Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Чугунов, О представлении вещественных нормальных $(T + H)$ -матриц в случае, когда кососимметричные части обоих слагаемых являются циркулянтами, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 2, 294–305

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10329>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 16:14:44

О представлении вещественных нормальных $(T + H)$ -матриц в случае, когда кососимметричные части обоих слагаемых являются циркулянтами

В. Н. Чугунов

В статье дается описание частного случая нормальных матриц, представимых в виде суммы вещественных – теплицевой и ганкелевой.

Библиография: 5 названий.

DOI: 10.4213/mzm10329

1. Введение. *Теплицевой* называется $(n \times n)$ -матрица T , имеющая вид

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

а *ганкелевой* называется $(n \times n)$ -матрица H вида

$$H = \begin{pmatrix} h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \dots & h_0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \dots & h_{-1} \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \dots & h_{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots & h_{-n+1} \end{pmatrix}.$$

Теплицева матрица (1) называется *циркулянтом*, если

$$t_{-j} = t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

и *косым циркулянтом* при

$$t_{-j} = -t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Ганкелевым циркулянтом S называется матрица, для которой SP_n есть циркулянт, где P_n – перьединичная $(n \times n)$ -матрица

$$P_n = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$

Вещественной нормальной $(T + H)$ -задачей называется задача описания нормальных матриц, представимых в виде суммы вещественных теплицевой и ганкелевой матриц.

Пусть A и B – произвольные вещественные теплицевы $(n \times n)$ -матрицы, а

$$R = A + B\mathcal{P}_n$$

– соответствующая матрица, представляемая в виде суммы вещественных теплицевой и ганкелевой. Записывая для R условие нормальности, получаем

$$(A + B\mathcal{P}_n)(A^t + \mathcal{P}_n B^t) = (A^t + \mathcal{P}_n B^t)(A + B\mathcal{P}_n),$$

или

$$AA^t + A\mathcal{P}_n B^t + B\mathcal{P}_n A^t + BB^t = A^t A + A^t B\mathcal{P}_n + \mathcal{P}_n B^t A + \mathcal{P}_n B^t B\mathcal{P}_n. \quad (2)$$

Будучи персимметричными матрицами, A и B удовлетворяют соотношениям

$$A\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n A^t, \quad B\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n B^t. \quad (3)$$

Используя (3) в (2), имеем

$$AA^t + AB\mathcal{P}_n + BA\mathcal{P}_n + BB^t = A^t A + A^t B\mathcal{P}_n + BA^t \mathcal{P}_n + BB^t,$$

или

$$A^t A - AA^t = [(A - A^t)B + B(A - A^t)]\mathcal{P}_n. \quad (4)$$

На данный момент задача описания вещественных $(T + H)$ -матриц не имеет полного решения, найдены лишь частные классы требуемых матриц.

В работе [5] показано, что решение вещественной нормальной $(T + H)$ -задачи можно разбить на четыре случая, которые сформулируем в терминах матриц A и B :

- 1) матрица A симметрична, тогда для любой матрицы B матрица R – решение рассматриваемой задачи, так как является симметричной матрицей;
- 2) матрицы $(A - A^t)$ и $(B - B^t)$ одновременно представляют собой циркулянты;
- 3) матрицы $(A - A^t)$ и $(B - B^t)$ – одновременно косые циркулянты;
- 4) матрица B симметрична.

Данная работа посвящена подробному разбору второго случая. В статье будет дано полное описание нормальных вещественных $(T + H)$ -матриц, подчиняющихся соответствующему дополнительному набору условий. В п. 2 укажем, как преобразуется в данном случае решаемое уравнение, которое приведем в п. 3 к системе двух матричных уравнений. Далее, в п. 4 сформулируем и докажем несколько вспомогательных утверждений. Главный результат, установленный в п. 5, позволяет получить решение первого уравнения системы. В результате второе уравнение становится достаточно простым, его решению посвящен заключительный пункт.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые вспомогательные свойства и определения.

