Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Воротников, Ю. Г. Мартышенко, Об устойчивости по части переменных “частичных” положений равновесия систем с последствием, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 4, 496–503

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10326>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 16:50:23

Об устойчивости по части переменных “частичных” положений равновесия систем с последствием

В. И. Воротников, Ю. Г. Мартышенко

Для нелинейных нестационарных систем функционально-дифференциальных уравнений с последствием рассматривается задача устойчивости по части переменных “частичного” (нулевого по некоторой заданной части координат фазового вектора) положения равновесия. Вводятся понятия устойчивости по части переменных, предполагающее более общие, в сравнении с известными, допущения относительно значений супремум-нормы тех компонент начальной вектор-функции, которые соответствуют переменным, не определяющим данное положение равновесия. Получены условия устойчивости и асимптотической устойчивости указанного типа в контексте метода функционалов Ляпунова–Красовского, обобщающие ряд известных результатов.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm10326

Пусть $\tau > 0$ – заданное действительное число, $\mathbb{R}^n$ – линейное действительное пространство n -мерных векторов $\mathbf{x}$ с нормой $|\mathbf{x}| = \max |x_i|$ (x_i – i -я компонента вектора $\mathbf{x}$), C – банахово пространство непрерывных функций $\varphi: [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ со стандартной супремум-нормой $\|\varphi\| = \sup |\varphi(\theta)|$, $\theta \in [-\tau, 0]$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Если $t_0, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\beta > t_0$, то для непрерывной функции $\mathbf{x}: [t_0 - \tau, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ определим функцию $\mathbf{x}_t \in C$ соотношением $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$; под $\mathbf{x}'(t)$ будем понимать правостороннюю производную.

Наряду с супремум-нормой также будет использоваться L_2 -норма [1]–[3]

$$\|\|\varphi\|\| = \left(\int_{-\tau}^0 \sum_{i=1}^n \varphi_i^2(\theta) d\theta \right)^{1/2},$$

где φ_i – i -я компонента вектор-функции φ .

Сделаем разбиение $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^T, \mathbf{z}^T)^T$ (T – знак транспонирования), где $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n-m}$, $1 \leq m \leq n$. В соответствии с этим разбиением положим $C = C^{\mathbf{y}} \times C^{\mathbf{z}}$, где $C^{\mathbf{y}}$ и $C^{\mathbf{z}}$ – банаховы пространства непрерывных функций $\varphi_{\mathbf{y}}: [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $\varphi_{\mathbf{z}}: [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ с нормами $\|\varphi_{\mathbf{y}}\| = \sup |\varphi_{\mathbf{y}}(\theta)|$ и $\|\varphi_{\mathbf{z}}\| = \sup |\varphi_{\mathbf{z}}(\theta)|$, $\theta \in [-\tau, 0]$. Для $\varphi \in C$ имеем

$$\varphi = (\varphi_{\mathbf{y}}^T, \varphi_{\mathbf{z}}^T)^T \quad \text{и} \quad \|\varphi\| = \max(\|\varphi_{\mathbf{y}}\|, \|\varphi_{\mathbf{z}}\|).$$

1. Рассматриваемый класс систем. Рассмотрим нелинейную нестационарную систему функционально-дифференциальных уравнений с последействием [1]–[3]

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_t),$$

которую с учетом указанных разбиений представим в виде

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{Y}(t, \mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t), \quad \mathbf{z}'(t) = \mathbf{Z}(t, \mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t). \quad (1.1)$$

В пространстве C рассмотрим множество

$$M = \{\varphi \in C : \varphi_{\mathbf{y}} = \mathbf{0}\}.$$

Если $\mathbf{Y}(t, \varphi) \equiv \mathbf{0}$ при $\varphi \in M$, то решение $\mathbf{x}(t_0, \varphi)$ системы (1.1) удовлетворяет условию $\|\mathbf{y}_t(t_0, \varphi)\| \equiv 0$. Другими словами, $M = \{\mathbf{x} : \mathbf{y} = \mathbf{0}\}$ есть “частичное” положение равновесия системы (1.1).

