные объекты [6]. В статье [7] было показано, что модули над квазихопфовой алгеброй совпадают с модулями над квазихопфовым smash-произведением в смысле Маджида [8]. Структурная теорема для относительных хопфовых модулей в смысле Хопфа над (двойственными) квазихопфовыми алгебрами была получена в [9]. Квазихопфовы H -бимодули и структурная теорема для квазихопфовой алгебры H были рассмотрены Науссером и Ниллом (см. [10], [11]). В статье [12] Панайт и ван Ойстайен существенно использовали эту теорему в доказательстве следующей структурной теоремы для квазихопфовой комодульной алгебры: если H является квазихопфовой алгеброй и B – правая H -комодульная алгебра, для которой существует морфизм $v: H \rightarrow B$ правых H -комодульных алгебр, то найдется левая H -модульная алгебра A , для которой $B \cong A \# H$, причем алгебра A имеет вид $A = B^{coH}$ и умножение в ней является сужением умножения в B .

Работа выполнена при поддержке Основного фонда научных технологий министерства образования Китая (проект № 108154), Фонда Колледжа специальных исследований докторских дисциплин Китая (проект № 20100097110040), Фонда фундаментальных исследований центральных университетов (проект № KYZ201125) и общей программой Нанкинского Цзаочжунанского университета (проект № 011NXY16).

В настоящей статье мы доказываем структурную теорему для двойственной квазихопфовой алгебры; в качестве приложения этой теоремы мы получаем структурную теорему для двойственной квазихопфовой модульной коалгебры.

Статья организована следующим образом. В п. 1 мы напоминаем некоторые основные определения и свойства двойственных квазихопфовых алгебр. В п. 2 мы вводим понятие двойственного квазихопфа H -бикомодуля N , которое, в свою очередь, двойственно понятию квазихопфа H -бимодуля, введенному в [10]. Мы обозначаем категорию двойственных квазихопфовых H -бикомодулей через ${}^H\mathcal{M}_H^H$. Затем мы получаем структурную теорему для квазихопфа H -бикомодуля с использованием отображения $E: N \rightarrow N$. В этом пункте основная трудность состоит в том, чтобы найти фактор-пространство $\overline{N}$, которое превращается в левый H -комодуль. В п. 3 мы применяем структурную теорему для двойственного квазихопфа H -бикомодуля, чтобы получить структурную теорему для двойственной квазихопфовой модульной коалгебры, которая утверждает существование изоморфизма $C \cong \overline{C} \rtimes H$ правых H -модульных коалгебр. Однако коумножение в факторпространстве $\overline{C}$ нельзя определить обычным образом, поскольку квазихопфа комодульная коалгебра является не коалгеброй в общем смысле, а коалгеброй в тензорной категории ${}^H\mathcal{M}$.

Мы всегда работаем над фиксированным полем k . Мы используем связанную с алгебрами, коалгебрами и комодулями терминологию из книги Монтгомери, но опускаем обычные индексы и символы суммирования.

Напомним следующее определение из книги Маджида [8].

Двойственная квазибиалгебра (H, t, u, φ) – это коассоциативная коалгебра H с коединицей ε вместе с морфизмами коалгебр $m: H \otimes H \rightarrow H$ (этот морфизм называется *умножением*; произведение произвольных элементов $h, g \in H$ обозначается через $m(h, g) = hg$) и $u: k \rightarrow H$ (этот морфизм называется *единицей* и обозначается через $u(1) = 1$) и обратимым элементом $\varphi \in (H \otimes H \otimes H)^*$ (*реассоциатором*), который удовлетворяет следующим соотношениям для любых $h, g, k, \ell \in H$:

$$h_1(g_1k_1)\varphi(h_2, g_2, k_2) = \varphi(h_1, g_1, k_1)(h_2g_2)k_2, \quad (1.1)$$

$$\varphi(h_1, g_1, k_1\ell_1)\varphi(h_2g_2, k_2, \ell_2) = \varphi(g_1, k_1, \ell_1)\varphi(h_1, g_2k_2, \ell_2)\varphi(h_2, g_3, k_3), \quad (1.2)$$

$$1h = h1 = h, \quad (1.3)$$

$$\varphi(h, 1, g) = \varepsilon(h)\varepsilon(g). \quad (1.4)$$

Двойственная квазибиалгебра называется *двойственной квазихопфовой алгеброй*, если существует анти-гомоморфизм коалгебр $S: H \rightarrow H$ и элементы $\alpha, \beta \in H^*$, удовлетворяющие следующим соотношениям для всякого $h \in H$:

$$S(h_1)\alpha(h_2)h_3 = \alpha(h)1, \quad h_1\beta(h_2)S(h_3) = \beta(h)1, \quad (1.5)$$

$$\varphi(h_1\beta(h_2), S(h_3), \alpha(h_4)h_5) = \varepsilon(h) = \varphi^{-1}(S(h_1), \alpha(h_2)h_3\beta(h_4), S(h_5)). \quad (1.6)$$

Заметим, что любая хопфова алгебра с биективным антиподом является двойственной квазихопфовой алгеброй с тривиальным φ и $\alpha = \beta = \varepsilon$.

Очевидно, $\alpha(1)\beta(1) = 1$, $\varepsilon \circ S = \varepsilon$. Кроме того, легко видеть, что из (1.2) и (1.4) вытекают тождества

$$\varphi(1, h, g) = \varepsilon(h)\varepsilon(g) = \varphi(h, g, 1) \quad (1.7)$$

для любых $h, g \in H$.

Если $H = (H, m, u, \varphi, S, \alpha, \beta)$ – двойственная квазихопфова алгебра, то двойственными квазихопфовыми алгебрами являются также $H^{\text{ор}}$, $H^{\text{сор}}$ и $H^{\text{ор, сор}}$, где “ор” обозначает противоположное умножение, а “сор” – противоположное коумножение. Структуры двойственных квазихопфовых алгебр задаются на них соотношениями

$$\varphi_{\text{ор}} = \varphi^{-1}, \quad \varphi_{\text{сор}}(h, g, k) = \varphi^{-1}(k, g, h), \quad \varphi_{\text{ор, сор}}(h, g, k) = \varphi(k, g, h)$$

для любых $h, g, k \in H$,

$$S_{\text{ор}} = S_{\text{сор}} = (S_{\text{ор, сор}})^{-1} = S^{-1}, \quad \alpha_{\text{ор}} = \beta_{\text{сор}} = \beta \circ S^{-1}, \quad \beta_{\text{ор}} = \alpha_{\text{сор}} = \alpha \circ S^{-1}, \\ \alpha_{\text{ор, сор}} = \beta, \quad \beta_{\text{ор, сор}} = \alpha.$$

Пусть (H, m, u, φ) – двойственная квазибиалгебра и U , V и W – левые H -комодули, причем структура левого H -комодуля на U задается соотношениями $\rho(u) = u_{[-1]} \otimes u_{[0]}$ и аналогично для V и W . Определим отображение

$$a_{U, V, W}: (U \otimes V) \otimes W \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$$

правилом

$$a_{U, V, W}((u \otimes v) \otimes w) = \varphi^{-1}(u_{[-1]}, v_{[-1]}, w_{[-1]})u_{[0]} \otimes (v_{[0]} \otimes w_{[0]}).$$

Это отображение превращает категорию ${}^H\mathcal{M}$ левых H -комодулей в тензорную категорию [13] с тензорным произведением $\otimes$, изоморфизмом ассоциативности $a_{U, V, W}$ и обычными изоморфизмами левой и правой единицы; единичным объектом k в этой категории служит тривиальный H -комодуль.

