Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Беляев, Сингулярные возмущения степеней оператора Лапласа на торе, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 4, 632–636

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10323>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 11:43:32

Сингулярные возмущения степеней оператора Лапласа на торе

А. А. Беляев

В работе изучаются возмущения степеней оператора Лапласа, заданного на торе. В качестве возмущений выступают сингулярные обобщенные функции, точнее, распределения из пространств мультипликаторов для пространств бесселевых потенциалов.

Основная цель – перенести полученные в [1], [2] для случая $\mathbb{R}^n$ теоремы вложения пространств бесселевых потенциалов в пространства мультипликаторов на случай тора $\mathbb{T}^n$ и применить абстрактную теорию возмущений для полуограниченных самосопряженных операторов для изучения сингулярных возмущений степеней оператора Лапласа на торе. Мы устанавливаем секториальность и, в случае вещественного потенциала, самосопряженность и ограниченность снизу сингулярно возмущенного оператора (теорема 4). Доказываем равномерную резольвентную сходимость последовательности операторов с потенциалами q_m к оператору с потенциалом q , когда $q_m \rightarrow q$ в пространстве мультипликаторов $M_\pi[\alpha, -\alpha]$ (теорема 5). Получаем полноту в $L_2(\mathbb{T}^n)$ системы собственных и присоединенных функций возмущенного оператора и находим асимптотику считающей функции его собственных значений (теорема 6). Ранее для случая $n = 1$ похожие результаты другим методом были получены в работе [3].

1. Возмущения самосопряженного полуограниченного оператора. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, а $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – линейный самосопряженный равномерно положительный оператор. Тогда при $\alpha \in \mathbb{R}$ определены степени T^α , которые являются также самосопряженными положительными операторами (при $\alpha \geq 0$ – равномерно положительными), причем семейство T^α обладает полугрупповым свойством. Положим

$$\mathcal{H}_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}(T^{\theta/2}) \quad \forall \theta \geq 0.$$

Заметим, что $T^{\alpha/2}(\mathcal{H}_\theta) = \mathcal{H}_{\theta-\alpha}$ при $0 \leq \alpha \leq \theta$, пространство $\mathcal{H}_\theta$ является гильбертовым относительно скалярного произведения $\langle x, y \rangle_\theta = \langle T^{\theta/2}x, T^{\theta/2}y \rangle_{\mathcal{H}}$ и имеет место непрерывное вложение $(\mathcal{H}_s, \|\cdot\|_s) \subset (\mathcal{H}_t, \|\cdot\|_t)$ при $s \geq t \geq 0$. При $\theta < 0$ определим пространство $\mathcal{H}_\theta$ как пополнение пространства $\mathcal{H}$ по норме $\|x\|_\theta = \|T^{\theta/2}x\|_{\mathcal{H}}$. Дуальное скалярное произведение на $\mathcal{H}_{-1} \times \mathcal{H}_1$ определим равенством

$$\langle x, y \rangle_D = \langle T^{-1/2}x, T^{1/2}y \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall x \in \mathcal{H}_{-1} \quad \forall y \in \mathcal{H}_1,$$

где под $T^{-1/2}$ понимаем продолжение оператора $T^{-1/2}: (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{-1}) \rightarrow (\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ до изометрии из $\mathcal{H}_{-1}$ на $\mathcal{H}$.

Назовем оператор $Q: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$ симметричным, если вещественная форма $\langle Q(v), v \rangle_D$. Если область определения $\mathcal{D}(Q)$ плотна в $\mathcal{H}_1$, то с помощью дуального скалярного произведения определен сопряженный оператор $Q^*: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$. Определенный на всем пространстве $\mathcal{H}_1$ симметрический оператор оказывается самосопряженным.

Продолжим изометрический оператор $T: (\mathcal{H}_2, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{-1})$ до всюду определенного изометрического оператора $\mathbf{T}: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{T}u, v \rangle_D &= \langle T^{1/2}u, T^{1/2}v \rangle_{\mathcal{H}} & \forall u, v \in \mathcal{H}_1, \\ \langle \mathbf{T}u, u \rangle_D &= (\|u\|_1)^2 > 0 & \forall u \neq 0, u \in \mathcal{H}_1, \end{aligned}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-0705).