Имея в виду рассмотрение задачи устойчивости по части переменных “частичного” положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, допустим, что $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T)^T$. Соответственно, компоненту $\varphi_{\mathbf{y}}$ вектор-функции φ также разобьем на две части и представим ее в виде $\varphi_{\mathbf{y}} = (\varphi_{\mathbf{y}_1}^T, \varphi_{\mathbf{y}_2}^T)^T$.

Предположим, что оператор $\mathbf{X} : \mathbb{R}_+ \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяющий правую часть системы (1.1), вполне непрерывен в области

$$G = \mathbb{R}_+ \times C_h^{\mathbf{y}_1} \times C^{\mathbf{y}_2} \times C^{\mathbf{z}} = \{t \geq 0, \|\varphi_{\mathbf{y}_1}\| < h, \|\varphi_{\mathbf{y}_2}\| + \|\varphi_{\mathbf{z}}\| < \infty\}, \quad (1.2)$$

$$\|\varphi_{\mathbf{y}_1}\| = \sup |\varphi_{\mathbf{y}_1}(\theta)|, \quad \|\varphi_{\mathbf{y}_2}\| = \sup |\varphi_{\mathbf{y}_2}(\theta)|, \quad \theta \in [-\tau, 0],$$

и на каждом компактном подмножестве K из области (1.2) выполняется условие Коши–Липшица: существует постоянная $L = L(K)$ такая, что для любых $(t, \varphi_1), (t, \varphi_2) \in K$ выполняется неравенство

$$|\mathbf{X}(t, \varphi_2) - \mathbf{X}(t, \varphi_1)| \leq L \|\varphi_2 - \varphi_1\|.$$

Тогда [2] для каждой точки t_0, φ из области (1.2) существует единственное решение $\mathbf{x}(t_0, \varphi)$ системы (1.1), продолжимое до границы области $C_h^{\mathbf{y}_1} \times C^{\mathbf{y}_2} \times C^{\mathbf{z}}$ и непрерывно зависящее от t_0, φ , а “частичное” положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ является инвариантным множеством данной системы.

Следуя [3], обозначим $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, t_0, \varphi)$ значение $\mathbf{x}(t_0, \varphi)$ в момент времени t . Существует $\beta > t_0$ такое, что $\mathbf{x}(t)$ непрерывна при $t \in [t_0 - \tau, \beta)$, непрерывно дифференцируема при $t \in [t_0, \beta)$ (в момент времени $t = t_0$ – справа) и удовлетворяет при $t \in (t_0, \beta)$ системе (1.1), а при $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ – начальному условию $\mathbf{x}_{t_0}(t_0, \varphi) = \varphi$. В момент $t = t_0$ будем полагать, что справедливо равенство $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{X}(t_0, \varphi)$.

Если

$$|\mathbf{y}_1(t, t_0, \varphi)| \leq h_1 < h, \quad |\mathbf{y}_2(t, t_0, \varphi)| + |\mathbf{z}(t, t_0, \varphi)| \leq H < \infty \quad \text{при всех } t \geq t_0,$$

то $\beta = +\infty$ и соответствующие функции $\mathbf{x}(t, t_0, \varphi)$ определены при всех $t \geq t_0$. Однако при исследовании устойчивости по части переменных (по $\mathbf{y}_1$) “частичного” положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1.1) условие

$$|\mathbf{y}_2(t, t_0, \varphi)| + |\mathbf{z}(t, t_0, \varphi)| \leq H < \infty \quad \text{при всех } t \geq t_0$$

является излишне ограничительным.