Из (3) следует, что если T – теплицева кососимметричная матрица, то

$$T\mathcal{P}_n = -\mathcal{P}_n T. \quad (5)$$

Согласно [1], если C – циркулянт, то для него справедливо спектральное разложение вида

$$C = F_n^* D F_n, \quad (6)$$

где $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ – диагональная матрица, F_n – (нормированная) матрица дискретного преобразования Фурье

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \dots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \dots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & \dots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

$\epsilon = \exp(2\pi i/n)$ – первообразный корень n -й степени из единицы.

Пусть Q – матрица вида $Q = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_{n-1}$, I_n – единичная матрица порядка n . Будем говорить, что нижнетреугольная теплицева матрица с первым столбцом

$$(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})^t$$

имеет *уровень* $q \geq 0$, если

$$x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_{q-1} = 0, \quad x_q \neq 0.$$

Вектор x будем называть *нечетным*, если $\mathcal{P}_n x = -x$, и *Q-нечетным*, если $Qx = -x$. Очевидно, что у Q -нечетного вектора первая координата равна нулю. Через e_j обозначим вектор, содержащий единицу только в позиции j и нули во всех остальных.

2. Вывод уравнения. Исследуем решение уравнения (4) в случае, когда матрицы $(A - A^t)$ и $(B - B^t)$ одновременно будут циркулянтами.

Известно, что всякая теплицева матрица однозначно представима в виде суммы циркулянта и косога циркулянта с нулевой диагональю. Запишем

$$A = C_1 + S_1, \quad B = C_2 + S_2, \quad (7)$$

где C_1, C_2 – циркулянты, а S_1, S_2 – косые циркулянты с нулевой диагональю. Тогда условие, что $(A - A^t)$ и $(B - B^t)$ являются циркулянтами, можно записать через матричные соотношения. Действительно,

$$A - A^t = C_1 + S_1 - C_1^t - S_1^t = C_1 - C_1^t + (S_1 - S_1^t).$$

Поэтому условие, что $(A - A^t)$ – циркулянт, эквивалентно равенству

$$S_1 = S_1^t. \quad (8)$$

Аналогично выводится соотношение

$$S_2 = S_2^t. \quad (9)$$

Подставив (7) в (4) и учитывая (8), (9), получим

$$\begin{aligned} & (C_1 + S_1)^t(C_1 + S_1) - (C_1 + S_1)(C_1 + S_1)^t \\ &= [(C_1 - C_1^t)(C_2 + S_2) + (C_2 + S_2)(C_1 - C_1^t)]\mathcal{P}_n, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & C_1^t C_1 + C_1^t S_1 + S_1 C_1 + S_1^2 - C_1 C_1^t - C_1 S_1 - S_1 C_1^t - S_1^2 \\ &= [(C_1 - C_1^t)(C_2 + S_2) + (C_2 + S_2)(C_1 - C_1^t)]\mathcal{P}_n. \end{aligned}$$

Так как циркулянты коммутируют, имеем

$$(C_1^t - C_1)S_1 - S_1(C_1^t - C_1) + (C_1^t - C_1)S_2\mathcal{P}_n + S_2(C_1^t - C_1)\mathcal{P}_n = 2(C_1 - C_1^t)C_2\mathcal{P}_n.$$

Введем циркулянт $C = C_1^t - C_1$, тогда получим

$$CS_1 - S_1C + CS_2\mathcal{P}_n + S_2C\mathcal{P}_n = -2CC_2\mathcal{P}_n.$$

Домножим последнее равенство справа на $\mathcal{P}_n$. Учитывая, что $C\mathcal{P}_n = -\mathcal{P}_nC$ (см. (5)), приходим к условию

$$CS_1\mathcal{P}_n + S_1\mathcal{P}_nC + CS_2 + S_2C = -2CC_2,$$

или

$$(S_2 + S_1\mathcal{P}_n)C + C(S_2 + S_1\mathcal{P}_n) = -2CC_2. \quad (10)$$

Основная задача – решение уравнения (10).

3. Переход от уравнения к системе. Упростить уравнение (10) помогает следующая лемма, которая позволяет перейти к более простой системе.

