Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степанянц, Лакунарные условия тауберова типа для методов суммирования Чезаро, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 1, 118–129

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1033>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:37:58

УДК 517.52.75

ЛАКУНАРНЫЕ УСЛОВИЯ ТАУБЕРОВА ТИПА ДЛЯ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ ЧЕЗАРО

С. А. Степанянц

В статье изучаются лакунарные условия, обеспечивающие на классе рядов, им удовлетворяющим, эквивалентность методов суммирования Чезаро (C, k) и (C, α) с фиксированными k и α ($0 < k < \alpha$). Установлена достаточность условия, в котором “лакуна” соответствующей величины разделяет не соседние ненулевые элементы (как в классическом случае $k = 0$), но ограниченные в совокупности множества из $k + 1$ ненулевых элементов.

Библиография: 6 названий.

1. В данной работе рассматриваются некоторые широко распространенные методы суммирования числовых рядов, изучаются условия тауберова типа (обозначаемые $T_Q(P)$ -условиями) для этих методов.

Везде в дальнейшем $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ – последовательность действительных чисел, $\sum a_n$ – соответствующий ей ряд (когда пределы суммирования не указаны, мы считаем, что оно производится от 0 до $+\infty$), k и l – целые неотрицательные числа, α – действительное число.

Пусть P и Q – методы суммирования числовых рядов. Условие R на последовательность $\{a_n\}$ называется $T_Q(P)$ -условием, если любой ряд $\sum a_n$, суммируемый методом P и такой, что $\{a_n\}$ удовлетворяет условию R , суммируем и методом Q . Метод P при этом будем называть “верхним” методом, Q – “нижним” методом.

Приведем в качестве примера лакунарные тауберовы условия для некоторых известных методов суммирования.

Пусть $\{n_r\}_{r=1}^{+\infty}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, а последовательность $\{a_n\}$ такова, что

$$a_n = 0 \quad \text{при } n \neq n_1, n_2, n_3, \dots \quad (*)$$

Тогда верны следующие утверждения.

ТЕОРЕМА А (определение метода Абеля (A) , см. [1, с. 20]). *Если существует $q > 1$ такое, что $n_{r+1}/n_r \geq q$ для всех r , то условие $(*)$ является $T_{(C,0)}((A))$ -условием (см. [2]).*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00010, и программы “Ведущие научные школы”, грант № 96-15-96073.

ТЕОРЕМА Б (определение и основные свойства методов Чезаро (C, α) с $\alpha > -1$, см. [1, § 5.4, § 5.5, § 5.7]). Если существует $q > 1$ такое, что $n_{r+1}/n_r \geq q$ для всех r , то для любого $\alpha > 0$ условие $(*)$ является $T_{(C,0)}((C, \alpha))$ -условием (следствие из теоремы А).

ТЕОРЕМА В (определение метода Бореля (B) , см. [1, с. 107]). Если существует $d > 0$ такое, что $(n_{r+1} - n_r)/\sqrt{n_r} \geq d$ для всех r , то условие $(*)$ является $T_{(C,0)}((B))$ -условием (см. [3]).

ТЕОРЕМА Г (определение логарифмического метода (L) , см. [1, с. 108]). Если существует $\lambda > 1$ такое, что $\ln n_{r+1}/\ln n_r \geq \lambda$ для всех r , то условие $(*)$ является $T_{(C,0)}((L))$ -условием (см. [4]).

Тауберовы условия в этих результатах имеют один и тот же характер – между соседними ненулевыми элементами последовательности $\{a_n\}$ имеется “лакуна”, величина которой зависит от “верхнего” метода.

В настоящей работе в роли “верхнего” и “нижнего” методов рассматриваются методы суммирования Чезаро различных порядков. Отметим, что когда “нижним” методом является $(C, 0)$, вопрос о лакунарном $T_{(C,0)}((C, \alpha))$ -условии решен окончательно, ибо, как вытекает из работы [5], требование на последовательность $\{n_r\}$, указанное в теореме Б, при любом $\alpha > 0$ является не только достаточным, но и необходимым для того, чтобы условие $(*)$ было $T_{(C,0)}((C, \alpha))$ -условием. Поэтому нас будет интересовать случай, когда “нижний” метод есть метод (C, k) . Здесь будет установлена достаточность условия, в котором “лакуна” соответствующей величины разделяет не соседние ненулевые элементы, но ограниченные в совокупности множества из $k+1$ ненулевых элементов.

Переходя к точным формулировкам, дадим следующее определение.

Последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию (G, k) (запись $\{a_n\} \in (G, k)$), если существуют натуральное число C , действительное число $q > 1$ и последовательность натуральных чисел $\{n_r\}_{r=1}^{+\infty}$ такие, что

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} \geq q \text{ для всех } r, \quad a_n = 0, \text{ если } n \notin \bigcup_{r=1}^{+\infty} (n_r - C, n_r],$$

и при каждом натуральном r число отличных от 0 элементов $\{a_n\}$ с номерами $n \in (n_r - C, n_r]$ не превышает $k+1$.

Относительно введенных условий будет доказана теорема 1, при $k = 0$ совпадающая с теоремой Б.

ТЕОРЕМА 1. Пусть k – фиксированное целое число, α – фиксированное действительное число, причем $\alpha > k \geq 0$. Тогда требование $\{a_n\} \in (G, k)$ является $T_{(C,k)}((C, \alpha))$ -условием.

В терминах условий (G, k) приведенный результат является точным, т.е. справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Для любого целого k ($k \geq 0$) существует последовательность $\{a_n\}$ такая, что $\{a_n\} \in (G, k+1)$, ряд $\sum a_n$ суммируем методом (C, α) при любом $\alpha > k$, но ряд $\sum a_n$ не является суммируемым методом (C, k) .

ТЕОРЕМА 3. Для любого целого k ($k \geq 0$) существует последовательность $\{a_n\}$ такая, что $\{a_n\} \in (G, k)$, ряд $\sum a_n$ суммируем методом (C, k) , но ни при каком ω ($0 < \omega < k + 1$) ряд $\sum a_n$ не является суммируемым методом $(C, k - \omega)$.

В настоящей работе будет доказана теорема 1. Доказательства теорем 2 и 3 см. в [6, с. 90–100].

2. Установим некоторые вспомогательные утверждения, главным из которых будет лемма 5, имеющая, по мнению автора, самостоятельное значение.

ЛЕММА 1. Пусть k, i, l – фиксированные натуральные числа ($l < i$), t – фиксированное целое число, $t \in [-k + 1, 1]$; R_1 и p – фиксированные действительные числа ($R_1 > 0$). Тогда если

$$\left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k+m} a_\nu \right| < R_1 (i - l)^{m+p}$$

для всех целых $m \in [t, k + 1]$, то

$$\left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k+m} (l - \nu + 1)^{m_1} a_\nu \right| < 2^{m_1} R_1 (i - l)^{m+m_1+p}$$

для всех целых m из указанного выше промежутка и всех целых $m_1 \in [0, k + 1 - m]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем индукцией по m_1 . При $m_1 = 0$ требуемое неравенство выполнено по условию.

Пусть утверждение леммы верно для $m_1 = n_1$, где n_1 – целое, $n_1 \in [0, k - t]$. Тогда неравенство

$$\left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k+m} (l - \nu + 1)^{n_1} a_\nu \right| < 2^{n_1} R_1 (i - l)^{m+n_1+p}$$

справедливо для всех целых $m \in [t, k + 1 - n_1]$.

Отсюда для всех целых $m \in [t, k - n_1]$ вытекает

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k+m} (l - \nu + 1)^{n_1+1} a_\nu \right| \\ &= \left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k+(m+1)} (l - \nu + 1)^{n_1} a_\nu - (i - l) \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k+m} (l - \nu + 1)^{n_1} a_\nu \right| \\ &\leq \left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k+(m+1)} (l - \nu + 1)^{n_1} a_\nu \right| + (i - l) \left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k+m} (l - \nu + 1)^{n_1} a_\nu \right| \\ &< 2^{n_1} R_1 (i - l)^{(m+1)+n_1+p} + (i - l) 2^{n_1} R_1 (i - l)^{m+n_1+p} = 2^{n_1+1} R_1 (i - l)^{m+n_1+1+p}. \end{aligned}$$

Таким образом, из того, что утверждение леммы верно для $m_1 = n_1$, где n_1 – целое, $n_1 \in [0, k - t]$ (при этом m – целое, $m \in [t, k + 1 - n_1]$), получаем его истинность для $m_1 = n_1 + 1$ (при этом m – целое, $m \in [t, k - n_1]$). Значит, утверждение леммы верно для любого целого $m_1 \in [0, k - t + 1]$ и любого целого $m \in [t, k - m_1 + 1]$ или, что то же самое, для любого целого $m \in [t, k + 1]$ и любого целого $m_1 \in [0, k + 1 - m]$. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть k, i, l – фиксированные натуральные числа ($l < i$), t – фиксированное целое число, $t \in [-k+1, 1]$; R_1 и p – фиксированные действительные числа ($R_1 > 0$). Тогда если

$$\left| \sum_{\nu=0}^l (l - \nu + 1)^{k+m} a_\nu \right| < R_1 (i - l)^{m+p}$$

для всех целых $m \in [t, k+1]$, то

$$\left| \sum_{\nu=0}^l (l - \nu + 1)^{k+m} (i - \nu + 1)^{m_1} a_\nu \right| < 2^{m_1} R_1 (i - l)^{m+m_1+p}$$