С другой стороны, аналогично [2] (см. также [4]) можно обосновать следующее утверждение: если $\mathbf{Y}(t, \varphi_{y_1}, \varphi_{y_2}, \varphi_z)$ для каждого ограниченного замкнутого подмножества S из $\mathbb{R}_+ \times C_h^{y_1}$ отображает множество $S \times C^{y_2} \times C^z$ в ограниченное множество (в $\mathbb{R}^n$), то неравенство $|\mathbf{y}_1(t, t_0, \varphi)| \leq h_1 < h$ означает, что $\mathbf{y}_1$ -компоненты соответствующих решений системы (1.1) определены при всех $t \geq t_0$. При этом $(\mathbf{y}_2, \mathbf{z})$ -компоненты решений могут быть определены только на конечном интервале времени $t \in [t_0 - \tau, \beta)$, $\beta < +\infty$, и

$$|\mathbf{y}_2(t, t_0, \varphi)| + |\mathbf{z}(t, t_0, \varphi)| \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \beta.$$

В результате при исследовании устойчивости по части переменных (по $\mathbf{y}_1$) “частичного” положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1.1) вводится предположение о $(\mathbf{y}_2, \mathbf{z})$ -продолжимости решений [5], [6]: решения системы определены при тех $t \geq t_0$, при которых $|\mathbf{y}_1(t, t_0, \varphi)| < h$. В данном случае, если $|\mathbf{y}_1(t, t_0, \varphi)| \leq h_1 < h$ при всех $t \geq t_0$, то соответствующие функции $\mathbf{x}(t, t_0, \varphi)$ определены при всех $t \geq t_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Понятие $(\mathbf{y}_2, \mathbf{z})$ -продолжимости решений тесно связано с понятием “наблюдаемость неограниченности” (unboundedness observability) [7] для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, анализировавшимся на основе прямого метода Ляпунова. Данное понятие означает, что если «выход» системы ограничен, то решения такой системы определены при всех $t \geq t_0$.

Как и в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений, изучение $(\mathbf{y}_2, \mathbf{z})$ -продолжимости решений системы (1.1) может проводиться как путем анализа структурной формы этой системы, так и на основе прямого метода Ляпунова.

2. Понятия устойчивости по части переменных. Компоненту φ_z вектор-функции φ представим в виде $\varphi_z = (\varphi_{z_1}^T, \varphi_{z_2}^T)^T$ и будем использовать обозначение D_δ – область начальных значений φ такая, что $\|\varphi_y\| < \delta$, $\|\varphi_{z_1}\| \leq L$, $\|\varphi_{z_2}\| < \infty$; область D_Δ получается заменой δ на Δ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. “Частичное” положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1.1) при больших значениях φ_{z_1} в целом по φ_{z_2} является:

- 1) $\mathbf{y}_1$ -устойчивым, если для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ и любого заданного числа $L > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0, L) > 0$ такое, что из $\varphi \in D_\delta$ следует

$$|\mathbf{y}_1(t, t_0, \varphi)| < \varepsilon \quad \text{при всех } t \geq t_0;$$

- 2) $\mathbf{y}_1$ -устойчивым равномерно по t_0 , если $\delta = \delta(\varepsilon, L)$;
- 3) равномерно асимптотически $\mathbf{y}_1$ -устойчивым, если оно $\mathbf{y}_1$ -устойчиво в смысле п. 2) и найдется $\Delta(L) > 0$ такое, что произвольное решение $\mathbf{x}(t_0, \varphi)$ системы (1.1) с $\varphi \in D_\Delta$ равномерно по t_0 , φ из области $t_0 \geq 0$, $\varphi \in D_\Delta$ удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim |\mathbf{y}_1(t, t_0, \varphi)| = 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}$, $\|\varphi_z\| < \infty$ [8] имеем соответствующие определения устойчивости “частичного” положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1.1). Если $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ ($\varphi_z = \mathbf{0}$), то получаем соответствующие определения устойчивости по всем (если $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}$) [1]–[3] или по части переменных (если $\mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}$) [4], [6], [9]–[11] нулевого положения равновесия.

При отсутствии эффекта последствия аналогичные понятия устойчивости рассмотрены в работах [12], [13]; данные понятия связаны с понятиями устойчивости некомпактных (замкнутых, но неограниченных) множеств [14]–[16].