ЛЕММА 1. Пусть M_1, M_2, M_3 и M_4 – вещественные $(n \times n)$ -матрицы, удовлетворяющие условиям $M_1^t = -M_1$, M_2 – нормальная матрица, матрицы M_1 и M_2 коммутируют. Тогда уравнение

$$(M_3 + M_4\mathcal{P}_n)M_1 + M_1(M_3 + M_4\mathcal{P}_n) = -2M_1M_2 \quad (11)$$

эквивалентно системе

$$\begin{cases} (M_3 + M_4\mathcal{P}_n)M_1 + M_1(M_3 + M_4\mathcal{P}_n) = 0, \\ M_1M_2 = 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Установим лишь необходимость. Достаточность очевидна.

Так как матрицы M_1 и M_2 – нормальные и коммутируют, то они одновременно диагонализуемы (см. [2]), т.е. найдется невырожденная матрица V такая, что

$$M_1 = V^{-1}D_1V, \quad M_2 = V^{-1}D_2V,$$

где

$$D_1 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad D_2 = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n).$$

Обозначим $v_j = V^{-1}e_j$ – j -й столбец матрицы V^{-1} , тогда

$$M_1v_j = V^{-1}D_1VV^{-1}e_j = V^{-1}D_1e_j = \lambda_jV^{-1}e_j = \lambda_jv_j, \quad (12)$$

$$M_2v_j = V^{-1}D_2VV^{-1}e_j = V^{-1}D_2e_j = \mu_jV^{-1}e_j = \mu_jv_j. \quad (13)$$

Перепишем уравнение (11) в виде

$$(M_3 + M_4\mathcal{P}_n)M_1 - M_1^t(M_3 + M_4\mathcal{P}_n) = -2M_1M_2$$

и домножим его слева на v_j^t , а справа – на v_j :

$$v_j^t(M_3 + M_4\mathcal{P}_n)M_1v_j - v_j^tM_1^t(M_3 + M_4\mathcal{P}_n)v_j = 2v_j^tM_1^tM_2v_j,$$

или

$$v_j^t(M_3 + M_4\mathcal{P}_n)M_1v_j - (M_1v_j)^t(M_3 + M_4\mathcal{P}_n)v_j = 2(M_1v_j)^tM_2v_j.$$

С учетом (12) и (13) имеем

$$\lambda_j v_j^t (M_3 + M_4 \mathcal{P}_n) v_j - \lambda_j v_j^t (M_3 + M_4 \mathcal{P}_n) v_j = 2\lambda_j \mu_j v_j^t v_j,$$

откуда следует, что

$$0 = \lambda_j \mu_j.$$

Это верно для $j = 1, 2, \dots, n$. Поэтому $D_1 D_2 = 0$, и значит,

$$M_1 M_2 = V^{-1} D_1 D_2 V = 0.$$

Лемма 1 доказана.

В решаемой задаче $C^t = -C$, циркулянт C_2 – нормальная матрица, поэтому, применяя лемму 1 к уравнению (10), получаем систему

$$\begin{cases} (S_2 + S_1 \mathcal{P}_n)C + C(S_2 + S_1 \mathcal{P}_n) = 0, \\ CC_2 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

4. Вспомогательные леммы. В этом пункте установим справедливость некоторых вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 2. Если C_1 и C_2 – кососимметричные циркулянты, то матрица $C_1 C_2$ – симметрична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $C_1^t = -C_1$, $C_2^t = -C_2$. Имеем

$$(C_1 C_2)^t = C_2^t C_1^t = C_2 C_1 = C_1 C_2$$

в силу того, что циркулянты коммутируют. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Если C_1 и C_2 – циркулянты, то матрица $C_1 \mathcal{P}_n C_2$ симметрична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу того, что произведение циркулянтов является циркулянтом, матрица $C_1 \mathcal{P}_n C_2 = C_1 C_2^t \mathcal{P}_n$ будет ганкелевым циркулянтом, а потому симметричной. Лемма 3 доказана.

Теперь установим справедливость утверждения, которое играет основную роль в представляемом в данной статье результате.