Пусть H – двойственная квазибиалгебра и C – коассоциативная коалгебра с отображением коалгебр $\theta: C \otimes H \rightarrow C$ (полагаем $\theta(c \otimes h) = c \cdot h$ для любых $c \in C$, $h \in H$), и пусть $\varphi_C \in (C \otimes H \otimes H)^*$ – обратимый элемент (относительно свертки). Следуя [6], мы будем говорить, что тройка (C, θ, φ_C) является *правой H -модульной коалгеброй*, если для любых $c \in C$, $h, g, l \in H$ выполнены следующие условия:

$$\varphi_C(c_1, h_1, g_1)(c_2 \cdot h_2) \cdot g_2 = c_1 \cdot (h_1 g_1) \varphi_C(c_2, h_2, g_2), \quad (1.8)$$

$$\varphi(h_1, g_1, l_1) \varphi_C(c_1, h_2 g_2, l_2) \varphi_C(c_2, h_3, g_3) = \varphi_C(c_1, h_1, g_1 l_1) \varphi_C(c_2 \cdot h_2, g_2, l_2), \quad (1.9)$$

$$c \cdot 1 = c, \quad (1.10)$$

$$\varphi_C(c, 1, h) = \varepsilon(c) \varepsilon(h) = \varphi_C(c, h, 1). \quad (1.11)$$

Если $(C', \theta', \varphi_{C'})$ – другая правая H -модульная коалгебра, то отображение коалгебр $f: C \rightarrow C'$ называется *морфизмом правых H -модульных коалгебр*, если

$$f\theta = \theta'(f \otimes \text{id}), \quad \varphi_{C'} = \varphi_C(f \otimes \text{id} \otimes \text{id}).$$

Пусть H – двойственная квазибиалгебра. Следуя [6], скажем, что k -линейное пространство D является *левой H -комодульной коалгеброй*, если оно является коалгеброй в тензорной категории ${}^H\mathcal{M}$ левых H -комодулей, т.е. на D определено коумножение Δ и обычная коединица ε , удовлетворяющая условиям

$$\varphi^{-1}(d_{1,1[-1]}, d_{1,2[-1]}, d_{2[-1]})d_{1,1[0]} \otimes d_{1,2[0]} \otimes d_{2[0]} = d_1 \otimes d_{2,1} \otimes d_{2,2}, \quad (1.12)$$

$$d_{[-1]} \otimes d_{[0]1} \otimes d_{[0]2} = d_{1[-1]}d_{2[-1]} \otimes d_{1[0]} \otimes d_{2[0]}, \quad (1.13)$$

$$\varepsilon(d_{[0]})d_{[-1]} = \varepsilon(d)1 \quad (1.14)$$

для любого $d \in D$; структура левого H -комодуля на D определяется соотношением $\rho(d) = d_{[-1]} \otimes d_{[0]}$. Поскольку Δ “почти” коассоциативно, мы считаем, что

$$(\Delta \otimes \text{id})\Delta(d) = d_{1,1} \otimes d_{1,2} \otimes d_2, \quad (\text{id} \otimes \Delta)\Delta(d) = d_1 \otimes d_{2,1} \otimes d_{2,2}.$$

Если H – двойственная квазихопфова алгебра, то H не обязательно является коалгеброй в ${}^H\mathcal{M}$. Но мы можем сопоставить алгебре H объект категории ${}^H\mathcal{M}$, который мы обозначим через H_0 (он совпадает с H как векторное пространство); коумножение на H_0 , определенное правилом

$$\Delta_0(h) = \varphi(h_1, S(h_3), h_7 S(h_9))\alpha(h_5)\varphi^{-1}(S(h_4), h_6, S(h_{10}))h_2 \otimes h_8,$$

превращает H_0 в левую H -комодульную коалгебру.

Пусть H – двойственная квазихопфова алгебра, и пусть D – левая H -комодульная коалгебра. Булаку и Науэлаэртс [6] определили на $D \otimes H$ smash-копроизведение $D \rtimes H$ с коумножением

$$\Delta(d \rtimes h) = \varphi^{-1}(d_{1[-1]}, d_{2[-1]1}, h_1)d_{1[0]} \rtimes d_{2[-1]2}h_2 \otimes d_{2[0]} \rtimes h_3, \quad (1.15)$$

где $d \in D$ и $h \in H$. Smash-произведение $D \rtimes H$ является коассоциативной коалгеброй с коединицей $\varepsilon(d \rtimes h) = \varepsilon(d)\varepsilon(h)$. Кроме того, тройка $(D \rtimes H, \theta, \varphi_{D \rtimes H})$, где

$$\begin{aligned} \theta: D \rtimes H \otimes H &\rightarrow D \rtimes H, & \theta(d \rtimes h \otimes g) &= \varphi^{-1}(d_{[-1]}, h_1, g_1)d_{[0]} \rtimes h_2g_2, \\ \varphi_{D \rtimes H}(d \rtimes h, g, \ell) &= \varepsilon(d)\varphi(h, g, \ell) \quad \text{для любых } d \in D, \quad h, g, \ell \in H, \end{aligned}$$

является правой H -модульной коалгеброй. Легко видеть, что отображение

$$j: D \rtimes H \rightarrow H, \quad j(d \rtimes h) = \varepsilon(d)h,$$

является морфизмом коалгебр.

2. Структурная теорема для двойственных квазихопфовых бикомодулей. Ниже через H мы всегда обозначаем двойственную квазихопфову алгебру.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть N – H -бикомодуль и $\psi: N \otimes H \rightarrow N$ – отображение H -бикомодулей, определенное правилом $\psi(n \otimes h) = n \cdot h$, причем структура бикомодуля на $N \otimes H$ определяется соотношениями

$$\rho_{N \otimes H}^+(n \otimes h) = n_{\langle 0 \rangle} \otimes h_1 \otimes n_{\langle 1 \rangle} h_2, \quad \rho_{N \otimes H}^-(n \otimes h) = n_{[-1]} h_1 \otimes n_{[0]} \otimes h_2$$

для любых $n \in N$ и $h \in H$ (мы обозначаем структуру правого H -комодуля на N через $\rho(n) = n_{\langle 0 \rangle} \otimes n_{\langle 1 \rangle}$). Пара (N, ψ) называется *двойственным квазихопфовым H -бикомодулем* (или *правым двойственным квазихопфовым H -бикомодулем*), если

$$\psi(\text{id}_N \otimes u) = \text{id}_N, \quad (2.1)$$

$$\varphi(n_{[-1]}, g_1, k_1)(n_{[0]} \cdot g_2) \cdot k_2 = n_{\langle 0 \rangle} \cdot g_1 k_1 \varphi(n_{\langle 1 \rangle}, g_2, k_2) \quad (2.2)$$

для любых $n \in N$ и $g, k \in H$. В этом случае мы называем ψ *правым H -действием* на N , а условие (2.2) – *условием квазиассоциативности действия ψ* .

ЛЕММА 1. Пусть (V, ρ^-) – левый H -комодуль, где $\rho^-(v) = v_{[-1]} \otimes v_{[0]}$. Тогда $V \otimes H$ является двойственным квазихопфовым H -бикомодулем со структурой, определяемой соотношениями

$$\rho_{V \otimes H}^-: V \otimes H \rightarrow H \otimes (V \otimes H), \quad v \otimes h \mapsto v_{[-1]} h_1 \otimes (v_{[0]} \otimes h_2), \quad (2.3)$$

$$\rho_{V \otimes H}^+: V \otimes H \rightarrow (V \otimes H) \otimes H, \quad v \otimes h \mapsto (v \otimes h_1) \otimes h_2, \quad (2.4)$$

$$\psi_{V \otimes H}: (V \otimes H) \otimes H \rightarrow V \otimes H, \quad (v \otimes h) \otimes g \mapsto \varphi^{-1}(v_{[-1]}, h_1, g_1) v_{[0]} \otimes h_2 g_2 \quad (2.5)$$

для любых $h, g \in H$ и $v \in V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что $V \otimes H$ является H -бикомодулем; $(V \otimes H) \otimes H$ также является H -бикомодулем, структуры комодуля на котором определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \rho_{(V \otimes H) \otimes H}^+(v \otimes h \otimes g) &= v \otimes h_1 \otimes g_1 \otimes h_2 g_2, \\ \rho_{(V \otimes H) \otimes H}^-(v \otimes h \otimes g) &= (v_{[-1]} h_1) g_1 \otimes v_{[0]} \otimes h_2 \otimes g_2 \end{aligned}$$

для любых $v \in V$ и $h, g \in H$. Нетрудно показать также, что $\psi_{V \otimes H}$ – H -бикомодульное отображение, т.е.

$$(\psi_{V \otimes H} \otimes \text{id}) \rho_{(V \otimes H) \otimes H}^+ = \rho_{V \otimes H}^+ \psi_{V \otimes H}, \quad (\text{id} \otimes \psi_{V \otimes H}) \rho_{(V \otimes H) \otimes H}^- = \rho_{V \otimes H}^- \psi_{V \otimes H}.$$