3. Условия устойчивости по части переменных. Рассмотрим однозначные, непрерывные функционалы $V = V(t, \varphi)$, $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, определенные на любой непрерывной вектор-функции $\varphi: [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ в области (1.2). Подставим в функционал $V(t, \varphi)$ вектор-функцию $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t(t_0, \varphi)$, определяющую элемент траектории в текущий момент времени $t \geq t_0$. В результате получаем значение функционала $V(t, \mathbf{x}_t)$ на решениях системы (1.1). Под производной V -функционала вдоль решений системы (1.1) будем понимать величину [1]–[3]

$$V'(t, \mathbf{x}_t(t_0, \varphi)) = \overline{\lim} \delta^{-1} [V(t + \delta, \mathbf{x}_{t+\delta}) - V(t, \mathbf{x}_t)], \quad \delta \rightarrow 0^+.$$

Если функционал V является локально липшицевым по второму аргументу, то указанный предел определяется единственным образом.

Для получения условий устойчивости указанного выше типа также будем рассматривать:

- 1) непрерывные в области (1.2) вспомогательные функционалы $V^*(t, \varphi_y, \varphi_{z1})$, $V^*(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv 0$;
- 2) непрерывные в области (1.2) (векторные, вообще говоря) функции $\mu = \mu(t, \varphi): \mathbb{R}_+ \times [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^p$ и $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\varphi): [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^l$, $p, l \geq 1$;
- 3) непрерывные, монотонно возрастающие функции $a_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $a_i(0) = 0$ (функции типа Хана [2]).

Определим

$$\|\mu(t, \varphi)\| = \sup |\mu(t, \varphi(\theta))|, \quad \theta \in [-\tau, 0], \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

а также

$$\|\mathbf{w}(\varphi)\| = \sup |\mathbf{w}(\theta)|, \quad \theta \in [-\tau, 0].$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть для системы (1.1) найдется V -функционал, а также непрерывная функция $\mu(t, \varphi)$, $\mu(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ такие, что в области

$$t \geq 0, \quad \|\varphi_{y1}\| + \|\mu(t, \varphi)\| < h_1 < h, \quad \|\varphi_{y2}\| + \|\varphi_z\| < \infty \quad (3.1)$$

выполнены условия

$$V(t, \varphi) \geq a_1(|\varphi_{y1}(0)| + |\mu(t, \varphi(0))|), \quad V'(t, \varphi) \leq 0. \quad (3.2)$$

Тогда при больших значениях φ_{z1} в целом по φ_{z2} “частичное” положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$:

- 1) $\mathbf{y}_1$ -устойчиво, если, кроме того

$$V(t, \varphi) \leq V^*(t, \varphi_y, \varphi_{z1}), \quad V^*(t, \mathbf{0}, \varphi_{z1}) \equiv 0; \quad (3.3)$$

- 2) $\mathbf{y}_1$ -устойчиво равномерно по t_0 , если

$$V(t, \varphi) \leq V^*(\varphi_y, \varphi_{z1}), \quad V^*(\mathbf{0}, \varphi_{z1}) \equiv 0. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ в силу непрерывности функционалов V , V^* , условия $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$ и условий (3.3) можно найти $\delta(\varepsilon, t_0, L) > 0$ такое, что из $\varphi \in D_\delta$ следует $V(t_0, \varphi) < a_1(\varepsilon)$.

Учитывая неравенства (3.2), для произвольного решения $\mathbf{x}(t_0, \varphi)$ системы (1.1) с $\varphi \in D_\delta$ при всех $t \geq t_0$ имеют место соотношения

$$a_1(|\mathbf{y}_1(t, t_0, \varphi)| + |\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x}(t, t_0, \varphi))|) \leq V(t, \mathbf{x}_t(t_0, \varphi)) \leq V(t_0, \varphi) < a_1(\varepsilon).$$

Имея в виду свойства функции $a_1(r)$, получаем

$$|\mathbf{y}_1(t, t_0, \varphi)| < \varepsilon \quad \text{при всех } t \geq t_0.$$

Первая часть теоремы доказана.