ЛЕММА 4. Пусть L и K – нижнетреугольные теплицевы $(n \times n)$ -матрицы с первыми столбцами

$$l = (0, l_1, l_2, \dots, l_{n-1})^t \quad \text{и} \quad k = (0, k_1, k_2, \dots, k_{n-1})^t$$

соответственно, причем векторы l и k являются Q -нечетными; C – ненулевой кососимметричный циркулянт с нулевой диагональю. Тогда симметричность матрицы $(L + K \mathcal{P}_n)C$ эквивалентна условию $L = K = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C – циркулянт с первым столбцом

$$c = (0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})^t.$$

Из условия кососимметричности C следует Q -нечетность вектора c .

Так как матрицы L и K строго нижнетреугольные, то матрица $L + K \mathcal{P}_n$ имеет нулевую первую строку, поэтому и матрица $(L + K \mathcal{P}_n)C$ также имеет нулевую первую строку. В силу симметричности она должна иметь нулевой первый столбец, т.е.

$$(L + K \mathcal{P}_n)c = 0. \quad (15)$$

Так как данное уравнение теряет смысл для первого элемента и у s первый элемент нулевой, то введем в рассмотрение две вспомогательные матрицы и вектор. Пусть $\hat{L}$ получается из L вычеркиванием первого столбца и первой строки, а $\hat{K}$ получается из K вычеркиванием последнего столбца и первой строки. Вектор $\hat{c}$ получается из c удалением первого элемента. Так как $C \neq 0$, то $\hat{c} \neq 0$. Тогда имеем

$$(\hat{L} + \hat{K}\mathcal{P}_{n-1})\hat{c} = 0,$$

или

$$\hat{L}\hat{c} + \hat{K}\mathcal{P}_{n-1}\hat{c} = 0.$$

Из условия Q -нечетности вектора c следует нечетность $\hat{c}$. Имеем

$$\hat{L}\hat{c} - \hat{K}\hat{c} = 0,$$

или

$$(\hat{L} - \hat{K})\hat{c} = 0. \quad (16)$$

Исследуем матрицу $\hat{L} - \hat{K}$. По векторам l и k определим векторы $\hat{l}$ и $\hat{k}$ удалением первого нулевого элемента. Тогда из условий Q -нечетности k и l следует, что

$$\mathcal{P}_{n-1}\hat{l} = -\hat{l}, \quad \mathcal{P}_{n-1}\hat{k} = -\hat{k}. \quad (17)$$

Пусть Z_n – матрица порядка n вида

$$Z_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Несложно проверить, что матрица $\hat{L} - \hat{K}$ является теплицевой нижнетреугольной с первым столбцом $Z_{n-1}\hat{l} - \hat{k}$, или

$$\{\hat{L} - \hat{K}\}_{1j} = \begin{cases} -k_1, & j = 1, \\ l_{j-1} - k_j, & j = 2, \dots, m-1, \\ l_{m-1} - k_m, & j = m, \\ l_m + k_m, & j = m+1, \\ -l_m + k_{m-1}, & j = m+2, \\ -l_{n-j+1} + k_{n-j}, & j = m+3, \dots, n-1, \end{cases}$$

если $n = 2m + 1$,

$$\{\hat{L} - \hat{K}\}_{1j} = \begin{cases} -k_1, & j = 1, \\ l_{j-1} - k_j, & j = 2, \dots, m-2, \\ l_{m-2} - k_{m-1}, & j = m-1, \\ l_{m-1}, & j = m, \\ k_{m-1}, & j = m+1, \\ -l_{m-1} + k_{m-2}, & j = m+2, \\ -l_{n-j+1} + k_{n-j}, & j = m+3, \dots, n-1, \end{cases}$$

если $n = 2m$.

Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Матрица $\hat{L} - \hat{K}$ имеет уровень $q \leq \lceil (n-1)/2 \rceil$. Тогда из (16) вектор $\hat{c}$ содержит первые $n-1-q$ нулей и в силу нечетности является нулевым, что противоречит условию леммы.

Случай 2. Матрица $\hat{L} - \hat{K}$ имеет уровень $q \geq \lceil (n-1)/2 \rceil + 1$ и не является нулевой. В этой ситуации K однозначно определяется по L : $k_j = l_{j-1}$ для $j = 1, 2, \dots, \lfloor (n-1)/2 \rfloor$. Из вида матрицы $\hat{L} - \hat{K}$ следует, что найдется такое число q_0 , что $l_{q_0-2} \neq l_{q_0}$.