для всех целых m из указанного выше промежутка и всех целых $m_1 \in [0, k+1-m]$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

ЛЕММА 3. Для любых натуральных чисел k_1, k_2, i, l , где $i > l$, справедливо равенство

$$\left(\sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k_1} a_\nu \right) (i - l)^{k_2} = \sum_{j=0}^{k_2} (-1)^j \binom{k_2}{j} \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k_1+k_2-j} (l - \nu + 1)^j a_\nu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем некоторое целое ν такое, что $0 \leq \nu \leq l$. Тогда

$$\begin{aligned} (i - \nu + 1)^{k_1} (i - l)^{k_2} a_\nu &= a_\nu (i - \nu + 1)^{k_1} ((i - \nu + 1) - (l - \nu + 1))^{k_2} \\ &= a_\nu \sum_{j=0}^{k_2} (-1)^j \binom{k_2}{j} (i - \nu + 1)^{k_1+k_2-j} (l - \nu + 1)^j. \end{aligned}$$

Просуммировав полученное равенство по ν от 0 до l и изменив затем порядок суммирования, установим требуемое. Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Для любых натуральных чисел k_1, k_2, i, l , где $i > l$, справедливо равенство

$$\left(\sum_{\nu=0}^l (l - \nu + 1)^{k_1} a_\nu \right) (i - l)^{k_2} = \sum_{j=0}^{k_2} (-1)^{k_2-j} \binom{k_2}{j} \sum_{\nu=0}^l (l - \nu + 1)^{k_1+k_2-j} (i - \nu + 1)^j a_\nu.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.

ЛЕММА 5. Пусть k, i, l – фиксированные натуральные числа ($l < i$), t – фиксированное целое число, $t \in [-k+1, 1]$; R_2 и p – фиксированные действительные числа ($R_2 > 0$). Тогда если

$$\left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k+m} a_\nu \right| < R_2 (i - l)^{m+p}, \quad \left| \sum_{\nu=0}^l (l - \nu + 1)^{k+m} a_\nu \right| < R_2 (i - l)^{m+p}$$

для всех целых $m \in [t, k+1]$, то

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k+t-1} a_\nu \right| &< 2^{3k+1} R_2 (i - l)^{t+p-1}, \\ \left| \sum_{\nu=0}^l (l - \nu + 1)^{k+t-1} a_\nu \right| &< 2^{3k+1} R_2 (i - l)^{t+p-1}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно леммам 1 и 2 справедливы оценки

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k+m} (l - \nu + 1)^{m_1} a_{\nu} \right| &< 2^{2k} R_2 (i - l)^{m+m_1+p}, \\ \left| \sum_{\nu=0}^l (l - \nu + 1)^{k+m} (i - \nu + 1)^{m_1} a_{\nu} \right| &< 2^{2k} R_2 (i - l)^{m+m_1+p}. \end{aligned} \quad (1)$$

Неравенства (1) верны для всех целых $m \in [t, k+1]$ и всех целых $m_1 \in [0, k+1-m]$. В частности, при $m = t$ и $m_1 = k+t-1$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k+t} (l - \nu + 1)^{k+t-1} a_{\nu} \right| &< 2^{2k} R_2 (i - l)^{k+2t+p-1}, \\ \left| \sum_{\nu=0}^l (l - \nu + 1)^{k+t} (i - \nu + 1)^{k+t-1} a_{\nu} \right| &< 2^{2k} R_2 (i - l)^{k+2t+p-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Далее, с помощью соотношений (2) получаем

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k+t-1} (l - \nu + 1)^{k+t-1} a_{\nu} \right| \\ &= \frac{1}{i-l} \left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k+t} (l - \nu + 1)^{k+t-1} a_{\nu} - \sum_{\nu=0}^l (l - \nu + 1)^{k+t} (i - \nu + 1)^{k+t-1} a_{\nu} \right| \\ &< 2^{2k+1} R_2 (i - l)^{k+2t+p-2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Если в условии леммы $t = -k+1$, то из неравенства (3) сразу вытекает требуемое утверждение. Продолжим доказательство в случае, когда t принимает фиксированное целое значение в промежутке $[-k+2, 1]$.