Выполнение условия (2.1) очевидно, так что нам нужно проверить лишь условие (2.2). Имеем

$$\begin{aligned} & \varphi((v \otimes h)_{[-1]}, g_1, k_1)((v \otimes h)_{[0]} \cdot g_2) \cdot k_2 \stackrel{(2.3)}{=} \varphi(v_{[-1]} h_1, g_1, k_1)((v_{[0]} \otimes h_2) \cdot g_2) \cdot k_2 \\ & \stackrel{(2.5)}{=} \varphi(v_{[-1]} h_1, g_1, k_1) \varphi^{-1}(v_{[0] [-1]}, h_2, g_2)((v_{[0] [0]} \otimes h_3 g_3) \cdot k_2) \\ & = \varphi(v_{[-1]} h_1, g_1, k_1) \varphi^{-1}(v_{[0] [-1]}, h_2, g_2) \varphi^{-1}(v_{[0] [0] [-1]}, h_3 g_3, k_2) v_{[0] [0] [0]} \otimes (h_4 g_4) k_3 \\ & = \varphi(v_{[-1] 1} h_1, g_1, k_1) \varphi^{-1}(v_{[-1] 2}, h_2, g_2) \varphi^{-1}(v_{[-1] 3}, h_3 g_3, k_2) v_{[0]} \otimes (h_4 g_4) k_3 \\ & \stackrel{(1.2)}{=} \varphi^{-1}(v_{[-1]}, h_1, g_1 k_1) \varphi(h_2, g_2, k_2) v_{[0]} \otimes (h_3 g_3) k_3 \\ & \stackrel{(1.1)}{=} \varphi^{-1}(v_{[-1]}, h_1, g_1 k_1) v_{[0]} \otimes h_2(g_2 k_2) \varphi(h_3, g_3, k_3) \\ & = (v \otimes h_1) \cdot g_1 k_1 \varphi(h_2, g_2, k_2) = (v \otimes h)_{\langle 0 \rangle} \cdot g_1 k_1 \varphi((v \otimes h)_{\langle 1 \rangle}, g_2, k_2). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть N – двойственный квазихопфов H -бикомодуль. Определим отображение

$$E: N \rightarrow N, \quad n \mapsto \varphi(n_{\langle 0 \rangle [-1]}, S(n_{\langle 1 \rangle 3}), n_{\langle 1 \rangle 5}) \beta(n_{\langle 1 \rangle 1}) \alpha(n_{\langle 1 \rangle 4}) n_{\langle 0 \rangle [0]} \cdot S(n_{\langle 1 \rangle 2}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть N – двойственный квазихопфов H -бикомодуль, E – определенное выше отображение. Тогда для любых $n \in N$ и $h \in H$ выполнены соотношения

$$E(n)_{\langle 0 \rangle} \otimes E(n)_{\langle 1 \rangle} = E(n) \otimes 1, \quad (2.6)$$

$$E^2 = E, \quad (2.7)$$

$$(\mathrm{id} \otimes E)\rho_N^-(E(n)) = \rho_N^-E(n), \quad (2.8)$$

$$(\mathrm{id} \otimes E)\rho_N^-(n) = E(n_{\langle 0 \rangle})_{[-1]}n_{\langle 1 \rangle} \otimes E(E(n_{\langle 0 \rangle})_{[0]}), \quad (2.9)$$

$$E(n_{\langle 0 \rangle}) \cdot n_{\langle 1 \rangle} = n, \quad (2.10)$$

$$E(E(n) \cdot h) = E(n)\varepsilon(h). \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любые $n \in N$ и $h \in H$. Равенство (2.6) непосредственно вытекает из антиподального свойства (1.5):

$$\begin{aligned} & E(n)_{\langle 0 \rangle} \otimes E(n)_{\langle 1 \rangle} \\ &= \varphi(n_{\langle 0 \rangle}[-1], S(n_{\langle 1 \rangle 3}), n_{\langle 1 \rangle 5})\beta(n_{\langle 1 \rangle 1})\alpha(n_{\langle 1 \rangle 4})(n_{\langle 0 \rangle}^{[0]} \cdot S(n_{\langle 1 \rangle 2}))_{\langle 0 \rangle} \\ & \quad \otimes (n_{\langle 0 \rangle}^{[0]} \cdot S(n_{\langle 1 \rangle 2}))_{\langle 1 \rangle} \\ &= \varphi(n_{[-1]}, S(n_{[0]\langle 1 \rangle 5}), n_{[0]\langle 1 \rangle 7})\beta(n_{[0]\langle 1 \rangle 2})\alpha(n_{[0]\langle 1 \rangle 6})(n_{[0]\langle 0 \rangle} \cdot S(n_{[0]\langle 1 \rangle 4})) \\ & \quad \otimes (n_{[0]\langle 1 \rangle 1} S(n_{[0]\langle 1 \rangle 3})) \\ &= \varphi(n_{[-1]}, S(n_{[0]\langle 1 \rangle 3}), n_{[0]\langle 1 \rangle 5})\beta(n_{[0]\langle 1 \rangle 1})\alpha(n_{[0]\langle 1 \rangle 4})(n_{[0]\langle 0 \rangle} \cdot S(n_{[0]\langle 1 \rangle 2})) \otimes 1 \\ &= E(n) \otimes 1. \end{aligned}$$

Равенство (2.7) следует из равенства (2.6) и свойства (1.4):

$$\begin{aligned} & E(E(n)) \\ &= \varphi(E(n)_{\langle 0 \rangle}[-1], S(E(n)_{\langle 1 \rangle 3}), E(n)_{\langle 1 \rangle 5})\beta(E(n)_{\langle 1 \rangle 1})\alpha(E(n)_{\langle 1 \rangle 4})E(n)_{\langle 0 \rangle}^{[0]} \\ & \quad \times S(E(n)_{\langle 1 \rangle 2}) \\ &= \varepsilon(E(n)_{[-1]})\beta(1)\alpha(1)E(n)_{[0]} = E(n). \end{aligned}$$

Равенство (2.8) получается по аналогии с равенством (2.7):

$$\begin{aligned} & (\mathrm{id} \otimes E)\rho^-(E(n)) \\ &= (\mathrm{id} \otimes E)(E(n)_{[-1]} \otimes E(n)_{[0]}) = E(n)_{[-1]} \otimes E(E(n)_{[0]}) \\ &= E(n)_{[-1]} \otimes E(n)_{[0]\langle 0 \rangle}^{[0]} \cdot S(E(n)_{[0]\langle 1 \rangle 2}) \\ & \quad \times \varphi(E(n)_{[0]\langle 0 \rangle}[-1], S(E(n)_{[0]\langle 1 \rangle 3}), E(n)_{[0]\langle 1 \rangle 5})\beta(E(n)_{[0]\langle 1 \rangle 1})\alpha(E(n)_{[0]\langle 1 \rangle 4}) \\ & \stackrel{(2.6), (1.4)}{=} E(n)_{[-1]} \otimes E(n)_{[0]} = \rho^-E(n). \end{aligned}$$

Равенство (2.9) доказывается так:

$$\begin{aligned} & E(n_{\langle 0 \rangle})_{[-1]}n_{\langle 1 \rangle} \otimes E(E(n_{\langle 0 \rangle})_{[0]}) \\ & \stackrel{(2.8)}{=} E(n_{\langle 0 \rangle})_{[-1]}n_{\langle 1 \rangle} \otimes E(n_{\langle 0 \rangle})_{[0]} \\ &= (n_{\langle 0 \rangle}^{[0]} \otimes [0]_{[-1]}S(n_{\langle 0 \rangle}^{[1]3}))n_{\langle 1 \rangle} \\ & \quad \otimes (n_{\langle 0 \rangle}^{[0]} \otimes [0]_{[0]} \cdot S(n_{\langle 0 \rangle}^{[1]2}))\varphi(n_{\langle 0 \rangle}^{[0]}[-1], S(n_{\langle 0 \rangle}^{[1]4}), n_{\langle 0 \rangle}^{[1]6})\beta(n_{\langle 0 \rangle}^{[1]1})\alpha(n_{\langle 0 \rangle}^{[1]5}) \\ &= (n_{\langle 0 \rangle}^{[1]2}S(n_{\langle 1 \rangle 3}))n_{\langle 1 \rangle 7} \\ & \quad \otimes (n_{\langle 0 \rangle}^{[0]} \cdot S(n_{\langle 1 \rangle 2}))\varphi(n_{\langle 0 \rangle}^{[0]}[-1]1, S(n_{\langle 1 \rangle 4}), n_{\langle 1 \rangle 6})\beta(n_{\langle 1 \rangle 1})\alpha(n_{\langle 1 \rangle 5}) \\ &= (n_{[-1]2}S(n_{[0]\langle 1 \rangle 3}))n_{[0]\langle 1 \rangle 7} \\ & \quad \otimes (n_{[0]\langle 0 \rangle} \cdot S(n_{[0]\langle 1 \rangle 2}))\varphi(n_{[-1]1}, S(n_{[0]\langle 1 \rangle 4}), n_{[0]\langle 1 \rangle 6})\beta(n_{[0]\langle 1 \rangle 1})\alpha(n_{[0]\langle 1 \rangle 5}) \\ & \stackrel{(1.1), (1.5)}{=} n_{[-1]1} \otimes (n_{[0]\langle 0 \rangle} \cdot S(n_{[0]\langle 1 \rangle 2})\varphi(n_{[-1]2}, S(n_{[0]\langle 1 \rangle 3}), n_{[0]\langle 1 \rangle 5})\beta(n_{[0]\langle 1 \rangle 1})\alpha(n_{[0]\langle 1 \rangle 4})) \\ &= n_{[-1]} \otimes E(n_{[0]}) = (\mathrm{id} \otimes E)\rho^-(n). \end{aligned}$$