DOI: 10.4213/mzm10323

и оператор $\mathbf{T}$ самосопряжен. Приведем в удобном для дальнейшего применения модификации теорем о возмущениях самосопряженного оператора $\mathbf{T}$ (см. теоремы VI.1.33, VI.2.1 и VI.2.6 из монографии [4]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть линейный оператор $Q: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$ определен на всем пространстве $\mathcal{H}_1$ и подчинен оператору $\mathbf{T}: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$ в смысле форм с $\mathbf{T}$ -гранью $\alpha < 1$, т.е.

$$|\langle Qv, v \rangle_D| \leq \alpha \cdot \langle \mathbf{T}v, v \rangle_D + \beta \cdot (\|v\|_{\mathcal{H}})^2 \quad \forall v \in \mathcal{H}_1$$

при некотором $\beta > 0$. Тогда квадратичная форма

$$(t + q)(v) \stackrel{\text{def}}{=} \langle (\mathbf{T} + Q)v, v \rangle_D$$

с областью определения $\mathcal{D}(t + q) = \mathcal{H}_1$ замкнута и секториальна в $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$. Если оператор Q , к тому же, симметричен, то квадратичная форма $t + q$ полуограничена снизу относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть линейный оператор $Q: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$ определен на всем $\mathcal{H}_1$ и подчинен оператору $\mathbf{T}$ в смысле форм с $\mathbf{T}$ -гранью $\alpha < 1$. Тогда сужение $\mathbf{T} \tilde{+} Q$ оператора $\mathbf{T} + Q$ на пространство $\mathcal{D}(\mathbf{T} \tilde{+} Q) = \{v \in \mathcal{H}_1 \mid (\mathbf{T} + Q)v \in \mathcal{H}\}$ является секториальным оператором в $\mathcal{H}$. Если при этом Q симметричен, то $\mathbf{T} \tilde{+} Q$ самосопряжен в $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$.

Вопрос о равномерной резольвентной сходимости операторов $\mathbf{T} \tilde{+} Q_n$ к оператору $\mathbf{T} \tilde{+} Q$ исследован в [1] и [2], где, в частности, доказано следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $Q: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$ и $Q_m: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$ – всюду определенные на $\mathcal{H}_1$ линейные операторы, Q – $\mathbf{T}$ -подчинен с $\mathbf{T}$ -гранью $\alpha < 1$ и $Q_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} Q$ по норме пространства $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_{-1})$ ограниченных операторов из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Тогда имеет место равномерная резольвентная сходимость

$$\mathbf{T} \tilde{+} Q_m \xrightarrow{R} \mathbf{T} \tilde{+} Q.$$

2. Оператор Лапласа и пространства мультипликаторов на торе. Пусть S^1 – единичная окружность, $\mathbb{T}^n = \{(z_1, \dots, z_n) \mid z_j \in S^1 \ \forall j = 1, \dots, n\}$ – n -мерный тор и Δ – оператор Лапласа на $\mathbb{T}^n$ с областью определения $\mathcal{D}(\Delta) = C^2(\mathbb{T}^n) \subset L^2(\mathbb{T}^n)$. Известно, что оператор $-\Delta$ симметричен и неотрицателен в $L^2(\mathbb{T}^n)$. Обозначим через $D(\mathbb{T}^n)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{T}^n$. Функцию $f \in D(\mathbb{T}^n)$ естественным образом отождествим с единственной функцией $\Pi(f) \in C_{\pi}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, где $C_{\pi}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ – пространство бесконечно гладких 2π -периодических функций на $\mathbb{R}^n$. Функции

$$f_k = \Pi^{-1}(g_k) \in D(\mathbb{T}^n), \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad \text{где} \quad g_k(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-i\langle k, x \rangle} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

образуют в $L_2(\mathbb{T}^n)$ ортонормированный базис собственных функций оператора Δ с собственными числами $\lambda_k = -|k|^2$.