Положим $m_1 = n_1$, $m = k+2t-2-n_1$, где n_1 — целое число, $n_1 \in [0, k+t-2]$. Легко заметить, что $m \in [t, k+1]$, $m_1 \in [0, k+1-m]$. Следовательно, для указанных m и m_1 оценки (1) выполняются и имеют вид

$$\left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{2k+2t-2-n_1} (l - \nu + 1)^{n_1} a_{\nu} \right| < 2^{2k} R_2 (i - l)^{k+2t-2+p}, \quad (4)$$

$$\left| \sum_{\nu=0}^l (l - \nu + 1)^{2k+2t-2-n_1} (i - \nu + 1)^{n_1} a_{\nu} \right| < 2^{2k} R_2 (i - l)^{k+2t-2+p}. \quad (5)$$

Неравенства (4) и (5) верны для любого целого $n_1 \in [0, k+t-2]$. Применим лемму 3 с $k_1 = k+t-1$ и $k_2 = k+t-1$. Согласно этой лемме имеем

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k+t-1} a_{\nu} \right) (i - l)^{k+t-1} \\ &= \sum_{j=0}^{k+t-1} (-1)^j \binom{k+t-1}{j} \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{2k+2t-2-j} (l - \nu + 1)^j a_{\nu}. \end{aligned}$$

Оценив теперь модуль суммы суммой модулей и воспользовавшись неравенствами (3) и (4), получим

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k+t-1} a_{\nu} \right| \\
 & \leq \frac{1}{(i-l)^{k+t-1}} \left(\sum_{n_1=0}^{k+t-2} \binom{k+t-1}{n_1} \left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{2k+2t-2-n_1} (l - \nu + 1)^{n_1} a_{\nu} \right| \right. \\
 & \quad \left. + \binom{k+t-1}{k+t-1} \left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k+t-1} (l - \nu + 1)^{k+t-1} a_{\nu} \right| \right) \\
 & < \left(\sum_{n_1=0}^{k+t-2} \binom{k+t-1}{n_1} \right) 2^{2k} R_2 (i-l)^{t+p-1} + 2^{2k+1} R_2 (i-l)^{t+p-1} \\
 & < 2^{3k+1} R_2 (i-l)^{t+p-1}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Аналогично, используя лемму 4 с $k_1 = k + t - 1$, $k_2 = k + t - 1$ и соотношения (3) и (5), выводим неравенство

$$\left| \sum_{\nu=0}^l (l - \nu + 1)^{k+t-1} a_{\nu} \right| < 2^{3k+1} R_2 (i-l)^{t+p-1}. \tag{7}$$

Неравенства (6) и (7) составляют заключение леммы. Лемма 5 доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Как было отмечено выше, при $k = 0$ утверждение теоремы известно. Проведем доказательство для натурального k .

Согласно определению условия (G, k) обладают следующим свойством: если $\{a_n\} \in (G, k)$, то $\{a_n\} \in (G, l)$, где l – любое целое число большее k . Отсюда и из того, что ряд $\sum a_n$, суммируемый методом (C, γ) , суммируем любым методом (C, β) с $\beta > \gamma > -1$, вытекает, что для доказательства теоремы нам достаточно установить ее в случае $\alpha = k + 1$.

Итак, пусть k – фиксированное натуральное число, $\{a_n\}$ – произвольная последовательность такая, что $\{a_n\} \in (G, k)$ и $\sum a_n = A$ ($((C, k + 1))$) (запись $\sum a_n = A$ (P) обозначает, что ряд $\sum a_n$ суммируем к числу A методом P).

Докажем, что $\sum a_n = A$ ((C, k)).

Так как $\{a_n\} \in (G, k)$, существуют натуральное число C , действительное число $q > 1$ и последовательность натуральных чисел $\{n_r\}_{r=1}^{+\infty}$ такие, что

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} \geq q \text{ для всех } r, \quad a_n = 0, \text{ если } n \notin \bigcup_{r=1}^{+\infty} (n_r - C, n_r],$$

и при каждом натуральном r число отличных от 0 элементов $\{a_n\}$ с номерами $n \in (n_r - C, n_r]$ не превышает $k + 1$.

Изменяя, если это необходимо, конечное число членов последовательности $\{a_n\}$, мы можем без ограничения общности считать, что $A = 0$, а числа C, q и последовательность $\{n_r\}$ выбраны таким образом, что $C > k + 1$, $q \leq n_{r+1}/n_r \leq q^3 < 2$ для всех r .