Пусть сначала $l_1 = 0$. Нам будет недостаточно рассматривать условие (15). Так как $k_1 = 0$, то у матрицы $L + K\mathcal{P}_n$ две первые строки равны нулю, а значит, являются нулевыми и две первые строки матрицы $(L + K\mathcal{P}_n)C$, и в силу симметричности – два первых столбца. Условие равенства нулю первого столбца мы использовали. Проанализируем теперь условие равенства нулю второго столбца матрицы $(L + K\mathcal{P}_n)C$.

Второй столбец матрицы C имеет вид $J_1 c$, где

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда

$$(L + K\mathcal{P}_n)J_1 c = 0,$$

или

$$LJ_1 c + K\tilde{J}_1 c = 0, \quad (18)$$

где

$$\tilde{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу L . Если ее первый столбец нулевой, то $L = K = 0$. Пусть теперь $l_1 = l_2 = \dots = l_{p-1} = 0$, $l_p \neq 0$, $p < \lfloor (n-1)/2 \rfloor$, $p \geq 2$, тогда $k_1 = k_2 = \dots = k_p = 0$, $k_{p+1} \neq 0$.

Исследуем структуру матриц LJ_1 и $K\tilde{J}_1$. Эти матрицы получаются из L и K перестановками столбцов. Матрица LJ_1 без последнего столбца является теплицевой, а $K\tilde{J}_1$ без последнего столбца – ганкелевой. У матрицы $LJ_1 + K\tilde{J}_1$ первые $p \geq 2$ строк нулевые, а в $(p+1)$ -й строке отличен от нуля лишь последний элемент, поэтому $c_0 = c_1 = c_{n-1} = 0$. По матрице LJ_1 построим матрицу $\tilde{L}$, получающуюся из LJ_1 удалением первого, второго и последнего столбцов и первых трех строк. Матрица $\tilde{L}$ будет теплицевой с уровнем p . Аналогичным образом по $K\tilde{J}_1$ построим матрицу $\tilde{K}$, которая будет ганкелевой, а матрица $\tilde{K}\mathcal{P}_{n-3}$ теплицевой уровня $p-2$. По c построим вектор $\tilde{c}$, удалив в c первый, второй и последний элементы, тогда $\mathcal{P}_{n-3}\tilde{c} = -\tilde{c}$. Из (18) получаем $(\tilde{L} + \tilde{K})\tilde{c} = 0$, или

$$(\tilde{L} - \tilde{K}\mathcal{P}_{n-3})\tilde{c} = 0.$$

Матрица $\tilde{L} - \tilde{K}\mathcal{P}_{n-3}$ – теплицева уровня $p - 2$. Следовательно, $c = 0$ – противоречие с условием леммы. Значит, $K = L = 0$.

Пусть теперь $l_1 \neq 0$. Так как масштабирование сохраняет симметрию, то можем работать с матрицей $(L + K\mathcal{P}_n)C$, удовлетворяющей условию $l_1 = 1$. Тогда $k_1 = 0$, $k_2 = 1$. Матрица $L + K\mathcal{P}_n$ имеет во второй строке лишь одну единицу в позиции $(2, 1)$, поэтому в силу кососимметричности C вторая строка $(L + K\mathcal{P}_n)C$ совпадает с вектором $-c^t$, и для симметрии должно выполняться условие $(L + K\mathcal{P}_n)J_1 c = -c$, или

$$(LJ_1 + K\tilde{J}_1 + I_n)c = 0,$$

которое запишем как

$$((L - le_1^t)J_1 + K\tilde{J}_1 + I_n + le_1^t J_1)c = 0.$$

Так $(L - le_1^t)J_1 = Z_n L$ и $e_1^t J_1 = (J_1^t e_1)^t = e_n^t$, то

$$(Z_n L + K\tilde{J}_1 + I_n + le_n^t)c = 0.$$

В силу того, что вектор c является Q -нечетным, верно $K\tilde{J}_1 c = -K(Z_n^t)^2 c$. Имеем