Докажем (2.10):

$$\begin{aligned}
 & E(n_{\langle 0 \rangle}) \cdot n_{\langle 1 \rangle} \\
 &= \varphi(n_{\langle 0 \rangle \langle 0 \rangle [-1]}, S(n_{\langle 0 \rangle \langle 1 \rangle 3}), n_{\langle 0 \rangle \langle 1 \rangle 5}) \\
 &\quad \times \beta(n_{\langle 0 \rangle \langle 1 \rangle 1}) \alpha(n_{\langle 0 \rangle \langle 1 \rangle 4}) (n_{\langle 0 \rangle \langle 0 \rangle [0]} \cdot S(n_{\langle 0 \rangle \langle 1 \rangle 2})) \cdot n_{\langle 1 \rangle} \\
 &\stackrel{(2.2); (1.5)}{=} n_{\langle 0 \rangle \langle 0 \rangle \langle 0 \rangle} \varphi(n_{\langle 0 \rangle \langle 0 \rangle \langle 1 \rangle}, S(n_{\langle 0 \rangle \langle 1 \rangle 2}), n_{\langle 1 \rangle}) \beta(n_{\langle 0 \rangle \langle 1 \rangle 1}) \alpha(n_{\langle 0 \rangle \langle 1 \rangle 3}) \\
 &= n_{\langle 0 \rangle} \varphi(n_{\langle 1 \rangle 1}, S(n_{\langle 1 \rangle 3}), n_{\langle 1 \rangle 5}) \beta(n_{\langle 1 \rangle 2}) \alpha(n_{\langle 1 \rangle 4}) \\
 &\stackrel{(1.6)}{=} n_{\langle 0 \rangle} \varepsilon(n_{\langle 1 \rangle}) = n.
 \end{aligned}$$

Чтобы доказать (2.11), нам нужна формула

$$\varphi(h_1 g_1, S(g_5), g_7) \varphi^{-1}(h_2, g_2, S(g_4)) \beta(g_3) \alpha(g_6) = \varepsilon(h) \varepsilon(g), \quad (2.12)$$

которая верна для любых $h, g \in H$. Действительно,

$$\begin{aligned}
 & \varphi(h_1 g_1, S(g_5), g_7) \varphi^{-1}(h_2, g_2, S(g_4)) \beta(g_3) \alpha(g_6) \\
 &\stackrel{(1.2)}{=} \varphi^{-1}(h_1, g_1, S(g_7) g_9) \varphi(g_2, S(g_6), g_{10}) \varphi(h_2, g_3 S(g_5), g_{11}) \beta(g_4) \alpha(g_8) \\
 &\stackrel{(1.5)}{=} \varepsilon(h) \varphi(g_1, S(g_3), g_5) \beta(g_2) \alpha(g_4) \stackrel{(1.6)}{=} \varepsilon(h) \varepsilon(g).
 \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 & E(E(n) \cdot h) \\
 &= \varphi((E(n) \cdot h)_{\langle 0 \rangle [-1]}, S((E(n) \cdot h)_{\langle 1 \rangle 3}), (E(n) \cdot h)_{\langle 1 \rangle 5}) \\
 &\quad \times \beta((E(n) \cdot h)_{\langle 1 \rangle 1}) \alpha((E(n) \cdot h)_{\langle 1 \rangle 4}) (E(n) \cdot h)_{\langle 0 \rangle [0]} \cdot S((E(n) \cdot h)_{\langle 1 \rangle 2}) \\
 &\stackrel{(2.6)}{=} (E(n)_{[0]} \cdot h_2) \cdot S(h_4) \varphi(E(n)_{[-1]} h_1, S(h_5), h_7) \beta(h_3) \alpha(h_6) \\
 &\stackrel{(2.2)}{=} \varphi(E(n)_{[-1]} h_1, S(h_9), h_{11}) \varphi^{-1}(E(n)_{[0] \langle 0 \rangle [-1]}, h_2, S(h_8)) E(n)_{[0] \langle 0 \rangle [0]} \cdot h_3 S(h_7) \\
 &\quad \times \varphi(E(n)_{[0] \langle 1 \rangle}, h_4, S(h_6)) \beta(h_5) \alpha(h_{10}) \\
 &= \varphi(E(n)_{\langle 0 \rangle [-1]} h_1, S(h_9), h_{11}) \varphi^{-1}(E(n)_{\langle 0 \rangle [0] [-1]}, h_2, S(h_8)) E(n)_{\langle 0 \rangle [0] [0]} \cdot h_3 S(h_7) \\
 &\quad \times \varphi(E(n)_{\langle 1 \rangle}, h_4, S(h_6)) \beta(h_5) \alpha(h_{10}) \\
 &= \varphi(E(n)_{[-1]} h_1, S(h_7), h_9) \varphi^{-1}(E(n)_{[-1] 2}, h_2, S(h_6)) E(n)_{[0]} \cdot h_3 S(h_5) \beta(h_4) \alpha(h_8) \\
 &\stackrel{(1.5)}{=} \varphi(E(n)_{[-1] 1} h_1, S(h_5), h_7) \varphi^{-1}(E(n)_{[-1] 2}, h_2, S(h_4)) \beta(h_3) \alpha(h_6) E(n)_{[0]} \\
 &\stackrel{(2.12)}{=} \varepsilon(E(n)_{[-1]}) \varepsilon(h) E(n)_{[0]} = E(n) \varepsilon(h),
 \end{aligned}$$

что и завершает доказательство предложения.

Пусть $H^+ = \text{Ker } \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon(h - \varepsilon(h)1) = \varepsilon(h) - \varepsilon(h) = 0$ для любых $n \in N$ и $h \in H$, имеем $h - \varepsilon(h)1 \in H^+$. Значит, $E(n) \cdot h - E(n)\varepsilon(h) \in E(N) \cdot H^+$ и

$$E(n) \cdot h + E(N) \cdot H^+ = E(n)\varepsilon(h) + E(N) \cdot H^+.$$

Положим $\bar{N} = N/E(N) \cdot H^+$ и рассмотрим отображение $\pi: N \rightarrow \bar{N}, n \mapsto \bar{n}$. Это отображение определено корректно, потому что $\bar{E}(n) \cdot x = \overline{E(n)\varepsilon(x)} = 0$ для любых $n \in N$ и $x \in H^+$. Таким образом, мы получили левый H -комодуль из двойственного квазигопфова H -бикомодуля.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть N – двойственный квазигопфов H -бикомодуль, $\overline{N} = N/E(N) \cdot H^+$ и

$$\rho_{\overline{N}} : \overline{N} \rightarrow H \otimes \overline{N}, \quad \overline{n} \mapsto E(n)_{[-1]} \otimes \overline{E(n)_{[0]}}$$

для любых $\overline{n} \in \overline{N}$. Тогда пара $(\overline{N}, \rho_{\overline{N}})$ является левым H -комодулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим сначала, что отображение $\rho_{\overline{N}}$ корректно определено.