При выполнении условий (3.4) для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ в силу непрерывности функционалов V , V^* можно найти такое не зависящее от t_0 число $\delta(\varepsilon, L) > 0$, что из $\varphi \in D_\delta$ следует $V(t_0, \varphi) < a_1(\varepsilon)$. Дальнейшее доказательство проводится аналогично.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для системы (1.1) найдется V -функционал, а также непрерывные функции $\boldsymbol{\mu}(t, \varphi)$, $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, и $\mathbf{w}(\varphi)$, $\mathbf{w}(\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, такие, что в области (3.1) наряду с условиями (3.4) выполнены условия

$$a_1(|\varphi_{\mathbf{y}_1}(0)| + |\boldsymbol{\mu}(t, \varphi(0))|) \leq V(t, \varphi) \leq a_2(|\mathbf{u}(0)|) + a_3(\|\mathbf{u}\|),$$

$$V'(t, \varphi) \leq -a_4(|\mathbf{u}(0)|),$$

$$\mathbf{u} = [\varphi_{\mathbf{y}}^T, \mathbf{w}^T(\varphi)]^T, \quad \mathbf{u}(0) = [\varphi_{\mathbf{y}}^T(0), \mathbf{w}^T(\varphi(0))]^T.$$

Тогда при больших значениях φ_{z_1} в целом по φ_{z_2} "частичное" положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ равномерно асимптотически $\mathbf{y}_1$ -устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равномерная $\mathbf{y}_1$ -устойчивость при больших значениях φ_{z_1} в целом по φ_{z_2} следует из теоремы 1.

Для доказательства равномерной асимптотической $\mathbf{y}_1$ -устойчивости при больших значениях φ_{z_1} в целом по φ_{z_2} покажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $T = T(\varepsilon) > 0$ такое, что $|\mathbf{y}_1(t, t_0, \varphi)| < \varepsilon$ при всех $t > t_0 + T(\varepsilon)$, если $\varphi \in D_\delta$, $t_0 \geq 0$, где δ находится в силу равномерной $\mathbf{y}$ -устойчивости.

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Обозначим

$$\mathbf{u}_t = [\mathbf{y}_t^T(t_0, \varphi), \mathbf{w}^T(\mathbf{x}_t(t_0, \varphi))]^T,$$

$$\mathbf{u}(t) = [\mathbf{y}^T(t, t_0, \varphi), \mathbf{w}^T(\mathbf{x}(t, t_0, \varphi))]^T.$$

Выберем такие $\varepsilon_1 < \varepsilon$ и $\varepsilon_2 < \varepsilon$ что

$$1) \quad a_3(\varepsilon_1) < (1/2)a_1(\varepsilon);$$

$$2) \quad a_3(\|\mathbf{u}_t\|) < (1/2)a_1(\varepsilon), \text{ если } \|\mathbf{u}_t\| < \varepsilon_2.$$

Возможность такого выбора ε_2 обеспечена неравенством $a_3(\|\mathbf{u}_t\|) \leq a_3(\varepsilon_2(l_1\tau)^{1/2})$ при $\|\mathbf{u}_t\| < \varepsilon_2$; $l_1 = m + l$.

Положим $\varepsilon_3 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и покажем, что если $\varphi \in D_\delta$, то существует число $T_1 > \tau$ такое, что неравенство $|\mathbf{u}(t, t_0, \varphi)| \geq \varepsilon_3$ нарушается для некоторого значения t в каждом интервале длины T_1 . В самом деле, поскольку при $\varphi \in D_\delta$ значение $V(t_0, \varphi)$ в силу условий (3.4) ограничено числом $\alpha^*(\delta, L) > 0$, имеем

$$V(t_2, \mathbf{x}_{t_2}) \leq V(t_1, \mathbf{x}_{t_1}) - a_4(\varepsilon_3)(t_2 - t_1) \leq \alpha^* - a_4(\varepsilon_3)(t_2 - t_1),$$

если $|\mathbf{u}(t, t_0, \varphi)| \geq \varepsilon_3$ на интервале $[t_1, t_2]$.