$$(Z_n L - K(Z_n^t)^2 + I_n + le_n^t)c = 0.$$

Исследуем структуру матрицы

$$U = Z_n L - K(Z_n^t)^2 + I_n + le_n^t.$$

Учитывая связь между матрицами K и L , для наглядности выпишем несколько строк и столбцов матрицы U

$$U = \left(\begin{array}{cc|cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & l_2 \\ l_2 & 1 & -l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & l_3 \\ l_3 & l_2 & 1 - l_3 & -l_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & l_4 \\ l_4 & l_3 & l_2 - l_4 & 1 - l_3 & -l_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & l_5 \\ l_5 & l_4 & l_3 - l_5 & l_2 - l_4 & 1 - l_3 & -l_2 & 0 & \dots & 0 & l_6 \\ l_6 & l_5 & l_4 - l_6 & l_3 - l_5 & l_2 - l_4 & 1 - l_3 & -l_2 & \dots & 0 & l_7 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right).$$

Если из U удалить первый, второй и последний столбцы, то получится прямоугольная теплицева матрица $\hat{U}$ с первым столбцом

$$\hat{u} = Z_n(L e_2 - L e_1 + e_2).$$

При этом вектор $\hat{u}$ в трех первых позициях имеет нулевые элементы. Заметим, что если у U из второго столбца вычесть последний, то получится вектор

$$u = Z_n L e_2 - L e_1 + e_2 = (0, 0, u_2, u_3, u_4, \dots, u_{n-1}).$$

Так как $c_{n-1} = -c_1$, $c_0 = 0$, то, если $u_2 \neq 0$, получаем $c_{n-1} = c_1 = 0$. Сформируем из матрицы U матрицу $\tilde{U}$ путем удаления первого, второго и последнего столбцов и

первых трех строк, по c построим вектор $\tilde{c}$, удалив в c первый, второй и последний элементы, приходим к системе

$$\tilde{U}\tilde{c} = 0$$

с невырожденной матрицей $\tilde{U}$. Откуда следует, что $c = 0$ – противоречие с условием леммы. Значит, $K = L = 0$.

Если же $u_2 = 0$, рассмотрим элемент u_3 . Из условия $u_2 = 0$ следует, что у $\tilde{U}$ первые четыре строки нулевые. Повторяя рассуждения, аналогичные предыдущим, получаем, что либо $K = L = 0$, либо $u_3 = 0$.

Так как

$$u_j = l_{j-3} - l_{j-1}, \quad j \geq 4,$$

то в силу условия рассматриваемого случая получаем, что для $j = q_0 + 3$ имеем $u_j \neq 0$.

Случай 3. И, наконец, исследуем случай, когда матрица $\hat{L} - \hat{K}$ является нулевой, тогда $\hat{k} = Z_{n-1}\hat{l}$. Из (17) получаем систему

$$\begin{cases} (I_{n-1} + \mathcal{P}_{n-1})\hat{l} = 0, \\ (I_{n-1} + \mathcal{P}_{n-1})Z_{n-1}\hat{l} = 0. \end{cases}$$

Поэлементная запись имеет вид

$$\begin{cases} l_j = -l_{n-j}, & j = 1, 2, \dots, n-1, \\ l_{n-2} = 0, \\ l_j = -l_{n-j-2}, & j = 1, 2, \dots, n-3, \end{cases} \quad (19)$$

или

$$\begin{cases} l_j = -l_{n-j}, & j = 1, 2, \dots, n-1, \\ l_{n-2} = 0, \\ l_{n-j} = l_{n-j-2}, & j = 1, 2, \dots, n-3. \end{cases} \quad (20)$$

Если $n = 2m + 1$, то

$$0 = l_{n-2} = l_{n-4} = \dots = l_1 = -l_{n-1} = -l_{n-3} = \dots = -l_2.$$

Получаем $L = K = 0$.