Действительно, предположим, что $m, n \in N$ и $\overline{m} = \overline{n}$, т.е. найдутся $l \in N$ и $x \in H^+$, для которых $m = n + E(l) \cdot x$. Тогда в силу (2.11) имеем

$$E(m) = E(n + E(l) \cdot x) = E(n) + E(E(l) \cdot x) = E(n).$$

Значит,

$$\rho_{\overline{N}}(\overline{m}) = E(m)_{[-1]} \otimes \overline{E(m)_{[0]}} = E(n)_{[-1]} \otimes \overline{E(n)_{[0]}} = \rho_{\overline{N}}(\overline{n}).$$

Кроме того, для всякого $\overline{n} \in \overline{N}$ имеем

$$\begin{aligned} (\varepsilon \otimes \text{id})\rho_{\overline{N}}(\overline{n}) &= (\varepsilon \otimes \text{id})(E(n)_{[-1]} \otimes \overline{E(n)_{[0]}}) = \overline{E(n)} = \overline{E(n_{\langle 0 \rangle}) \cdot n_{\langle 1 \rangle}} \stackrel{(2.10)}{=} \overline{n}. \\ (\text{id} \otimes \rho_{\overline{N}})\rho_{\overline{N}}(\overline{n}) &= (\text{id} \otimes \rho_{\overline{N}})(E(n)_{[-1]} \otimes \overline{E(n)_{[0]}}) \\ &= E(n)_{[-1]} \otimes E(E(n)_{[0]})_{[-1]} \otimes \overline{E(E(n)_{[0]})_{[0]}} \\ &\stackrel{(2.8)}{=} E(n)_{[-1]} \otimes E(n)_{[0]([-1])} \otimes \overline{E(n)_{[0]([0])}} \\ &= E(n)_{[-1]1} \otimes E(n)_{[-1]2} \otimes \overline{E(n)_{[0]}} = (\Delta \otimes \text{id})\rho_{\overline{N}}(\overline{n}). \end{aligned}$$

Заметим, что из вышесказанного вытекает равенство

$$\overline{E(n)} = \overline{n}, \tag{2.13}$$

которое завершает доказательство предложения 2.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть N – двойственный квазигопфов H -бикомодуль. Тогда $(\overline{N} \otimes H, \rho_{\overline{N} \otimes H}^-, \rho_{\overline{N} \otimes H}^+, \psi_{\overline{N} \otimes H})$ является двойственным квазигопфовым H -бикомодулем с кодействиями и действием

$$\begin{aligned} \rho_{\overline{N} \otimes H}^- : \quad & \overline{N} \otimes H \rightarrow H \otimes (\overline{N} \otimes H), \quad \overline{n} \otimes h \mapsto E(n)_{[-1]} h_1 \otimes (\overline{E(n)_{[0]}} \otimes h_2), \\ \rho_{\overline{N} \otimes H}^+ : \quad & \overline{N} \otimes H \rightarrow (\overline{N} \otimes H) \otimes H, \quad \overline{n} \otimes h \mapsto (\overline{n} \otimes h_1) \otimes h_2, \\ \psi_{\overline{N} \otimes H} : \quad & (\overline{N} \otimes H) \otimes H \rightarrow \overline{N} \otimes H, \quad (\overline{n} \otimes h) \otimes g \mapsto \varphi^{-1}(E(n)_{[-1]}, h_1, g_1) \overline{E(n)_{[0]}} \otimes h_2 g_2. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 2 вытекает, что $(\overline{N}, \rho_{\overline{N}})$ является левым H -комодулем, а из леммы 1 – что $(\overline{N} \otimes H, \rho_{\overline{N} \otimes H}^-, \rho_{\overline{N} \otimes H}^+, \psi_{\overline{N} \otimes H})$ является двойственным квазигопфовым H -бикомодулем.

Справедлива следующая структурная теорема для двойственных квазигопфовых бикомодулей.

ТЕОРЕМА 1 (Структурная теорема). Пусть N – двойственный квазигопфов H -бикомодуль, $\overline{N} = N/E(N) \cdot H^+$ – левый H -комодуль и $\overline{N} \otimes H$ – двойственный квазигопфов H -бикомодуль с определенными выше структурами. Тогда отображение

$$\Phi: N \rightarrow \overline{N} \otimes H, \quad n \mapsto \overline{E(n_{\langle 0 \rangle})} \otimes n_{\langle 1 \rangle}$$

определяет изоморфизм правых двойственных квазигопфовых H -бикомодулей с инверсией

$$\Phi^{-1}: \overline{N} \otimes H \rightarrow N, \quad \overline{n} \otimes h \mapsto E(n) \cdot h,$$

где $\overline{n} \in \overline{N}$, $n \in N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим, что Φ является биекцией. Действительно,

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}\Phi(n) &= \Phi^{-1}(\overline{E(n_{\langle 0 \rangle})} \otimes n_{\langle 1 \rangle}) = E(E(n_{\langle 0 \rangle})) \cdot n_{\langle 1 \rangle} \stackrel{(2.7)}{=} E(n_{\langle 0 \rangle}) \cdot n_{\langle 1 \rangle} = n, \\ \Phi\Phi^{-1}(\overline{n} \otimes h) &= \Phi(E(n) \cdot h) = \overline{E((E(n) \cdot h)_{\langle 0 \rangle})} \otimes (E(n) \cdot h)_{\langle 1 \rangle} \\ &= \overline{E(E(n) \cdot h_1)} \otimes h_2 \stackrel{(2.11)}{=} \overline{E(n)} \otimes h \stackrel{(2.13)}{=} \overline{n} \otimes h. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что Φ^{-1} является морфизмом H -бикомодулей и правых H -модулей:

$$\begin{aligned} \rho_N^+ \Phi^{-1}(\overline{n} \otimes h) &= \rho_N^+(E(n) \cdot h) = E(n)_{\langle 0 \rangle} \cdot h_1 \otimes E(n)_{\langle 1 \rangle} h_2 \\ &\stackrel{(2.6)}{=} E(n) \cdot h_1 \otimes h_2 = (\Phi^{-1} \otimes \text{id})(\overline{n} \otimes h_1 \otimes h_2) \\ &= (\Phi^{-1} \otimes \text{id})\rho_{N \otimes H}^+(\overline{n} \otimes h), \\ (\text{id} \otimes \Phi^{-1})\rho_{N \otimes H}^-(\overline{n} \otimes h) &= (\text{id} \otimes \Phi^{-1})(E(n)_{[-1]} h_1 \otimes \overline{E(n)_{[0]}} \otimes h_2) \\ &= E(n)_{[-1]} h_1 \otimes E(n)_{[0]} \cdot h_2 = \rho_N^-(E(n) \cdot h) = \rho_N^- \Phi^{-1}(\overline{n} \otimes h), \\ \Phi^{-1}\psi_{N \otimes H}(\overline{n} \otimes h \otimes g) &= \varphi^{-1}(E(n)_{[-1]}, h_1, g_1) \Phi^{-1}(\overline{E(n)_{[0]}} \otimes h_2 g_2) \\ &= \varphi^{-1}(E(n)_{[-1]}, h_1, g_1) E(n)_{[0]} \cdot h_2 g_2 \stackrel{(2.2)(2.6)}{=} (E(n) \cdot h) \cdot g \\ &= \psi_N(E(n) \cdot h \otimes g) = \psi_N(\Phi^{-1} \otimes \text{id})(\overline{n} \otimes h \otimes g). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В тех же обозначениях, что и выше, имеем

$$\overline{n \cdot h} = \varphi^{-1}(E(n_{\langle 0 \rangle})_{[-1]}, n_{\langle 1 \rangle}, h) \overline{E(n_{\langle 0 \rangle})_{[0]}}. \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства теоремы 1 вытекает, что для любых $n \in N$ и $h \in H$

$$\begin{aligned} \overline{n \cdot h} &= \pi\psi_N(\Phi^{-1} \otimes \text{id})(\Phi \otimes \text{id})(n \otimes h) = \pi\Phi^{-1}\psi_{N \otimes H}(\Phi \otimes \text{id})(n \otimes h) \\ &= \pi\Phi^{-1}\psi_{N \otimes H}(\overline{E(n_{\langle 0 \rangle})} \otimes n_{\langle 1 \rangle} \otimes h) \stackrel{(2.13)}{=} \pi\Phi^{-1}\psi_{N \otimes H}(\overline{n_{\langle 0 \rangle}} \otimes n_{\langle 1 \rangle} \otimes h) \\ &= \pi\Phi^{-1}(\overline{E(n_{\langle 0 \rangle})_{[0]}} \otimes n_{\langle 1 \rangle 2} h_2) \varphi^{-1}(E(n_{\langle 0 \rangle})_{[-1]}, n_{\langle 1 \rangle 1}, h_1) \\ &= \overline{E(E(n_{\langle 0 \rangle})_{[0]}) \cdot n_{\langle 1 \rangle 2} h_2} \varphi^{-1}(E(n_{\langle 0 \rangle})_{[-1]}, n_{\langle 1 \rangle 1}, h_1) \\ &= \varphi^{-1}(E(n_{\langle 0 \rangle})_{[-1]}, n_{\langle 1 \rangle}, h) \overline{E(n_{\langle 0 \rangle})_{[0]}}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

3. Структурная теорема для двойственных квазихопфовых модульных коалгебр. В этом пункте мы применяем структурную теорему для двойственного квазихопфова бикомодуля, чтобы доказать структурную теорему для двойственной квазихопфовой модульной коалгебры.