Поэтому при $t = t_2$, $(t_2 - t_1) > \alpha^* a_4^{-1}(\varepsilon_3)$ значение V -функционала является отрицательным, что противоречит условиям теоремы.

В результате существует монотонная последовательность значений $t_n \rightarrow \infty$ такая, что $|\mathbf{u}(t_n, t_0, \varphi)| < \varepsilon_3$. Переходя к подпоследовательности t_k , потребуем, чтобы $t_k + \tau < t_{k+1}$.

Таким образом, если $\varphi \in D_\delta$, то найдется число $T_1(\varepsilon, L) > \tau$ такое, что неравенство $|\mathbf{u}(t_n, t_0, \varphi)| < \varepsilon_3$ имеет место при $t_k \in [t_0 + kT_1, t_0 + (k+1)T_1]$.

Рассмотрим последовательность функций $\mathbf{u}_t$, соответствующую выбранной подпоследовательности t_k . Покажем, что найдется число $N > 0$ такое, что $a_3(\|\mathbf{u}_t\|) < (1/2)a_1(\varepsilon)$ имеет место при $t = t_i$, $1 \leq i \leq N$. Предполагая противное, рассмотрим те значения t_k , для которых $a_3(\|\mathbf{u}_t\|) \geq (1/2)a_1(\varepsilon)$. Используя функцию a_4 против a_2 , можно подобрать (см. [3]) число $N > 0$ такое, что при $k > N$ для значений $t > t_k$ при некотором $\beta > 0$ получаем противоречивые неравенства $0 \leq V(t, \mathbf{x}_t) \leq \alpha^* - (k-1)\beta$.

Тогда при $t \geq t_i$ имеем цепочку соотношений

$$a_1(|\mathbf{y}_1(t, t_0, \varphi)| + |\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x}(t, t_0, \varphi))|) \leq V(t, \mathbf{x}_t) \leq V(t_i, \mathbf{x}_t) \leq a_1(\varepsilon)$$

и, следовательно, $|\mathbf{y}_1(t, t_0, \varphi)| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_i$.

Учитывая, что $t_N < t_0 + 2NT_1$, положим $T = 2NT_1$. Значит, при всех значениях $t > t_0 + T$ справедливо неравенство $|\mathbf{y}_1(t, t_0, \varphi)| < \varepsilon$, если выполняются соотношения $\varphi \in D_\delta$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теоремы 1, 2 являются обобщением соответствующих теорем Кравцовского [1], Бэртонна [3], Румянцева [5], а также соответствующих результатов работ [8], [12], [13]. Для сравнения, в работах [1]–[3] применительно к системе (1.1) рассмотрена задача устойчивости по всем переменным нулевого положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, а в работе [8] при предположениях $\boldsymbol{\mu} \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ и $\|\varphi_y\| < \delta$, $\|\varphi_z\| < \infty$ рассмотрена устойчивость “частичного” положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. При этом условия (3.4) слабее соответствующего условия $V(t, \varphi) \leq a_2(\|\varphi_y\|)$ работы [8]. Данное обстоятельство дает возможность поиска определенного компромисса (за счет выбора разбиения $\varphi_z = (\varphi_{z1}^T, \varphi_{z2}^T)^T$) между содержательным смыслом понятия устойчивости “частичного” положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ и соответствующими требованиями к V -функционалу. В работах [5], [12], [13] при анализе указанных вопросов эффект последствия не учитывался.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Целесообразность анализа $\mathbf{y}_1$ -устойчивости в области (3.1), а не в области

$$t \geq 0, \quad \|\varphi_{y1}\| < h_1 < h, \quad \|\varphi_{y2}\| + \|\varphi_z\| < \infty, \quad (3.5)$$

объясняется тем, что $\mathbf{y}_1$ -устойчивое “частичное” положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1.1) всегда фактически устойчиво не только по $\mathbf{y}_1$, но также и по отношению к некоторым функциям от $u_i = u_i(t, \mathbf{x})$. Поскольку заранее не всегда ясно, какие именно это u_i -функции, то им естественно поставить в соответствие в пространстве $\mathbb{R}_+ \times C$ компоненты некоторой дополнительной векторной $\boldsymbol{\mu}$ -функции Ляпунова для наиболее рациональной замены области (3.5) областью (3.1). Естественно, что сделанное допущение $\|\varphi_{y1}\| + \|\boldsymbol{\mu}(t, \varphi)\| < h_1 < h$ должно подтверждаться в процессе решения, что гарантируется условиями (3.2) теоремы 1.