Дадим определение пространства бesselевых потенциалов на торе, которое будем обозначать через $H_p^{\alpha}(\mathbb{T}^n)$. Обозначим через P_{α} оператор умножения на функцию $p_{\alpha}(y) = (1 + |y|^2)^{\alpha/2}$, а через $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ – прямое и обратное преобразование Фурье. Рассмотрим оператор

$$J_{\alpha} = \mathcal{F}^{-1} \circ P_{\alpha} \circ \mathcal{F}: S'(\mathbb{R}^n) \rightarrow S'(\mathbb{R}^n),$$

где $S'(\mathbb{R}^n)$ – пространство умеренно растущих распределений (на котором корректно определено преобразование Фурье). Несложно показать, что оператор J_{α} отображает пространство $C_{\pi}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ на себя. Поэтому корректно определен оператор

$$J_{\alpha, \pi} \stackrel{\text{def}}{=} \Pi^{-1} \circ J_{\alpha} \circ \Pi: D(\mathbb{T}^n) \rightarrow D(\mathbb{T}^n).$$

Этот оператор можно естественно продолжить на пространство распределений $D'(\mathbb{T}^n)$, т.е. пространство линейных непрерывных функционалов на $D(\mathbb{T}^n)$. Такое продолжение

реализуется формулой $J_{\alpha,\pi}(u)(f) \stackrel{\text{def}}{=} u(J_{\alpha,\pi}(f))$, где u – произвольный фиксированный элемент из $D'(\mathbb{T}^n)$, а f пробегает все пространство $D(\mathbb{T}^n)$.

Пространство $L_1(\mathbb{T}^n)$ естественным образом вложено в $D'(\mathbb{T}^n)$, при этом функции $f \in L_1(\mathbb{T}^n)$ порождают регулярные функционалы, для которых мы будем сохранять обозначение f . Теперь при $p \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ положим

$$H_p^\alpha(\mathbb{T}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in D'(\mathbb{T}^n) \mid J_{\alpha,\pi}(u) \in L_p(\mathbb{T}^n)\} \quad \text{и} \quad \|f\|_{H_p^\alpha(\mathbb{T}^n)} \stackrel{\text{def}}{=} \|J_{\alpha,\pi}(f)\|_{L_p(\mathbb{T}^n)}.$$

Из определения следует, что $H_p^0(\mathbb{T}^n) = L_p(\mathbb{T}^n)$. Отметим, что пространства $H_p^\alpha(\mathbb{T}^n)$ можно определить по-другому (см. [5; пункт 4.11.1]). Для этого используется тот факт, что функции

$$g_k(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-i\langle k, x \rangle}, \quad k \in \mathbb{Z}^n,$$

образуют базис в пространстве $C_\pi^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $c_k(J_{\alpha,\pi}(f)) = (1 + |k|^2)^{\alpha/2} c_k(f)$, где через $c_k(g)$ обозначены коэффициенты Фурье функции g . Отметим также, что при целых $m \geq 0$ пространство $H_2^m(\mathbb{T}^n)$ совпадает с пространством Соболева $W_2^m(\mathbb{T}^n)$, причем их нормы эквивалентны.

Поскольку при $\alpha \geq 0$ сужение оператора $J_{\alpha,\pi}$ на $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$ является самосопряженным оператором в $L_2(\mathbb{R}^n)$ и $(I - \Delta)f = J_{2,\pi}f$, $f \in D(\mathbb{T}^n)$, где I – тождественный оператор, то оператор $L_0 = -\Delta$ в $L_2(\mathbb{T}^n)$ с областью определения $C^2(\mathbb{T}^n)$ имеет самосопряженное замыкание L , область определения которого $\mathcal{D}(L)$ совпадает с $H_2^2(\mathbb{T}^n) \subset L_2(\mathbb{T}^n)$. Далее под $-\Delta$ мы будем понимать именно оператор L .

Определим при $\alpha \geq 0$ оператор $(-\Delta)^\alpha$ с областью определения $H_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n)$, полагая

$$(-\Delta)^\alpha(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |k|^{2\alpha} c_k(f) f_k, \quad f \in H_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n),$$

где $c_k(f)$ – коэффициенты Фурье функции f .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. При $\alpha \geq 0$ оператор $T_\alpha = I + (-\Delta)^\alpha$ с областью определения $\mathcal{D}(T_\alpha) = H_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n)$ самосопряжен и равномерно положителен в $L_2(\mathbb{T}^n)$.