Приведем известный результат для методов суммирования Чезаро (см., например, [1, с. 146–147]). Если $\sum a_n = 0$ ((C, s)), где s – некоторое целое неотрицательное число, то

$$\left| \sum_{\nu=0}^n (n - \nu + 1)^s a_\nu \right| = o(n^s).$$

Тогда, поскольку из суммируемости ряда $\sum a_n$ к 0 методом $(C, k + 1)$ следует его суммируемость к 0 методами $(C, k + 2), \dots, (C, 2k + 1)$, то для любого целого $m \in [1, k + 1]$ справедливо соотношение

$$\left| \sum_{\nu=0}^n (n - \nu + 1)^{k+m} a_\nu \right| = o(n^{k+m}). \quad (8)$$

Возьмем любое фиксированное $\varepsilon > 0$. Для этого ε согласно (8) существует N такое, что для любого $n \geq N$ и для любого целого $m \in [1, k + 1]$ выполнено неравенство

$$\left| \sum_{\nu=0}^n (n - \nu + 1)^{k+m} a_\nu \right| < \varepsilon (\sqrt[k]{q} - 1)^{2k+1} n^{k+m}. \quad (9)$$

Выберем в качестве r_0 наименьший из номеров r последовательности $\{n_r\}$ такой, что $n_{r_0} > N$ и

$$n_{r_0} > \frac{C}{\sqrt[k]{q} - 1}. \quad (10)$$

Пусть n_r – любой фиксированный член последовательности $\{n_r\}$ такой, что $n_r > n_{r_0}$, а l и i – любые фиксированные натуральные числа такие, что

$$n_r \leq l < \sqrt[k]{q} \cdot l \leq i \leq n_{r+1} - C < 2n_r. \quad (11)$$

Пользуясь формулами (9) и (11), а также тем, что $a_n = 0$ при $n \in (n_r, n_{r+1} - C]$, получим оценку

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k+m} a_\nu \right| &= \left| \sum_{\nu=0}^i (i - \nu + 1)^{k+m} a_\nu \right| < \varepsilon (\sqrt[k]{q} - 1)^{2k+1} i^{k+m} \\ &< 2^{k+m} \varepsilon (\sqrt[k]{q} - 1)^{k+1-m} (\sqrt[k]{q} - 1)^{k+m} l^{k+m} \leq 2^{k+m} \varepsilon (i - l)^{k+m}. \end{aligned}$$

Положим $M_1 = 2^{2k+1}$ (M_1 – константа, так как k – фиксированная постоянная). Тогда для всех целых $m \in [1, k + 1]$ справедливо неравенство

$$\left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k+m} a_\nu \right| < M_1 \varepsilon (i - l)^{k+m}. \quad (12)$$

Аналогично, для тех же m выполнено

$$\left| \sum_{\nu=0}^l (l - \nu + 1)^{k+m} a_\nu \right| < M_1 \varepsilon (i - l)^{k+m}. \quad (13)$$

Заметим, что поскольку верны оценки (12) и (13), то выполнены условия леммы 5, где величины i, l, k такие же, как в нашей теореме, $p = k, t = 1, R_2 = M_1\varepsilon$.

Тогда можно сделать вывод, что

$$\left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^k a_\nu \right| < 2^{3k+1} M_1 \varepsilon (i - l)^k, \quad \left| \sum_{\nu=0}^l (l - \nu + 1)^k a_\nu \right| < 2^{3k+1} M_1 \varepsilon (i - l)^k. \quad (14)$$

Заметим, что поскольку верны оценки (12)–(14), то выполнены условия леммы 5, где величины i, l, k такие же, как в нашей теореме, $p = k, t = 0, R_2 = 2^{3k+1} M_1 \varepsilon$.

Тогда можно сделать вывод, что

$$\left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k-1} a_\nu \right| < (2^{3k+1})^2 M_1 \varepsilon (i - l)^{k-1},$$

$$\left| \sum_{\nu=0}^l (l - \nu + 1)^{k-1} a_\nu \right| < (2^{3k+1})^2 M_1 \varepsilon (i - l)^{k-1}.$$

И так далее, применяя поочередно лемму 5 (при очередном использовании леммы 5 все фигурирующие в условии величины, кроме t и R_2 , остаются прежними; t уменьшается на 1, а R_2 увеличивается в 2^{3k+1} раз) до тех пор, пока t не станет равным $-k + 1$ (при $t = -k + 1$ лемма 5 применяется в последний раз), получим следующие неравенства, верные для всех целых $s \in [0, k]$:

$$\left| \sum_{\nu=0}^l (i - \nu + 1)^{k-s} a_\nu \right| < (2^{3k+1})^{s+1} M_1 \varepsilon (i - l)^{k-s}, \quad (15)$$

$$\left| \sum_{\nu=0}^l (l - \nu + 1)^{k-s} a_\nu \right| < (2^{3k+1})^{s+1} M_1 \varepsilon (i - l)^{k-s}. \quad (16)$$

Используя то, что $a_n = 0$ при $n \in (l, i]$, перепишем (15) в виде

$$\left| \sum_{\nu=0}^i (i - \nu + 1)^{k-s} a_\nu \right| < (2^{3k+1})^{s+1} M_1 \varepsilon (i - l)^{k-s}. \quad (17)$$

Пусть теперь n – любое целое число из отрезка $[n_r, n_{r+1} - C]$. Тогда выполнено хотя бы одно из двух неравенств:

- i) $\sqrt[4]{q} \cdot n_r \leq n$, или
- ii) $\sqrt[4]{q} \cdot n \leq n_{r+1} - C$.