Такой подход позволяет не только облегчить построение функционалов Ляпунова, но и использовать для доказательства $\mathbf{y}_1$ -устойчивости функционалы, которые могут не быть знакоопределенными ни по $\mathbf{y}_1$ в смысле Румянцева [5] (т.е. усло-

вие $V(t, \varphi) \geq a_1(|\varphi_{y_1}(0)|)$ в области (3.5) может не выполняться), ни по Ляпунову. Кроме того, производная V -функционала в теоремах 1, 2, вообще говоря, будет знакопеременной в области (3.5).

ПРИМЕР. Пусть система (1.1) имеет вид

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -(t+4)y_1(t) + y_1(t-\tau) + y_2^2(t-\tau)z_1(t-\tau), \\ y_2'(t) &= y_2(t)[1 + e^t y_1(t) + y_2^2(t)z_1(t)], \\ z_1'(t) &= -2[2 + e^t y_1(t)]z_1(t), \quad z_2'(t) = e^t y_1(t)z_2(t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Рассмотрим вспомогательные функционал V и функции μ_1, w_1 вида

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= \frac{1}{2}[\varphi_{y_1}^2(0) + \mu_1^2(0)] + \int_{-\tau}^0 \varphi_{y_1}^2(\theta) d\theta + \int_{-\tau}^0 \mu_1^2(\theta) d\theta, \\ \mu_1(\varphi) &= w_1(\varphi) = \varphi_{y_2}^2 \varphi_{z_1}, \quad \mu_1(0) = w_1(0) = \varphi_{y_2}^2(0) \varphi_{z_1}(0), \end{aligned}$$

для которых выполнены условия

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\varphi_{y_1}^2(0) + \mu_1^2(0)] &\leq V(\varphi) \leq b_1(|\mathbf{u}(0)|) + b_2(\|\mathbf{u}\|), \\ V(\varphi) &\leq V^*(\varphi_{y_1}, \varphi_{y_2}, \varphi_{z_1}), \quad V^*(0, 0, \varphi_{z_1}) \equiv 0, \\ \mathbf{u} &= [\varphi_{y_1}, \mu_1(\varphi)], \quad \mathbf{u}(0) = [\varphi_{y_1}(0), \mu_1(0)]. \end{aligned}$$

Производная V -функционала в силу системы (3.6) в области (3.1) оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} V'(t, \varphi) &= -(t+2)\varphi_{y_1}^2(0) + \varphi_{y_1}(0)\mu_1(-\tau) - \mu_1^2(-\tau) \\ &\quad - \varphi_{y_1}^2(0) + \varphi_{y_1}(0)\varphi_{y_1}(-\tau) - \varphi_{y_1}^2(-\tau) - \mu_1^2(0) + 2\mu_1^3(0) \\ &\leq -\gamma[\varphi_{y_1}^2(0) + w_1^2(0)] \leq -\gamma|\mathbf{u}(0)|^2, \quad \gamma = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Система (3.6) допускает представление в виде двух групп уравнений

$$y_1'(t) = -(t+4)y_1(t) + y_1(t-\tau) + \mu_1(t-\tau), \quad \mu_1'(t) = -2\mu_1(t)[1 - \mu_1(t)]$$

и

$$\begin{aligned} y_2'(t) &= [1 + e^t y_1(t) + \mu_1(t)]y_2(t), \quad z_1'(t) = -2[2 + e^t y_1(t)]z_1(t), \\ z_2'(t) &= [e^t y_1(t)]z_2(t), \\ \mu_1(t) &= y_2^2(t)z_1(t), \quad \mu_1(t-\tau) = y_2^2(t-\tau)z_1(t-\tau). \end{aligned}$$

Вторую группу уравнений можно рассматривать как линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, получающуюся после подстановки решений первой группы уравнений во вторую. Известно, что решения такой системы определены при всех $t \geq t_0$, при которых определены и непрерывны ее коэффициенты.

