Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, Об интерполяции аналитических отображений, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 4, 578–581

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10327>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 18:15:38

Об интерполяции аналитических отображений

А. М. Савчук, А. А. Шкаликов

Пусть (E_0, E_1) и (H_0, H_1) – две пары комплексных банаховых пространств плотно и непрерывно вложенных друг в друга $E_1 \hookrightarrow E_0$ и $H_1 \hookrightarrow H_0$, более того, $\|x\|_{E_0} \leq \|x\|_{E_1}$. Обозначим через $E_\theta = [E_0, E_1]_\theta$ и $H_\theta = [H_0, H_1]_\theta$ пространства, полученные методом комплексной интерполяции при $\theta \in [0, 1]$, а через $B_\theta(0, R)$ – открытый шар радиуса R в пространстве E_θ . Пусть $\Phi: B_0(0, R) \rightarrow H_0$ является аналитическим отображением, отображает $B_1(0, R)$ в H_1 и при $\theta = 0, 1$ справедливы оценки

$$\|\Phi(x)\|_{H_\theta} \leq C_\theta \|x\|_{H_\theta} \quad \text{для всех } x \in B_\theta(0, R).$$

Тогда при всех $\theta \in (0, 1)$ отображение Φ переводит шар $B_\theta(0, r)$ пространства E_θ радиуса $r \in (0, R)$ в H_θ и

$$\|\Phi(x)\|_{H_\theta} \leq C_0^{1-\theta} C_1^\theta \frac{R}{R-r} \|x\|_{E_\theta}, \quad x \in B_\theta(0, r).$$

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm10327

Существенную роль в нашей работе [1], а также в работах [2] и [3], играла теорема об интерполяции нелинейных отображений. В этих работах изучались нелинейные аналитические отображения, связанные с обратными задачами для уравнения Штурма–Лиувилля. Нужные оценки для таких отображений сначала получались для целых значений индекса, а для промежуточных значений выводились с помощью интерполяции. При написании работы [1] мы не знали интерполяционных теорем для нелинейных отображений, но при дополнительном предположении аналитичности нам удалось получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (E_0, E_1) и (H_0, H_1) – две пары комплексных банаховых пространств, причем E_1 плотно вложено в E_0 и $\|x\|_{E_0} \leq \|x\|_{E_1}$, а H_1 плотно и непрерывно вложено в H_0 . Обозначим через $E_\theta = [E_0, E_1]_\theta$ и $H_\theta = [H_0, H_1]_\theta$ – пространства, полученные методом комплексной интерполяции при $\theta \in [0, 1]$, а через $B_\theta(0, R)$ открытый шар радиуса R в пространстве E_θ . Пусть Φ – аналитическое отображение, действующее из шара $B_0(0, R)$ пространства E_0 в H_0 , причем

$$\|\Phi(x)\|_{H_0} \leq C_0(R) \|x\|_{E_0}, \quad x \in B_0(0, R).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00705).

Пусть Φ также действует из шара $B_1(0, R)$ пространства E_1 в H_1 , причем

$$\|\Phi(x)\|_{H_1} \leq C_1(R)\|x\|_{E_1}, \quad x \in B_1(0, R).$$

Тогда при всех $\theta \in [0, 1]$ отображение Φ переводит шар $B_\theta(0, r)$ пространства E_θ радиуса $r \in (0, R)$ в H_θ и

$$\|\Phi(x)\|_{H_\theta} \leq C_0^{1-\theta} C_1^\theta \frac{R}{R-r} \|x\|_{E_\theta}, \quad x \in B_\theta(0, r). \quad (1)$$

Этой теоремы было достаточно для завершения доказательства основной теоремы 6.1 работы [1] (см. §6 этой работы). Но вскоре мы обнаружили работу Тартара [4], которую посчитали пригодной для наших нужд. На основе теорем 1 и 2 работы [4] мы сформулировали в упрощенной форме нужный нам результат. Его формулировка схожа с приведенной выше теоремой 1, но вместо аналитичности отображения Φ в шаре $B_0(0, R)$ требовалась Липшиц-непрерывность, вместо комплексной интерполяции подразумевалась вещественная, а константа в (1) не указывалась. Но формулировка этого результата в [1] была нечеткой, на что обратил наше внимание проф. Т. Каппелер (Т. Karppele), одновременно выразив сомнение в возможности применения результатов [4] к доказательству основной теоремы в [1]. Тогда же мы ему сообщили, что мы имеем независимый подход, основанный на приведенной выше теореме 1, в которой получаются нужные оценки, но при дополнительном предположении аналитичности.