Действительно, если бы оба эти неравенства были бы неверны, то имели бы $\sqrt[4]{q} \cdot n_r > \sqrt[4]{q} \cdot n > n_{r+1} - C \geq q \cdot n_r - C$. И тогда $n_{r0} < n_r < C/(q - \sqrt[4]{q}) = C/(\sqrt[4]{q}(q^{3/4} - 1)) < C/(\sqrt[4]{q} - 1)$, что противоречит неравенству (10).

Пусть выполнено i). В этом случае мы можем рассмотреть в качестве l число n_r , а в качестве i – число n (так как для таких l и i выполнены соотношения (11)). Тогда из неравенства (17) получаем

$$\left| \sum_{\nu=0}^n (n - \nu + 1)^{k-s} a_\nu \right| < (2^{3k+1})^{s+1} M_1 \varepsilon n^{k-s}.$$

Если же выполнено ii), то мы можем рассмотреть в качестве l число n , а в качестве i – число $n_{r+1} - C$ (так как для таких l и i выполнены соотношения (11)). Тогда из неравенств (11) и (16) получаем

$$\left| \sum_{\nu=0}^n (n - \nu + 1)^{k-s} a_{\nu} \right| < (2^{3k+1})^{s+1} M_1 \varepsilon n^{k-s}.$$

Тем самым, мы показали, что для любого целого r , $r > r_0$, для любого целого n , $n \in [n_r, n_{r+1} - C]$, и для всех целых s , $s \in [0, k]$, справедливо неравенство

$$\left| \sum_{\nu=0}^n (n - \nu + 1)^{k-s} a_{\nu} \right| < (2^{3k+1})^{s+1} M_1 \varepsilon n^{k-s}. \quad (18)$$

Обозначим $M_2 = (2^{3k+1})^{k+2} \cdot M_1$, $p = k - s$. Положив в (18) $n = n_{r+1}$ и $n = n_{r+1} - C$, получим следующие оценки, справедливые при всех целых r , $r > r_0$, и всех целых p , $p \in [0, k]$:

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n_{r+1}} (n_{r+1} - \nu + 1)^p a_{\nu} \right| < M_2 \varepsilon n_r^p, \quad (19)$$

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n_{r+1}-C} ((n_{r+1} - C) - \nu + 1)^p a_{\nu} \right| < M_2 \varepsilon n_r^p. \quad (20)$$

Обозначим через γ_{rj} (где r – целое, $r > r_0$, j – целое, $0 \leq j \leq k$) некоторые различные числа, лежащие в промежутке $(n_{r+1} - C, n_{r+1}]$, таким образом, чтобы в число γ_{rj} попали все номера n такие, что $a_n \neq 0$ и $n \in (n_{r+1} - C, n_{r+1}]$. Таких номеров n в каждом из промежутков не более чем $k + 1$. Если количество таких номеров в каком-либо промежутке $(n_{r+1} - C, n_{r+1}]$ строго меньше чем $k + 1$, то в качестве оставшихся элементов γ_{rj} (при фиксированном r) мы возьмем необходимое количество чисел из $(n_{r+1} - C, n_{r+1}]$ произвольным образом (сделать это возможно, так как $C > k + 1$). Для определенности будем считать, что $\gamma_{r0} < \gamma_{r1} < \dots < \gamma_{rk}$.

Обозначим также через β_{rj} разность между $n_{r+1} + 1$ и γ_{rj} , т.е. $\beta_{rj} = n_{r+1} + 1 - \gamma_{rj}$ при всех целых r , $r > r_0$, и всех целых j , $0 \leq j \leq k$.

Поскольку γ_{rj} – различные и целые, $\gamma_{rj} \in (n_{r+1} - C, n_{r+1}]$, то β_{rj} – целые, $\beta_{rj} \in [1, C]$, $\beta_{ri} \neq \beta_{rj}$ при $i \neq j$.

