Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аптекарев, В. С. Буяров, О резольвенте оператора Гаусса, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 4, 628–631

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10322>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 11:12:29

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О резольvente оператора Гаусса

А. И. Аптекарев, В. С. Буяров

1. Введение. Постановка задачи связана с цепными дробями действительных чисел:

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}, \quad (1)$$

здесь $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $a_n, n \in \mathbb{N}$ (подробнее см. [1], [2]). Пусть

$$\eta_n(\alpha) := [0; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] \in [0, 1).$$

Обозначим

$$F_n(x) := \text{mes}\{\alpha : \eta_n(\alpha) < x\} = \text{mes}\left\{\alpha : a_{n+1}(\alpha) \geq \left[\frac{1}{x}\right]\right\}. \quad (2)$$

Гаусс (1812 г.) в письме Лапласу известил об открытии им предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln 2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

и поставил задачу о скорости стремления к этому пределу. Существование предела (3) доказал Кузьмин (1928 г.) (см. [3]). Вирзинг [4] (1974 г.) и независимо Бабенко [5] (1977 г.) решили задачу Гаусса, доказав, что

$$F_n(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} + \lambda^n \phi(x) + \mathcal{O}(\rho^n),$$

где $\lambda = -0.30366300 + i \cdot 5.85 \cdot 10^{-6}$, $|\vartheta| < 1$, $\phi \in C([0, 1])$, $\rho < 0.15$.

Напомним определение оператора Гаусса. Имеем из (2)

$$F_{n+1} := \sum_{j=1}^{\infty} F_n\left(\frac{1}{j}\right) - F_n\left(\frac{1}{j+x}\right), \quad F_0 = x.$$

Оператор Гаусса G определен на функциях F распределения мер:

$$G[F(x)] := \sum_{j=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{j}\right) - F\left(\frac{1}{j+x}\right).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00245), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-8033.2010.1); первый автор также поддержан программой № 1 ОМН РАН.

DOI: 10.4213/mzm10322

Бабенко доказал (см. [5]), что оператор G компактен, и тем самым, задача Гаусса свелась к проверке однократности второго собственного значения, что было сделано с использованием доказательных вычислений. В [5] была получена интегральная форма оператора Гаусса, действующего на преобразованиях Бореля $f^{(B)}$ производных $F' =: f \rightarrow f^{(B)}$:

$$G_B[f^{(B)}](w) := \int_0^\infty \frac{J_1(2\sqrt{wt})}{\sqrt{wt}} f^{(B)}(t) \left(\frac{te^{-t}}{1-e^{-t}} \right) dt. \quad (4)$$

Тем самым (см. [6]), справедливо разложение по собственным функциям оператора Гаусса

$$F_n(x) \simeq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n \phi_k(x),$$

где $\lambda_1 = 1$, первая собственная функция $\phi_1(x) = (\ln(1+x))/(\ln 2)$ (Гаусс–Кузьмин), а второе собственное число $\lambda_2 = -0.30366300\dots$ (Вирзинг–Бабенко). В последнее время обозначился интерес к нахождению дальнейших собственных значений оператора Гаусса.

2. Определитель Фредгольма и спектр оператора Гаусса. Фредгольмова резольвента (см. [7]) определяется степенным рядом

$$R(x, t; z) := \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t) z^{n-1}, \quad K_n(x, t) := \int_0^\infty K(x, y) K_{n-1}(y, t) dy,$$

где $K_1(x, y) := K(x, y)$ – ядро интегрального оператора. В нашем случае (см. (4))

$$K(x, t) := \frac{J_1(2\sqrt{xt})}{\sqrt{xt}} h(t), \quad h(t) = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}} = t \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu t}. \quad (5)$$

Резольвента $R(x, t; z)$ компактного интегрального оператора представима в виде отношения двух целых функций от z

$$R(x, t; z) = \frac{\tilde{D}(x, t; z)}{D(z)},$$

называемых *минор* $\tilde{D}(x, t; z)$ и *определитель* $D(z)$ Фредгольма. Нули $\{z_n\}$ определителя Фредгольма $D(z)$ суть обратные величины значений спектра $\lambda_n = 1/z_n$, $n = 1, \dots$, интегрального оператора (4). Отметим, что логарифмическая производная определителя Фредгольма имеет разложение

$$\mathcal{L}(z) := -\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}, \quad c_n := \int_0^\infty K_n(x, x) dx. \quad (6)$$

В настоящей заметке доказывается

ТЕОРЕМА 1. Пусть $q_k = q_k(a_1, \dots, a_k)$ и $p_k = p_k(a_1, \dots, a_k)$ – знаменатель и соответственно числитель подходящей $p_n/q_n := [0; a_1, \dots, a_n]$ к дроби (1). Тогда для интегрального оператора Гаусса–Бабенко (4) выполнены следующие утверждения:

1) коэффициенты степенного разложения резольвенты $R(x, t; z)$ равны

$$\begin{aligned} K_{2n+1}(x, y) &= \frac{h(y)}{\sqrt{xy}} \sum_{a_1, \dots, a_{2n}=1}^{\infty} \frac{1}{q_{2n}} \exp\left\{-\frac{p_{2n}x + q_{2n-1}y}{q_{2n}}\right\} J_1\left(\frac{2\sqrt{xy}}{q_{2n}}\right), \\ K_{2n}(x, y) &= \frac{h(y)}{\sqrt{xy}} \sum_{a_1, \dots, a_{2n-1}=1}^{\infty} \frac{1}{q_{2n-1}} \exp\left\{-\frac{p_{2n-1}x + q_{2n-2}y}{q_{2n-1}}\right\} I_1\left(\frac{2\sqrt{xy}}{q_{2n-1}}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