ЛЕММА 2. Пусть D – левый H -комодуль с коумножением $\Delta(d) = d_1 \otimes d_2$, и пусть коумножение на $D \otimes H$ определено правилом

$$\Delta(d \otimes h) = \varphi^{-1}(d_{1[-1]}, d_{2[-1]1}, h_1)d_{1[0]} \otimes d_{2[-1]2}h_2 \otimes d_{2[0]} \otimes h_3 \quad (3.1)$$

для любых $d \in D$ и $h \in H$. Если это коумножение коассоциативно, то оно удовлетворяет условию

$$\varphi(d_{1,1[-1]}, d_{1,2[-1]}, d_{2[-1]})d_{1,1[0]} \otimes d_{1,2[0]} \otimes d_{2[0]} = d_1 \otimes d_{2,1} \otimes d_{2,2}. \quad (3.2)$$

Если, кроме того, D обладает коединицей ε , удовлетворяющей условию $\varepsilon(d_{[0]})d_{[-1]} = \varepsilon(d)1$ для любого $d \in D$, то

$$d_{[-1]} \otimes d_{[0]1} \otimes d_{[0]2} = d_{1[-1]}d_{2[-1]} \otimes d_{1[0]} \otimes d_{2[0]}, \quad (3.3)$$

т.е. D является левой H -комодульной коалгеброй, или коалгеброй в тензорной категории ${}^H\mathcal{M}$ (коумножение просто индуцируется из *smash*-произведения $D \rtimes H$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку коумножение коассоциативно, для любых $d \in D$ и $h \in H$ выполнено равенство $(\Delta \otimes \text{id})\Delta(d \otimes h) = (\text{id} \otimes \Delta)\Delta(d \otimes h)$, т.е.

$$\begin{aligned} & \varphi^{-1}(d_{1[-1]}, d_{2[-1]1}, h_1)\varphi^{-1}(d_{1[0]1[-1]}, d_{1[0]2[-1]1}, d_{2[-1]2,1}h_2)d_{1[0]1[0]} \\ & \quad \otimes d_{1[0]2[-1]2}d_{2[-1]2,2}h_3 \otimes d_{1[0]2[0]} \otimes d_{2[-1]2,3}h_4 \otimes d_{2[0]} \otimes h_5 \\ & = \varphi^{-1}(d_{1[-1]}, d_{2[-1]1}, h_1)\varphi^{-1}(d_{2[0]1[-1]}, d_{2[0]2[-1]1}, h_3)d_{1[0]} \\ & \quad \otimes d_{2[-1]2}h_2 \otimes d_{2[0]1[0]} \otimes d_{2[0]2[-1]2}h_4 \otimes d_{2[0]2[0]} \otimes h_5. \end{aligned}$$

Для $H = 1$ это равенство принимает вид

$$\begin{aligned} & \varphi^{-1}(d_{1,1[-1]}, d_{1,2[-1]1}, d_{2[-1]1})d_{1,1[0]} \otimes d_{1,2[-1]2}d_{2[-1]2} \otimes d_{1,2[0]} \otimes d_{2[-1]3} \otimes d_{2[0]} \otimes 1 \\ & = d_1 \otimes d_{2[-1]} \otimes d_{2[0]1} \otimes d_{2[0]2[-1]} \otimes d_{2[0]2[0]} \otimes 1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Применяя $\text{id} \otimes \varepsilon \otimes \text{id} \otimes \varepsilon \otimes \text{id} \otimes \varepsilon$ к обеим частям равенства (3.4) и учитывая (1.14), мы получаем (3.2). Применяя $\varepsilon \otimes \text{id} \otimes \text{id} \otimes \varepsilon \otimes \text{id} \otimes \varepsilon$ к обеим частям равенства (3.4), окончательно получаем (3.3).

Теорема доказана.

С этого момента мы фиксируем правую H -модульную коалгебру (C, θ, φ_C) , где $\theta(c \otimes h) = c \cdot h$, для которой существует морфизм правых H -модульных коалгебр $\phi: C \rightarrow H$ (отсюда вытекает, в частности, что

$$\phi\theta(c \otimes h) = \phi(c)h, \quad \phi(c_1) \otimes \phi(c_2) = \phi(c)_1 \otimes \phi(c)_2$$

для любых $c \in C$ и $h \in H$, а также $\varphi_C(c, h, g) = \varphi(\phi(c), h, g)$).

ЛЕММА 3. Четверка $(C, \theta, \rho_C^-, \rho_C^+)$, где

$$\begin{aligned}\rho_C^-: C &\rightarrow H \otimes C, & c &\mapsto \phi(c_1) \otimes c_2, \\ \rho_C^+: C &\rightarrow C \otimes H, & c &\mapsto c_1 \otimes \phi(c_2), \\ \theta: C \otimes H &\rightarrow C, & c \otimes h &\mapsto c \cdot h\end{aligned}$$

для любых $c \in C$ и $h \in H$, является объектом категории ${}^H\mathcal{M}_H^H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что C является H -бикомодулем и $C \otimes H$ является H -бикомодулем с комодульными структурами

$$\rho_{C \otimes H}^+(c \otimes h) = c_1 \otimes h_1 \otimes \phi(c_2)h_2, \quad \rho_{C \otimes H}^-(c \otimes h) = \phi(c_1)h_1 \otimes c_2 \otimes h_2.$$

Очевидно, $\theta(\text{id} \otimes u) = \text{id}$, причем это отображение является морфизмом H -бикомодулей:

$$\begin{aligned}(\theta \otimes \text{id})\rho_{C \otimes H}^+(c \otimes h) &= (\theta \otimes \text{id})(c_1 \otimes h_1 \otimes \phi(c_2)h_2) = c_1 \cdot h_1 \otimes \phi(c_2)h_2 \\ &= (c \cdot h)_1 \otimes \phi((c \cdot h)_2) = \rho_C^+\theta(c \otimes h), \\ (\text{id} \otimes \theta)\rho_{C \otimes H}^-(c \otimes h) &= (\text{id} \otimes \theta)(\phi(c_1)h_1 \otimes c_2 \otimes h_2) = \phi(c_1)h_1 \otimes c_2 \cdot h_2 \\ &= \phi((c \cdot h)_1) \otimes (c \cdot h)_2 = \rho_C^-\theta(c \otimes h).\end{aligned}$$

Наконец, легко видеть, что для любых $h, g \in H$ и $c \in C$

$$\varphi(c_{[-1]}, h_1, g_1)(c_{[0]} \cdot h_2) \cdot g_2 = c_{(0)} \cdot h_1 g_1 \varphi(c_{(1)}, h_2, g_2).$$

Действительно, по определению правой H -модульной коалгебры имеем

$$\varphi_C(c_1, h_1, g_1)(c_2 \cdot h_2) \cdot g_2 = c_1 \cdot (h_1 g_1) \varphi_C(c_2, h_2, g_2),$$

поскольку $\varphi_C(c, h, g) = \varphi(\phi(c), h, g)$. Лемма доказана.

Поскольку C является объектом категории ${}^H\mathcal{M}_H^H$, мы можем рассмотреть отображение $E: C \rightarrow C$, определенное правилом

$$E(c) = \varphi(\phi(c_1), S(\phi(c_5)), \phi(c_7))\beta(\phi(c_3))\alpha(\phi(c_6))c_2 \cdot S(\phi(c_4)) \quad (3.5)$$

для любого $c \in C$.

По теореме 1 отображение

$$\Phi: C \rightarrow \overline{C} \otimes H, \quad c \mapsto \overline{E(c_1)} \otimes \phi(c_2)$$

является изоморфизмом в ${}^H\mathcal{M}_H^H$; обратное отображение определено правилом

$$\Phi^{-1}: \overline{C} \otimes H \rightarrow C, \quad \bar{c} \otimes h \mapsto E(c) \cdot h$$

для любого $c \in C$.