В этой заметке мы не будем обсуждать вопрос о коррекции сформулированной в [1] версии теоремы Тартара. Наша цель – привести доказательство теоремы 1. Отметим, что определение аналитических отображений в банаховых пространствах и основные сведения по этой теме можно получить в книге [5], а сведения по интерполяции банаховых пространств в книгах [6] и [7].

Сначала докажем лемму.

ЛЕММА 2. Пусть (E_0, E_1) и (H_0, H_1) – две пары банаховых пространств с плотными и непрерывными вложениями $E_1 \hookrightarrow E_0$, $H_1 \hookrightarrow H_0$. Обозначим через $E_\theta = [E_0, E_1]_\theta$ и $H_\theta = [H_0, H_1]_\theta$ – пространства, полученные методом комплексной интерполяции при $\theta \in [0, 1]$. Пусть отображение Φ является однородным аналитическим отображением степени k , т.е. $\Phi(\lambda x) = \lambda^k \Phi(x)$, отображает пространство E_0 в H_0 , E_1 в H_1 и удовлетворяет оценкам

$$\|\Phi(x)\|_{H_0} \leq M_0 \|x\|_{E_0}^k$$

и

$$\|\Phi(x)\|_{H_1} \leq M_1 \|x\|_{E_1}^k.$$

Тогда Φ переводит пространство E_θ в H_θ и

$$\|\Phi(x)\|_{H_\theta} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|x\|_{E_\theta}^k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним вначале некоторые сведения из теории комплексной интерполяции банаховых пространств. Пусть f – аналитическая в полосе $\operatorname{Re} z \in (0, 1)$ функция со значениями в пространстве E_0 . Пусть f непрерывна в замкнутой полосе $\operatorname{Re} z \in [0, 1]$, причем значения $f(it)$ при $t \in \mathbb{R}$ лежат в E_0 , а значения $f(1+it)$

при $t \in \mathbb{R}$ лежат в E_1 . Пусть также функции $f(it)$ и $f(1+it)$ непрерывны (в соответствующих пространствах) и стремятся к нулю при $|t| \rightarrow \infty$. Обозначим через $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E_0, E_1)$ пространство таких функций, снабженное нормой

$$\|f\|_{\mathcal{F}} := \max \left\{ \max_{t \in \mathbb{R}} \|f(it)\|_{E_0}, \max_{t \in \mathbb{R}} \|f(1+it)\|_{E_1} \right\}.$$

Пространство $\mathcal{F}$ полно, а интерполяционное пространство E_θ определяется как множество значений $E_\theta = \{f(\theta) : f \in \mathcal{F}\}$ с нормой

$$\|x\|_{E_\theta} := \inf \{ \|f\|_{\mathcal{F}} : f \in \mathcal{F}, f(\theta) = x \}.$$

Приступим к доказательству леммы. Для каждой функции $f \in \mathcal{F}$ определим функцию

$$g_f = g(z) := M_0^{z-1} M_1^{-z} \Phi(f(z))$$

и заметим, что g аналитична в полосе $\operatorname{Re} z \in (0, 1)$ и непрерывна в замкнутой полосе $\operatorname{Re} z \in [0, 1]$ как функция со значениями в H_0 . При $z = it$ имеем $\|g(it)\|_{H_0} \leq \|f(it)\|_{E_0}^k$ и потому $\|g(it)\|_{H_0} \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$. При $z = 1+it$ эта функция принимает значения в пространстве H_1 , причем $\|g(1+it)\|_{H_1} \leq \|f(1+it)\|_{E_1}^k$ и потому $\|g(1+it)\|_{H_1} \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$. Это означает, что $g \in \mathcal{F}(H_0, H_1)$ и $\|g\|_{\mathcal{F}(H_0, H_1)} \leq \|f\|_{\mathcal{F}(E_0, E_1)}^k$. Возьмем теперь вектор $x \in E_\theta$, зафиксируем некоторое малое число $\varepsilon > 0$ и подберем такую функцию $f \in \mathcal{F}(E_0, E_1)$, что

$$\|x\|_{E_\theta} \leq \|f\|_{\mathcal{F}(E_0, E_1)} \leq \|x\|_{E_\theta} + \varepsilon.$$