где J_1 – функция Бесселя, и I_1 – модифицированная функция Бесселя;

2) коэффициенты степенного разложения функции $\mathcal{L}(z)$ в (6) равны

$$c_n = \sum_{a_1, \dots, a_n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e_n(a_1, \dots, a_n) - \sqrt{e_n(a_1, \dots, a_n)^2 - (-1)^n 4}}{2 \sqrt{e_n(a_1, \dots, a_n)^2 - (-1)^n 4}}, \quad (8)$$

где $e_n := q_n + p_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1) теоремы по индукции. База очевидна. Сначала предположим справедливость (7) для K_{2n} и выведем (7) для K_{2n+1} . Имеем

$$\begin{aligned} & K_{2n+1}(s, t) \\ &= \int_0^\infty K_{2n}(s, u) K(u, t) du \\ &= \int_0^\infty \frac{h(u)}{\sqrt{su}} \sum_{a_1, \dots, a_{2n-1}=1}^{\infty} \frac{1}{q_{2n-1}} \exp\left\{-\frac{p_{2n-1}s + q_{2n-2}u}{q_{2n-1}}\right\} I_1\left(\frac{2\sqrt{su}}{q_{2n-1}}\right) \frac{J_1(2\sqrt{ut})}{\sqrt{ut}} h(t) du. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя в правую часть (9) разложение (5) для $h(u)$, продолжаем (9):

$$\begin{aligned} &= \frac{h(t)}{\sqrt{st}} \sum_{a_1 \dots a_{2n}=1}^{\infty} \frac{1}{q_{2n-1}} \exp\left\{-\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} s\right\} \\ &\quad \times \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{a_{2n}q_{2n-1} + q_{2n-2}}{q_{2n-1}} u\right\} I_1\left(\frac{2\sqrt{su}}{q_{2n-1}}\right) J_1(2\sqrt{ut}) du. \end{aligned}$$

Далее, используем рекуррентные соотношения для $q_k = q_k(a_1, \dots, a_k)$

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = a_1, \quad p_0 = 0, \quad p_1 = 1, \quad (10)$$

и второй экспоненциальный интеграл Вебера (см. [8; с. 395]):

$$\int_0^\infty I_1(2\sqrt{xt}) J_1(2\sqrt{ty}) e^{-zt} dt = \frac{\exp\{(x-y)/z\}}{z} J_1\left(\frac{2\sqrt{xy}}{z}\right) \quad (11)$$

для вычисления внутреннего интеграла, что приводит (9) к

$$= \frac{h(t)}{\sqrt{st}} \sum_{a_1, \dots, a_{2n}=1}^{\infty} \frac{1}{q_{2n}} \exp\left\{\left[-\frac{p_{2n-1}q_{2n} - 1}{q_{2n}q_{2n-1}}\right] s - \frac{q_{2n-1}}{q_{2n}} t\right\} J_1\left(\frac{2\sqrt{st}}{q_{2n}}\right).$$

Наконец, применяя к полученному выражению следствие (10), имеем

$$p_{2k-1} q_{2k} - p_{2k} q_{2k-1} = 1, \quad (12)$$

получаем справедливость (7) для K_{2n+1} .

Проверка (7) для K_{2n} в предположении справедливости (7) для K_{2n-1} производится аналогично, только вместо (12) применяем

$$p_{2k-2} q_{2k-1} - p_{2k-1} q_{2k-2} = -1,$$

а второй экспоненциальный интеграл Вебера (11) используем в виде

$$\int_0^\infty J_1(2\sqrt{xt}) J_1(2\sqrt{ty}) e^{-zt} dt = \frac{\exp\{-(x+y)/z\}}{z} I_1\left(\frac{2\sqrt{xy}}{z}\right).$$

Формулы (7) для повторных ядер доказаны.

Утверждение 2) теоремы следует непосредственным применением к (7) и (6) интегралов Липшица–Ханкеля для функций Бесселя (см. [8; с. 386]):

$$\int_0^\infty e^{-st} a J_1(at) dt = \frac{\sqrt{s^2 + a^2} - s}{\sqrt{s^2 + a^2}}, \quad \int_0^\infty e^{-st} a I_1(at) dt = \frac{s - \sqrt{s^2 - a^2}}{\sqrt{s^2 - a^2}}.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Я. Хинчин, *Ценные дроби*, Наука, М., 1978. [2] В. И. Арнольд, *Ценные дроби*, МЦНМО, М., 2000. [3] R. Kuzmin, *Atti Congr. Intern. Bologne*, **6** (1928), 83–89. [4] E. Wirsing, *Acta Arith.*, **24** (1974), 507–528. [5] К. И. Бабенко, С. П. Юрьев, *Об одной задаче Гаусса*, Препринты ИПМ № 63, 1977. [6] К. И. Бабенко, *Докл. АН СССР*, **238**:5 (1978), 1021–1024. [7] С. Г. Михлин, *Лекции по интегральным уравнениям*, Физматгиз, М., 1959. [8] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1922.

А. И. Аптекарев

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва
E-mail: aptekaa@keldysh.ru

Поступило

06.05.2013

В. С. Буяров

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: buyarov@yahoo.com