В результате (y_2, z_1, z_2) -компоненты решений системы (3.6) определены при всех $t \geq t_0$, при которых определены компоненты y_1, μ_1 .

Поскольку нулевое положение равновесия $y_1 = \mu_1 = 0$ первой группы уравнений системы (3.6) устойчиво (по y_1, μ_1), то решения системы (3.6), для которых $\varphi \in D_\delta$, определены при всех $t \geq t_0$.

На основании теоремы 2 “частичное” положение равновесия $y_1 = y_2 = 0$ системы (3.6) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво при больших значениях φ_{z_1} в целом по φ_{z_2} .

Отметим, что в области (3.5) производная выбранного V -функционала в силу системы (3.6) является знакопеременной и условия теоремы 2 при $\mu \equiv 0$ не выполняются.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Н. Красовский, *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, Физматгиз, М., 1959.
- [2] J. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Appl. Math. Sci., **3**, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [3] T. A. Burton, "Uniform asymptotic stability in functional differential equations", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **68**:3 (1978), 195–199.
- [4] А. С. Андреев, "Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений", *Автомат. и телемех.*, 2009, № 9, 4–55.
- [5] В. В. Румянцев, А. С. Озиранер, *Устойчивость и стабилизация движения относительно части переменных*, Наука, М., 1987.
- [6] V. I. Vorotnikov, *Partial Stability and Control*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998.
- [7] С. Н. Дашковский, Д. В. Ефимов, Э. Д. Сонтаг, "Устойчивость от входа к состоянию и смежные свойства систем", *Автомат. и телемех.*, 2011, № 8, 3–40.
- [8] S. R. Bernfeld, C. Corduneanu, A. O. Ignatyev, "On the stability of invariant sets of functional differential equations", *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, **55**:6 (2003), 641–656.
- [9] A. O. Ignatyev, "On the partial equiasymptotic stability in functional-differential equations", *J. Math. Anal. Appl.*, **268**:2 (2002), 615–628.
- [10] В. И. Воротников, "Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития", *Автомат. и телемех.*, 2005, № 4, 3–59.
- [11] I. Karafyllis, P. Pepe, Z.-P. Jiang, "Global output stability for systems described by retarded functional differential equations", *European J. Control*, **14**:6 (2008), 516–536.
- [12] В. И. Воротников, "Об устойчивости и устойчивости по части переменных "частичных" положений равновесия нелинейных динамических систем", *Докл. РАН*, **389**:3 (2003), 332–337.
- [13] В. И. Воротников, Ю. Г. Мартышенко, "К теории частичной устойчивости нелинейных динамических систем", *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2010, № 5, 23–31.
- [14] Y. Lin, E. D. Sontag, Y. A. Wang, "A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability", *SIAM J. Control Optim.*, **34**:1 (1996), 124–160.
- [15] C. M. Kellett, A. R. Teel, "Weak converse Lyapunov theorems and control-Lyapunov functions", *SIAM J. Control Optim.*, **42**:6 (2004), 1934–1959.
- [16] Д. В. Ефимов, *Робастное и адаптивное управление нелинейными колебаниями*, Наука, СПб., 2005.

В. И. Воротников

Уральский федеральный университет им. первого
Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург
Нижнетагильский технологический институт
(филиал) УрФУ
E-mail: vorot@ntiustu.ru

Поступило

11.04.2013

Исправленный вариант

13.02.2014

Ю. Г. Мартышенко

Уральский федеральный университет им. первого
Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург
Нижнетагильский технологический институт
(филиал) УрФУ
E-mail: j-mart@mail.ru