Следовательно, в соответствии с изложенным в п. 1 для оператора T_α определена шкала пространств $\mathcal{H}_{\theta,\alpha} = \mathcal{D}((T_\alpha)^{\theta/2})$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha > 0$. Тогда для любого $\theta \geq 0$ пространства $\mathcal{H}_{\theta,\alpha}$ и $H_2^{\theta\alpha}(\mathbb{T}^n)$ совпадают и их нормы эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на оценках норм через коэффициенты Фурье.

Пусть $r \in (0, \pi)$, $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\}$,

$$\mathcal{U} = \{U_j = \pi(B_r(x_j)) \mid x_j \in \mathbb{R}^n, j = 1, \dots, N\}$$

– конечное открытое покрытие тора $\mathbb{T}^n$ (здесь π – естественное отображение $\mathbb{R}^n$ на тор $\mathbb{T}^n$) и $\psi = \{\psi_j \mid j = 1, \dots, N\}$ – подчиненное этому покрытию гладкое разбиение единицы. Для $f \in D(U_j)$ положим

$$f_{U_j}(x) = (\Pi(f))(x) \quad \text{при} \quad x \in B_r(x_j) \quad \text{и} \quad f_{U_j}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus B_r(x_j).$$

Введем в $H_p^\alpha(\mathbb{T}^n)$ новую норму

$$\|f\|_{\alpha,p,\psi} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1,\dots,N} \|(\psi_j f)_{U_j}\|_{H_p^\alpha(\mathbb{R}^n)} \quad \forall f \in H_p^\alpha(\mathbb{T}^n).$$

ТЕОРЕМА 2. Нормы $\|\cdot\|_{\alpha,p,\psi}$ и $\|\cdot\|_{H_p^\alpha(\mathbb{T}^n)}$ эквивалентны на $H_p^\alpha(\mathbb{T}^n)$.

Доказательство использует эквивалентные нормы на $H_p^\alpha(\mathbb{R}^n)$, вводимые с помощью обратного преобразования Фурье функции $(1 + |y|^2)^{\alpha/2}$ (см. [6], [7]).

Далее норму в пространстве $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$ для краткости будем обозначать через $\|\cdot\|_\alpha$. Распределение $q \in D'(\mathbb{T}^n)$ назовем *мультипликатором* из пространства $H_2^k(\mathbb{T}^n)$ в $H_2^{-l}(\mathbb{T}^n)$ (предполагая, что k и l неотрицательны), если найдется постоянная $C > 0$ такая, что для всех $f \in D(\mathbb{T}^n)$ выполняется оценка $\|fq\|_{-l} \leq C\|f\|_k$. В этом случае оператор умножения $M_q f = fq$ продолжается по непрерывности как ограниченный оператор из пространства $H_2^k(\mathbb{T}^n)$ в пространство $H_2^{-l}(\mathbb{T}^n)$. Множество таких мультипликаторов образуют линейное нормированное пространство, если в качестве нормы элемента q взять норму ограниченного оператора M_q . Пространство таких мультипликаторов обозначим через $M[k, -l]$. Справедлива важная

ЛЕММА 1. 1) При $k > n/2$, $0 \leq l \leq k$ верна мультипликативная оценка

$$\|fg\|_l \leq C_{k,l} \|f\|_k \|g\|_l \quad \forall f, g \in D(\mathbb{T}^n).$$

2) При $0 \leq l \leq k \leq n/2$, при любом $\varepsilon > 0$ верна мультипликативная оценка

$$\|fg\|_{l-\varepsilon} \leq C_{k,l,\varepsilon} \|f\|_k \|g\|_l \quad \forall f, g \in D(\mathbb{T}^n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО использует теорему 2 и аналогичные оценки в $\mathbb{R}^n$ из [2].

ТЕОРЕМА 3. а) При $k > n/2$, $0 \leq l \leq k$ справедливо равенство

$$H_2^{-l}(\mathbb{T}^n) = M[k, -l]_\pi$$

и нормы соответствующих пространств эквивалентны.