С использованием введенных обозначений можно записать

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=0}^{n_{r+1}} (n_{r+1} - \nu + 1)^p a_{\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n_{r+1}-C} ((n_{r+1} - C) - \nu + 1 + C)^p a_{\nu} + \sum_{\nu=n_{r+1}-C+1}^{n_{r+1}} (n_{r+1} - \nu + 1)^p a_{\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n_{r+1}-C} \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} C^i ((n_{r+1} - C) - \nu + 1)^{p-i} a_{\nu} + \sum_{j=0}^k (n_{r+1} - \gamma_{rj} + 1)^p a_{\gamma_{rj}} \\ &= \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} C^i \left(\sum_{\nu=0}^{n_{r+1}-C} ((n_{r+1} - C) - \nu + 1)^{p-i} a_{\nu} \right) + \sum_{j=0}^k \beta_{rj}^p a_{\gamma_{rj}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Положим

$$b_{rp} = \sum_{\nu=0}^{n_{r+1}} (n_{r+1} - \nu + 1)^p a_{\nu} - \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} C^i \left(\sum_{\nu=0}^{n_{r+1}-C} ((n_{r+1} - C) - \nu + 1)^{p-i} a_{\nu} \right). \quad (22)$$

Тогда равенство (21), справедливое для всех целых $r, r > r_0$, и всех целых $p, p \in [0, k]$, примет вид

$$\sum_{j=0}^k \beta_{rj}^p a_{\gamma_{rj}} = b_{rp}. \quad (23)$$

Оценим теперь величину $|b_{rp}|$ с помощью (19), (20), (22):

$$\begin{aligned} |b_{rp}| &\leq \left| \sum_{\nu=0}^{n_{r+1}} (n_{r+1} - \nu + 1)^p a_{\nu} \right| + \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} C^i \left| \sum_{\nu=0}^{n_{r+1}-C} ((n_{r+1} - C) - \nu + 1)^{p-i} a_{\nu} \right| \\ &< M_2 \varepsilon n_r^p + \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} C^i M_2 \varepsilon n_r^p \leq (2^k C^k + 1) M_2 \varepsilon n_r^p. \end{aligned}$$

Полагая $M_3 = (2^k C^k + 1)M_2$, получаем, что для всех целых r , $r > r_0$, и всех целых p , $p \in [0, k]$, верна оценка

$$|b_{rp}| < M_3 \varepsilon n_r^p. \quad (24)$$

Зафиксируем теперь произвольное целое r , $r > r_0$, и рассмотрим систему из $k + 1$ линейных уравнений с неизвестными $f_0, f_1, \dots, f_k$:

$$\begin{aligned}
f_0 + f_1 + \cdots + f_k &= b_{r0}, \\
\beta_{r0}f_0 + \beta_{r1}f_1 + \cdots + \beta_{rk}f_k &= b_{r1}, \\
\beta_{r0}^2f_0 + \beta_{r1}^2f_1 + \cdots + \beta_{rk}^2f_k &= b_{r2}, \\
&\vdots \\
\beta_{r0}^kf_0 + \beta_{r1}^kf_1 + \cdots + \beta_{rk}^kf_k &= b_{rk}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Одно решение этой системы мы знаем, а именно, согласно (23) набор $(f_0, f_1, \dots, f_k) = (a_{\gamma_{r0}}, a_{\gamma_{r1}}, \dots, a_{\gamma_{rk}})$ является решением.

Можно, однако, подойти к вопросу решения системы (25) с другой стороны. Определитель матрицы системы (25)

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \beta_{r0} & \beta_{r1} & \dots & \beta_{rk} \\ \beta_{r0}^2 & \beta_{r1}^2 & \dots & \beta_{rk}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{r0}^k & \beta_{r1}^k & \dots & \beta_{rk}^k \end{vmatrix}$$

является определителем Вандермонда и равен произведению всевозможных разностей $\beta_{rj} - \beta_{ri}$, где $0 \leq i < j \leq k$.

Поскольку все β_{rj} — целые и $\beta_{ri} \neq \beta_{rj}$ при $i \neq j$, то $|\beta_{rj} - \beta_{ri}| \geq 1$ для $0 \leq i < j \leq k$.

Отсюда получаем

$$|d| = \prod_{0 \leq i < j \leq k} |\beta_{rj} - \beta_{ri}| \geq 1. \quad (26)$$

Таким образом, определитель системы (25) отличен от 0 и, следовательно, согласно общей теории систем линейных уравнений система (25) обладает единственным решением, которое находится по формулам $f_j = d_j/d$ ($j = 0, 1, \dots, k$), где d_j — определитель, получающийся из определителя d заменой $(j+1)$ -го столбца в d на столбец свободных членов

$$\begin{pmatrix} b_{r0} \\ \vdots \\ b_{rk} \end{pmatrix}.$$

Принимая во внимание оценку (24) и неравенства $|\beta_{rj}| \leq C$ ($j = 0, 1, \dots, k$), легко заметить, что

$$|d_j| < (k+1)! \cdot (C^k)^k \cdot M_3 \varepsilon n_r^k, \quad j = 0, 1, \dots, k. \quad (27)$$