Если $n = 2m$, то из последнего условия (19) для $j = m - 1$ имеем

$$l_{m-1} = -l_{m-1},$$

или $l_{m-1} = 0$, для первого условия (19) для $j = m$

$$l_m = -l_m,$$

или $l_m = 0$. Из последнего условия (20) и нечетности $\hat{l}$ получаем, что

$$0 = l_m = l_{m-1} = l_{m-2} = l_{m-3} = \dots = l_2 = l_1.$$

Получаем $L = K = 0$. Итак, в любом случае $L = K = 0$. Лемма 4 доказана.

5. Главный результат. Установим теперь справедливость теоремы, которая позволяет решить исследуемую систему.

Рассмотрим первое уравнение системы (14) в виде

$$(S_2 + S_1 P_n)C = ((S_2 + S_1 P_n)C)^t.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть S_1 и S_2 – симметричные косые циркулянты с нулевой диагональю, C – ненулевой кососимметричный циркулянт с нулевой диагональю. Тогда матрица $(S_2 + S_1 P_n)C$ является симметричной тогда и только тогда, когда $S_1 = S_2 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Достаточность очевидна. Покажем необходимость. В силу лемм 2 и 3 симметричность матрицы $(S_2 + S_1 P_n)C$ эквивалентна симметричности матрицы

$$(S_2 + S_1 P_n)C + C_2 C + C_1 P_n C$$

для произвольных кососимметричных циркулянтов C_1 и C_2 ; при этом

$$(S_2 + S_1 P_n)C + C_2 C + C_1 P_n C = ((S_2 + C_2) + (S_1 + C_1)P_n)C.$$

Выберем матрицы C_1 и C_2 специальным образом.

Пусть теплицева матрица S_2 имеет элементы $\{S_2\}_{ij} = l_{i-j}$. В силу того, что S_2 – симметричный косой циркулянт, справедливы соотношения

$$l_{-(n-i)} = -l_i, \quad l_{-i} = l_i.$$

Поэтому можем считать, что S_2 – косой циркулянт с первым столбцом

$$l = (0, l_1, l_2, \dots, l_{n-1})^t, \quad (21)$$

который является Q -нечетным. Возьмем матрицу C_2 как кососимметричный циркулянт с тем же первым столбцом. Тогда матрица $S_2 + C_2$ в качестве первого столбца имеет вектор $2l$ и нулевые элементы в первой строке, так как у матриц S_2 и C_2 – нулевая диагональ и для $j > 1$

$$\{S_2 + C_2\}_{1j} = \{S_2\}_{1j} + \{C_2\}_{1j} = -l_{n+1-j} + l_{n+1-j} = 0.$$

Введем строго нижнетреугольную матрицу L с первым столбцом вида (21). Тогда

$$S_2 + C_2 = 2L.$$

Аналогично, пусть теплицева матрица S_1 имеет элементы $\{S_1\}_{ij} = k_{i-j}$. В силу того, что S_1 – симметричный косой циркулянт, верны равенства

$$k_{-(n-i)} = -k_i, \quad k_{-i} = k_i.$$

Поэтому можем считать, что S_1 – косой циркулянт с первым столбцом

$$k = (0, k_1, k_2, \dots, k_{n-1})^t, \quad (22)$$

который является Q -нечетным. Возьмем матрицу C_1 как кососимметричный циркулянт с тем же первым столбцом. Тогда матрица $S_1 + C_1$ в качестве первого столбца

имеет вектор $2k$ и нулевые элементы в первой строке, так как у матриц S_1 и C_1 – нулевая диагональ и для $j > 1$

$$\{S_1 + C_1\}_{1j} = \{S_1\}_{1j} + \{C_1\}_{1j} = -k_{n+1-j} + k_{n+1-j} = 0.$$

Введем строго нижнетреугольную матрицу K с первым столбцом вида (22), тогда

$$S_1 + C_1 = 2K.$$

В результате получаем, что у нас есть симметричная матрица $(L + K\mathcal{P}_n)C$. В силу леммы 4 $L = K = 0$ и в силу построения $S_1 = S_2 = 0$. Теорема 1 доказана.

6. Решение $(T + H)$ -задачи во втором случае. В заключительном пункте опишем представление вещественных нормальных $(T + H)$ -матриц в рассматриваемом случае и покажем, как можно их конструировать.