б) При $k \leq n/2$, $0 \leq l \leq k$ при любом $\varepsilon > 0$ справедливо непрерывное вложение

$$H_{n/k}^{-l+\varepsilon}(\mathbb{T}^n) \subset M[k, -l]_\pi.$$

Доказательство опирается на лемму 1 и тот факт, что $1 \in H_2^k(\mathbb{T}^n)$ и, следовательно,

$$M_u(1) = u \in H_2^{-l}(\mathbb{T}^n) \quad \forall u \in M[k, -l]_\pi.$$

3. Основные теоремы. Далее $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{T}^n)$, $\mathcal{H}_\theta = \mathcal{H}_{\theta,\alpha} = H_2^{\theta\alpha}(\mathbb{T}^n)$ при $\theta \geq 0$ (в частности, $\mathcal{H}_1 = H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{H}_{-1} = H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$), $T_\alpha = I + (-\Delta)^\alpha: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ и $\mathbf{T} = \mathbf{T}_\alpha: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$ — оператор, соответствующий оператору T_α .

Доказательства теорем 4 и 5 опираются на теорему 3 и применение абстрактных утверждений 1–3 в описанной выше ситуации.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $q \in M[\alpha, -\alpha]_\pi$ и оператор $Q = M_q: H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \rightarrow H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ подчинен оператору $\mathbf{T}$ в смысле форм с $\mathbf{T}$ -гранью $b < 1$. Тогда оператор

$$S = (-\Delta)^\alpha + Q: H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \rightarrow H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$$

определен на $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$, а его сужение $L = (-\Delta)^\alpha \upharpoonright Q$ на

$$\mathcal{D}(L) = \{u \in H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \mid S(u) \in L_2(\mathbb{T}^n)\}$$

является секториальным оператором в $L_2(\mathbb{T}^n)$. Если Q симметричен, то L самосопряжен и полуограничен снизу в $L_2(\mathbb{T}^n)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\alpha > n/2$, $q \in H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ или $0 < \alpha \leq n/2$, $\varepsilon > 0$ и $q \in H_{n/\alpha}^{-\alpha+\varepsilon}(\mathbb{T}^n)$. Тогда $q \in M[\alpha, -\alpha]_\pi$ и верно утверждение теоремы 4.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены условия теоремы 4 и последовательность q_m сходится к q по норме пространства $M[\alpha, -\alpha]_\pi$. Тогда найдется $m_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при $m \geq m_0$ корректно определены операторы

$$L_m = (-\Delta)^\alpha \widetilde{+} Q_m, \quad \text{где } Q_m = M_{q_m}: H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \rightarrow H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n),$$

и выполнено

$$L_m \xrightarrow{R} L \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Пусть $N(r, A)$ – сумма кратностей всех собственных значений $\lambda \in D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\} \subset \mathbb{C}$ оператора A .

ТЕОРЕМА 6. Пусть $q \in M[\alpha, -\alpha]_\pi$ и оператор

$$Q = M_q: H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \rightarrow H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$$

компактен. Тогда

1) оператор

$$L = (-\Delta)^\alpha \widetilde{+} Q: L_2(\mathbb{T}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^n)$$

имеет компактную резольвенту;

2) система его собственных и присоединенных функций полна в $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{T}^n)$;

3) при $r \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$N(r, L) \sim N(r, (-\Delta)^\alpha) \sim C_\alpha r^{n/(2\alpha)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО использует теоремы Келдыша–Маркуса–Мацаева [8; теоремы 4.2, 4.3, 8.2].

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены условия следствия теоремы 4. Тогда справедливо утверждение теоремы 6.

Автор выражает глубокую благодарность проф. А. А. Шкаликову за постановку задач и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. И. Нейман-Заде, А. А. Шкаликов, *Матем. заметки*, **66**:5 (1999), 723–733.
- [2] M. I. Neiman-Zade, A. A. Shkalikov, *Russian J. Math. Phys.*, **13**:1 (2006), 70–78.
- [3] В. А. Михайлец, В. Н. Молибога, *Матем. заметки*, **91**:4 (2012), 629–632. [4] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972. [5] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.
- [6] О. В. Бесов, Тр. МИАН СССР, **60**, Изд-во АН СССР, М., 1961, 42–81. [7] R. S. Strichartz, *J. Math. Mech.*, **16** (1967), 1031–1060. [8] А. С. Маркус, *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков*, Штиинца, Кишинев, 1986.

А. А. Беляев

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: alexei.a.belyaev@gmail.com

Поступило

20.04.2012