Наша цель – определить коумножение $\Delta_{\overline{C}}$ на $\overline{C}$ таким образом, чтобы тройка $(\overline{C}, \Delta_{\overline{C}}, \varepsilon_{\overline{C}})$ была левой H -комодульной коалгеброй и определенное выше отображение Φ было изоморфизмом правых H -модульных коалгебр C и $\overline{C} \rtimes H$. Из предложения 2 вытекает, что если $\bar{c} = \bar{d}$ для любых $c, d \in C$, то $E(c) = E(d)$. Следовательно, можно определить коумножение $\Delta_{\overline{C}}$ и коединицу $\varepsilon_{\overline{C}}$ как

$$\Delta_{\overline{C}}(\bar{c}) = \overline{E(c)_1} \otimes \overline{E(c)_2}, \quad \varepsilon_{\overline{C}}(\bar{c}) = \varepsilon(c)$$

для всех $c \in C$. Таким образом,

$$\varepsilon_{\overline{C}}(\overline{E(c)_1} \overline{E(c)_2}) = \varepsilon(E(c)_1) \overline{E(c)_2} = \overline{E(c)} = \overline{c} = \overline{E(c)_1} \varepsilon(E(c)_2) = \overline{E(c)_1} \varepsilon_{\overline{C}}(\overline{E(c)_2}),$$

а значит, $\varepsilon_{\overline{C}}$ является коединицей в $(\overline{C}, \Delta_{\overline{C}})$.

Имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\overline{C}}(\overline{E(c)_{[0]}}) E(c)_{[-1]} &= \varepsilon(E(c)_{[0]}) E(c)_{[-1]} = \varepsilon(E(c)_2) \phi(E(c)_1) = \phi(E(c)) \\ &= \varphi(\phi(c_1), S(\phi(c_5)), \phi(c_7)) \beta(\phi(c_3)) \alpha(\phi(c_6)) \phi(c_2) S(\phi(c_4)) \\ &= \varphi(\phi(c_1), S(\phi(c_3)), \phi(c_5)) \beta(\phi(c_2)) \alpha(\phi(c_4)) \\ &= \varepsilon(\phi(c)) 1 = \varepsilon(c) 1 = \varepsilon_{\overline{C}}(\overline{c}) 1. \end{aligned}$$

В силу леммы 2, чтобы доказать, что $(\overline{C}, \Delta_{\overline{C}}, \varepsilon_{\overline{C}})$ является левой H -комодульной коалгеброй, достаточно показать, что коумножение на $\overline{C} \otimes H$, определенное правилом

$$\begin{aligned} \Delta_{\overline{C} \otimes H}(\overline{c} \otimes h) &= \varphi^{-1}(E(E(c)_1)_{[-1]}, E(E(c)_2)_{[-1]1}, h_1 \overline{E(E(c)_1)_{[0]}} \\ &\quad \otimes E(E(c)_2)_{[-1]2} h_2 \otimes \overline{E(E(c)_2)_{[0]}} \otimes h_3, \end{aligned} \quad (3.6)$$

коассоциативно. Поскольку отображение $\Phi: C \rightarrow \overline{C} \otimes H$ биективно и бикомодуль C коассоциативен, достаточно доказать, что Φ является морфизмом коалгебр, т.е. для любого $c \in C$

$$(\Phi \otimes \Phi) \Delta_C(c) = \Delta_{\overline{C} \otimes H} \Phi(c).$$

Согласно лемме 3 C является двойственным квазихопфовым H -бикомодулем, поэтому из (2.9) и (2.14) вытекает, что

$$\phi(c_1) \otimes E(c_2) = E(c_1)_{[-1]} \phi(c_2) \otimes E(c_1)_{[0]} \quad (3.7)$$

$$\overline{c \cdot h} = \varphi^{-1}(E(c_1)_{[-1]}, \phi(c_2), h) \overline{E(c_1)_{[0]}}. \quad (3.8)$$

Нам также понадобится более явное выражение для $\Delta_{\overline{C}}$:

$$\begin{aligned} \Delta_{\overline{C}}(\overline{c}) &= \overline{E(c)_1} \otimes \overline{E(c)_2} \\ &= \varphi(\phi(c_1), S(\phi(c_7)), \phi(c_9)) \beta(\phi(c_4)) \alpha(\phi(c_8)) \overline{c_2 \cdot S(\phi(c_6))} \otimes \overline{c_3 \cdot S(\phi(c_5))} \\ &\stackrel{(3.8)}{=} \varphi(\phi(c_1), S(\phi(c_9)), \phi(c_{11})) \varphi^{-1}(E(c_2)_{[-1]}, \phi(c_3), S(\phi(c_8))) \\ &\quad \times \varphi^{-1}(E(c_4)_{[-1]}, \phi(c_5), S(\phi(c_7))) \beta(\phi(c_6)) \alpha(\phi(c_{10})) \overline{E(c_2)_{[0]}} \otimes \overline{E(c_4)_{[0]}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Следующее равенство используется в доказательстве комутативности отображения Φ :

$$\begin{aligned} \varphi(h_1(g_1 k_1), S(k_7), k_9) \varphi^{-1}(h_2, g_2 k_2, S(k_6)) \varphi^{-1}(g_3, k_3, S(k_5)) \varphi^{-1}(h_3, g_4, k_{10}) \beta(k_4) \alpha(k_8) \\ = \varepsilon(h) \varepsilon(g) \varepsilon(k). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Чтобы убедиться в его справедливости, достаточно заметить, что для всех $h, g, k \in H$

$$\begin{aligned} \varphi(h_1(g_1 k_1), S(k_7), k_9) \varphi^{-1}(h_2, g_2 k_2, S(k_6)) \varphi^{-1}(g_3, k_3, S(k_5)) \varphi^{-1}(h_3, g_4, k_{10}) \beta(k_4) \alpha(k_8) \\ \stackrel{(1.2)}{=} \varphi(h_1(g_1 k_1), S(k_8), k_{10}) \varphi(h_2, g_2, k_2) \varphi^{-1}(h_3 g_3, k_3, S(k_7)) \varphi^{-1}(h_4, g_4, k_4 S(k_6)) \\ \times \varphi^{-1}(h_5, g_5, k_{11}) \beta(k_5) \alpha(k_9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(1.5)}{=} \varphi(h_1(g_1k_1), S(k_6), k_8)\varphi(h_2, g_2, k_2)\varphi^{-1}(h_3g_3, k_3, S(k_5))\varphi^{-1}(h_4, g_4, k_9)\beta(k_4)\alpha(k_7) \\
& \stackrel{(1.1)}{=} \varphi(h_1, g_1, k_1)\varphi((h_2g_2)k_2, S(k_6), k_8)\varphi^{-1}(h_3g_3, k_3, S(k_5))\varphi^{-1}(h_4, g_4, k_9)\beta(k_4)\alpha(k_7) \\
& \stackrel{(2.12)}{=} \varphi(h_1, g_1, k_1)\varphi^{-1}(h_2, g_2, k_2) = \varepsilon(h)\varepsilon(g)\varepsilon(k).
\end{aligned}$$