Полное решение вещественной нормальной $(T + H)$ -задачи в данном случае можно дать в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A и B – вещественные теплицевы матрицы такие, что матрицы $A - A^t$ и $B - B^t$ – циркулянты. Тогда матрица $A + B\mathcal{P}_n$ является нормальной тогда и только тогда, когда сами матрицы A и B представляют собой циркулянты, удовлетворяющие условию

$$(A - A^t)B = 0. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2 следует из теоремы 1.

Теперь опишем процесс построения матриц A , B , удовлетворяющих условию (23). Используя известное спектральное разложение для циркулянтов (см. (6)), будем искать матрицы A и B в виде

$$A = F_n^* D^{(1)} F_n, \quad (24)$$

$$B = F_n^* D^{(2)} F_n, \quad (25)$$

с неизвестными диагональными матрицами

$$D^{(1)} = \text{diag}(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)}), \quad D^{(2)} = \text{diag}(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_n^{(2)}).$$

Согласно [3]

$$A^t = F_n D^{(1)} F_n^* = F_n^* F_n^2 D^{(1)} (F_n^*)^2 F_n = F_n^* Q D^{(1)} Q F_n = F_n^* \widehat{D}^{(1)} F_n, \quad (26)$$

где

$$\widehat{D}^{(1)} = \text{diag}(d_1^{(1)}, d_n^{(1)}, d_{n-1}^{(1)}, \dots, d_2^{(1)}).$$

Подстановка (24)–(26) в (23) дает

$$(D^{(1)} - \widehat{D}^{(1)})D^{(2)} = 0,$$

или

$$(d_j^{(1)} - d_{n+2-j}^{(1)})d_j^{(2)} = 0, \quad j = 2, \dots, n.$$

Условие вещественности циркулянтов A и B имеет вид (см. [4])

$$\begin{cases} \operatorname{Im} d_1^{(1)} = 0, \\ d_j^{(1)} = \overline{d_{n+2-j}^{(1)}}, \quad j = 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \\ \operatorname{Im} d_1^{(2)} = 0, \\ d_j^{(2)} = \overline{d_{n+2-j}^{(2)}}, \quad j = 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor. \end{cases}$$

В результате получаем

$$(d_j^{(1)} - \overline{d_j^{(1)}})d_j^{(2)} = 0, \quad j = 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor. \quad (27)$$

Фиксируем произвольный циркулянт A , тогда, используя формулы (27), можно построить B .

В частности, для произвольного циркулянта A можно взять $B = 0$, и мы получим, что всякий теплицев циркулянт является нормальной матрицей.

Если взять $A = 0$, то на вещественный циркулянт B нет условий, так как любая ганкелева вещественная матрица является нормальной.

Вычислим размерность многообразия $\mathcal{M}$ решений. Сначала выбираем произвольный $(n \times n)$ -циркулянт A . Пусть у него среди чисел $d_j^{(1)}$, $j = 2, 3, \dots, \lfloor (n+1)/2 \rfloor$, нашлись l вещественных чисел. Далее, по формулам (27) находим числа $d_j^{(2)}$, $j = 2, 3, \dots, \lfloor (n+1)/2 \rfloor$, условие вещественности B позволяет восстановить все значения $d_j^{(2)}$, по которым далее находим циркулянт B . В итоге общая размерность

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M} &= 2 + (1+2)l + (2+0) \left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1 - l \right) + 2 \left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right) \\ &= 2 \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + l. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. В. Воеводин, Е. Е. Тынтышников, *Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами*, Наука, М., 1987.
- [2] Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, М., 1989.
- [3] В. Н. Чугунов, “О частных решениях нормальной $T + H$ -задачи”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:4 (2010), 612–617.
- [4] В. Н. Чугунов, “О параметризации классов нормальных ганкелевых матриц”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:11 (2011), 1939–1951.
- [5] В. Н. Чугунов, “О кососимметричной части теплицевого слагаемого в вещественной нормальной $T + H$ -задаче”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **52**:2 (2012), 209–213.

В. Н. Чугунов

Институт вычислительной математики РАН,
г. Москва
E-mail: chugunov.vadim@gmail.com

Поступило

30.05.2013

Исправленный вариант

12.03.2014