Положим $M_4 = (k+1)! \cdot (C^k)^k \cdot M_3$. Тогда, пользуясь неравенствами (26) и (27), получаем

$$|f_j| = \frac{|d_j|}{|d|} < M_4 \varepsilon n_r^k.$$

Но, как было отмечено ранее, единственное решение системы (25) реализуется на наборе $(a_{\gamma_{r0}}, a_{\gamma_{r1}}, \dots, a_{\gamma_{rk}})$, т.е. $f_j = a_{\gamma_{rj}}$. Следовательно, для любого целого r , $r > r_0$, и любого целого j , $j \in [0, k]$, справедлива оценка

$$|a_{\gamma_{rj}}| < M_4 \varepsilon n_r^k. \quad (28)$$

Пусть теперь n — любое целое, $n \in (n_{r+1} - C, n_{r+1})$, где r — некоторое целое, $r > r_0$. Тогда, как следует из формул (20) и (28), для любого целого p , $p \in [0, k]$, выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\nu=0}^n (n-\nu+1)^p a_\nu \right| &\leq \left| \sum_{\nu=0}^{n_{r+1}-C} ((n-n_{r+1}+C) + ((n_{r+1}-C) - \nu + 1))^p a_\nu \right| \\ &\quad + \left| \sum_{\nu=n_{r+1}-C+1}^n (n-\nu+1)^p a_\nu \right| \\ &\leq \left| \sum_{\nu=0}^{n_{r+1}-C} \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} (n-n_{r+1}+C)^i ((n_{r+1}-C) - \nu + 1)^{p-i} a_\nu \right| \\ &\quad + \sum_{\nu=n_{r+1}-C+1}^n (n-\nu+1)^p |a_\nu| \\ &\leq \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} C^i \left| \sum_{\nu=0}^{n_{r+1}-C} ((n_{r+1}-C) - \nu + 1)^{p-i} a_\nu \right| + C^p \sum_{j=0}^k |a_{\gamma_{rj}}| \\ &< C^p 2^p M_2 \varepsilon n_r^p + C^p (k+1) M_4 \varepsilon n_r^k \leq C^k (2^k M_2 + (k+1) M_4) \varepsilon n_r^k. \end{aligned} \quad (29)$$

Положим $M_5 = C^k(2^k M_2 + (k+1)M_4)$.

Объединяя оценки (18) и (29), заключаем, что для любого целого n , $n \geq n_{r_0+1}$, и для любого целого p , $p \in [0, k]$, справедливо неравенство

$$\left| \sum_{\nu=0}^n (n-\nu+1)^p a_\nu \right| < M_5 \varepsilon n^k. \quad (30)$$

Рассмотрим чезаровские средние для ряда $\sum a_n$ [1, с. 125–126]:

$$C_n^k = \frac{1}{(n+1) \cdots (n+k)} \sum_{\nu=0}^n (n-\nu+1)(n-\nu+2) \cdots (n-\nu+k) \cdot a_\nu.$$

Полагая $M = 2^{k-1}(k-1)!M_5$ и используя оценку (30), для любого целого $n \geq n_{r_0+1}$ получим

$$\begin{aligned} |C_n^k| &= \frac{1}{(n+1) \cdots (n+k)} \left| \sum_{\nu=0}^n (n-\nu+1)(n-\nu+1+1) \cdots (n-\nu+1+k-1) \cdot a_\nu \right| \\ &\leq \frac{(k-1)!}{(n+1) \cdots (n+k)} \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} \cdot \left| \sum_{\nu=0}^n (n-\nu+1)^i a_\nu \right| \\ &\leq \frac{2^{k-1}(k-1)!}{n^k} M_5 \varepsilon n^k = M \varepsilon. \end{aligned}$$

Тем самым, мы показали, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n^k = 0,$$

т.е. $\sum a_n = 0$ ((C, k)). Теорема 1 доказана.

Автор глубоко признателен научному руководителю член-корреспонденту РАН П. Л. Ульянову за внимание к работе и ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.
- [2] Hardy G. H., Littlewood J. E. A further note on the converse of Abel's theorem // Proc. London Math. Soc. 1926. V. 25. № 2. P. 219–236.
- [3] Мельник В. И. Тауберова теорема о “больших показателях” для метода суммирования Бореля // Матем. сб. 1965. Т. 68. № 1. С. 17–25.
- [4] Krishnan V. K. Gap Tauberian theorem for logarithmic summability (L) // Quart J. Math. Oxford. Ser. (2). 1979. V. 30. № 2. P. 77–87.
- [5] Rajagopal C. T. On the relation of limitation theorems to high-indices theorems // J. London Math. Soc. 1953. V. 28. P. 322–329.
- [6] Степанянц С. А. Условия тауберова типа, связывающие различные методы суммирования. Дисс. ... к.ф.-м.н. М.: МГУ, 1996.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
10.07.97