Наконец, покажем, что отображение Φ комутативно. Для каждого $c \in C$ имеем

$$\begin{aligned}
\Delta_{\overline{C} \otimes H} \Phi(c) &= \Delta_{\overline{C} \otimes H}(\overline{E(c_1)} \otimes \phi(c_2)) \stackrel{(2.13)}{=} \Delta_{\overline{C} \otimes H}(\overline{c_1} \otimes \phi(c_2)) \\
& \stackrel{(3.6), (3.9)}{=} \varphi(\phi(c_1), S(\phi(c_9)), \phi(c_{11}))\varphi^{-1}(E(c_2)_{[-1]}, \phi(c_3), S(\phi(c_8))) \\
& \quad \times \varphi^{-1}(E(E(c_2)_{[0]})_{[-1]}, E(E(c_4)_{[0]})_{[-1]1}, \phi(c_{12})) \\
& \quad \times \varphi^{-1}(E(c_4)_{[-1]}, \phi(c_5), S(\phi(c_7)))\beta(\phi(c_6))\alpha(\phi(c_{10}))\overline{E(E(c_2)_{[0]})_{[0]}} \\
& \quad \otimes E(E(c_4)_{[0]})_{[-1]2}\phi(c_{13}) \otimes \overline{E(E(c_4)_{[0]})_{[0]}} \otimes \phi(c_{14}) \\
& \stackrel{(2.8)}{=} \varphi(\phi(c_1), S(\phi(c_9)), \phi(c_{11})) \\
& \quad \times \varphi^{-1}(E(c_2)_{[-1]1}, \phi(c_3), S(\phi(c_8)))\varphi^{-1}(E(c_2)_{[-1]2}, E(c_4)_{[-1]2}, \phi(c_{12})) \\
& \quad \times \varphi^{-1}(E(c_4)_{[-1]1}, \phi(c_5), S(\phi(c_7)))\beta(\phi(c_6))\alpha(\phi(c_{10}))\overline{E(c_2)_{[0]}} \\
& \quad \otimes E(c_4)_{[-1]3}\phi(c_{13}) \otimes \overline{E(c_4)_{[0]}} \otimes \phi(c_{14}) \\
& \stackrel{(3.7)}{=} \varphi(E(c_1)_{[-1]1}\phi(c_2), S(\phi(c_9)), \phi(c_{11}))\varphi^{-1}(E(c_1)_{[-1]3}, E(c_4)_{[-1]2}, \phi(c_{12})) \\
& \quad \times \varphi^{-1}(E(c_1)_{[-1]2}, \phi(c_3), S(\phi(c_8)))\varphi^{-1}(E(c_4)_{[-1]1}, \phi(c_5), S(\phi(c_7))) \\
& \quad \times \beta(\phi(c_6))\alpha(\phi(c_{10}))\overline{E(c_1)_{[0]}} \\
& \quad \otimes E(c_4)_{[-1]3}\phi(c_{13}) \otimes \overline{E(c_4)_{[0]}} \otimes \phi(c_{14}) \\
&= \varphi(E(c_1)_{[-1]1}(E(c_2)_{[-1]1}\phi(c_3)), S(\phi(c_9)), \phi(c_{11})) \\
& \quad \times \varphi^{-1}(E(c_1)_{[-1]3}, E(c_2)_{[-1]4}, \phi(c_{12})) \\
& \quad \times \varphi^{-1}(E(c_1)_{[-1]2}, E(c_2)_{[-1]2}\phi(c_4), S(\phi(c_8))) \\
& \quad \times \varphi^{-1}(E(c_2)_{[-1]3}, \phi(c_5), S(\phi(c_7)))\beta(\phi(c_6))\alpha(\phi(c_{10}))\overline{E(c_1)_{[0]}} \\
& \quad \otimes E(c_2)_{[-1]5}\phi(c_{13}) \otimes \overline{E(c_2)_{[0]}} \otimes \phi(c_{14}) \\
& \stackrel{(3.10)}{=} \overline{E(c_1)} \otimes E(c_2)_{[-1]}\phi(c_3) \otimes \overline{E(c_2)_{[0]}} \otimes \phi(c_4) \\
&= \overline{E(c_1)} \otimes \phi(c_2) \otimes \overline{E(c_3)} \otimes \phi(c_4) = (\Phi \otimes \Phi)\Delta_C(c).
\end{aligned}$$

Легко проверить, что Φ является морфизмом правых H -модулей:

$$\begin{aligned}
\psi_{\overline{C} \otimes H}(\Phi \otimes \text{id})(c \otimes h) &= \psi_{\overline{C} \otimes H}(\overline{c_1} \otimes \phi(c_2) \otimes h) \\
&= \varphi^{-1}(E(c_1)_{[-1]}, \phi(c_2), h_1)\overline{E(c_1)_{[0]}} \otimes \phi(c_3)h_2 \\
& \stackrel{(3.8)}{=} \overline{c_1 \cdot h_1} \otimes \phi(c_2 \cdot h_2) = \overline{E((c \cdot h)_1)} \otimes \phi((c \cdot h)_2) = \Phi\theta(c \otimes h).
\end{aligned}$$

Более того, поскольку

$$\varphi_C(c, g, l) = \varphi(\phi(c), g, l) = \varepsilon_{\overline{C}}(\overline{c_1})\varphi(\phi(c_2), g, l) = \varphi_{\overline{C} \rtimes H}(\overline{c_1} \rtimes \phi(c_2), g, l),$$

мы заключаем, что Φ является изоморфизмом правых H -модульных коалгебр, который действует из правой H -модульной коалгебры C в smash-копроизведение $\overline{C} \rtimes H$. Мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2 (Структурная теорема). Пусть H – двойственная квазихопфова алгебра и C – правая H -модульная коалгебра, для которых существует морфизм $\phi: C \rightarrow H$ правых H -модульных коалгебр. Тогда найдется левая H -комодульная коалгебра $\overline{C}$, для которой имеет место изоморфизм правых H -модульных коалгебр

$$C \cong \overline{C} \rtimes H.$$

Заметим, что для тривиального φ коалгебра H превращается в обычную хопфову алгебру. Из сказанного выше вытекает, что подпространство $C \cdot H^+$ совпадает с $E(C) \cdot H^+$. Это происходит потому, что для любых $c \in C$ и $x \in H^+$ выполнены равенства

$$E(c) \cdot x \in C \cdot H^+, \quad c \cdot x \stackrel{(2.10)}{=} E(c_{(0)}) \cdot c_{(1)}x \in E(C) \cdot H^+.$$

Значит, в хопфовом случае $\overline{C} = C/C \cdot H^+ = C/E(C) \cdot H^+$, откуда следует структурная теорема для обычных модульных коалгебр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть H – хопфова алгебра и C – правая H -модульная коалгебра. Предположим, что существует морфизм правых H -модульных коалгебр $\phi: C \rightarrow H$. Тогда найдется левая H -комодульная коалгебра $\overline{C}$, для которой имеет место изоморфизм правых H -модульных коалгебр $C \cong \overline{C} \rtimes H$, где $\overline{C} \rtimes H$ обозначает обычное smash-копроизведение.

Л. Ю. Жанг благодарит профессора Ю. Ч. Чжана за приглашение в Гонконгский университет науки и техники.

Авторы выражают признательность рецензенту за конструктивные и интересные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Г. Дринфельд, “Квазихопфовы алгебры”, *Алгебра и анализ*, **1:6** (1989), 114–148.
- [2] V. G. Drinfel’d, “Quasi-Hopf algebras and Knizhnik–Zamolodchikov equations”, *Problems of Modern Quantum Field Theory*, Res. Rep. Phys., Springer-Verlag, Berlin, 1989, 1–13.
- [3] D. Altschuler, A. Coste, “Quasi-quantum groups, knots, three-manifolds, and topological field theory”, *Comm. Math. Phys.*, **150:1** (1992), 83–107.
- [4] R. Dijkgraaf, V. Pasquier, P. Roche, “Quasi-Hopf algebras, group cohomology, and orbifold models”, *Nuclear Phys. B Proc. Suppl.*, **18B** (1990), 60–72.
- [5] D. Bulacu, F. Panaite, F. V. Oystaeyen, “Quasi-Hopf algebra actions and smash products”, *Comm. Algebra*, **28:2** (2000), 631–651.
- [6] D. Bulacu, E. Nauwelaerts, “Dual quasi-Hopf algebra coactions, smash coproducts, and relative Hopf modules”, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **47:4** (2002), 415–443.
- [7] F. Panaite, F. V. Oystaeyen, “Quasi-Hopf algebras and representations of octonions and other quasialgebras”, *J. Math. Phys.*, **45:10** (2004), 3912–3929.
- [8] S. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [9] D. Bulacu, E. Nauwelaerts, “Relative Hopf modules for (dual) quasi-Hopf algebras”, *J. Algebra*, **229:2** (2000), 632–659.

- [10] F. Hausser, F. Nill, *Integral Theory for Quasi-Hopf Algebras*, 1999, [arXiv:math.QA/9904164](#).
- [11] F. Hausser, F. Nill, “Diagonal crossed products by dual of quasi-quantum groups”, *Rev. Math. Phys.*, **11**:5 (1999), 553–629.
- [12] F. Panaite, F. V. Oystaeyen, “A structure theorem for quasi-Hopf comodule algebras”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135**:6 (2007), 1669–1677.
- [13] C. Kassel, *Quantum Groups*, Grad. Texts in Math., **155**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [14] S. Montgomery, *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **82**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

Ю. Ванг

Nanjing Agricultural University, Китай

Л. Ю. Жанг

Nanjing Agricultural University, Китай

E-mail: zlyun@njau.edu.cn

Р. Ф. Ню

Nanjing Agricultural University, Китай

Поступило

07.06.2012

Исправленный вариант

14.11.2012