Тогда $\Phi(x) = \Phi(f(\theta)) = M_0^{1-\theta} M_1^\theta g_f(\theta)$, а значит

$$\|\Phi(x)\|_{H_\theta} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|g_f\|_{\mathcal{F}(H_0, H_1)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{\mathcal{F}(E_0, E_1)}^k \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta (\|x\|_{E_\theta} + \varepsilon)^k.$$

Это и дает желаемый результат, поскольку ε произвольно.

Перейдем теперь к ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ теоремы 1. Разложим отображение Φ в шаре $B_0(0, R)$ в ряд $\Phi(h) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(h)$ (см., например, [5]). Здесь P_n есть однородное отображение степени n , действующее из пространства E_0 в пространство H_0 и определенное формулой Коши

$$P_0 = 0, \quad P_n(h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\rho} \frac{\Phi(\xi h)}{\xi^{n+1}} d\xi,$$

где интеграл не зависит от $\rho \in (0, R/\|h\|)$. Устремив $\rho \rightarrow R/\|h\|$, получим оценку $\|P_n(h)\|_{H_0} \leq C_0(R) R^{1-n} \|h\|_{E_0}^n$. По условию теоремы шар $B_1(0, R)$ вложен в шар $B_0(0, R)$, а значит отображения P_n , в пространстве E_1 суть ограничения на E_1 отображений P_n в пространстве E_0 . Поэтому аналогично получается оценка $\|P_n(h)\|_{H_1} \leq C_1(R) R^{1-n} \|h\|_{E_1}^n$. По лемме отображения P_n переводят векторы $h \in E_\theta$ в пространство H_θ , причем $\|P_n(h)\|_{H_\theta} \leq C_0(R)^{1-\theta} C_1(R)^\theta R^{1-n} \|h\|_{E_\theta}^n$. Тогда отображение Φ , определенное в шаре $B_\theta(0, r)$, $r < R$, рядом

$$\Phi(h) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(h)$$

переводит этот шар в пространство H_θ и

$$\begin{aligned} \|\Phi(h)\|_{H_\theta} &\leq C_0(R)^{1-\theta} C_1(R)^\theta \sum_{n=1}^{\infty} R^{1-n} \|h\|_{E_\theta}^n \\ &\leq C_0(R)^{1-\theta} C_1(R)^\theta \|h\|_{E_\theta} \frac{R}{R - \|h\|_{E_\theta}} \leq C_0^{1-\theta} C_1^\theta \frac{R}{R-r} \|h\|_{E_\theta}. \end{aligned}$$

Тем самым, теорема доказана.

Авторы благодарят проф. Т. Каппелера за дискуссию, вызвавшую появление этой работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “О собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева”, *Матем. заметки*, **80**:6 (2006), 864–884.
- [2] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “О свойствах отображений, связанных с обратными задачами Штурма–Лиувилля”, *Теория функций и нелинейные уравнения в частных производных*, Тр. МИАН, **260**, МАИК, М., 2008, 227–247.
- [3] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость”, *Функци. анализ и его прил.*, **44**:4 (2010), 34–53.
- [4] L. Tartar, “Interpolation non linéaire of régularité”, *J. Funct. Anal.*, **9**:4 (1972), 469–489.
- [5] J. Pöschel, E. Trubowitz, *Inverse Spectral Theory*, Pure Appl. Math., **130**, Academic Press, Boston, MA, 1987.
- [6] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.
- [7] Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980.

А. М. Савчук

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: artem_savchuk@mail.ru

Поступило

19.06.2013

А. А. Шкаликов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: ashkalikov@yahoo.com