Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. М. Малышев, Семейство равновеликих n -мерных многогранников, удовлетворяющих принципу Кавальери, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 2, 231–248

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10330>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 17:50:52

Семейство равновеликих n -мерных многогранников, удовлетворяющих принципу Кавальери

Ф. М. Малышев

Доказывается равенство $(n - 1)$ -мерных объемов сечений параллельными гиперплоскостями большого семейства n -мерных выпуклых многогранников с неотрицательными целочисленными координатами вершин, включая единичный куб и прямоугольный симплекс с “катетами” длин $1, 2, \dots, n$. Сечения перпендикулярны главной диагонали куба. Одно доказательство проводится постепенной перестройкой многогранников, другое – непосредственным вычислением объемов с помощью представления многогранников в виде алгебраической суммы выпуклых конусов.

Библиография: 13 названий.

DOI: 10.4213/mzm10330

1. Введение

Пусть

$$K = K_n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, 2, \dots, n\}$$

– единичный куб в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с естественной метрикой;

$$S = S_n = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \sum_{j=1}^n j^{-1} x_j \leq 1\right\}$$

– выпуклая оболочка множества точек $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$, где A_0 – начало координат, $A_j = j e_j$, $j = 1, \dots, n$, e_j – единичный вектор j -й координатной оси, наконец, пусть $L_t = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n = t\}$, $t \in \mathbb{R}$, – гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$. Через $\mathbf{V}_k(\cdot)$ обозначаем функцию k -мерного объема.

ТЕОРЕМА [1]. Для любого $t \in \mathbb{R}$ сечения $K \cap L_t$ и $S \cap L_t$ имеют одинаковые $(n - 1)$ -мерные объемы.

Для такой теоремы хотелось бы иметь простое геометрическое объяснение. В работе же [1] ее доказательство проводится с помощью преобразований Лапласа функций объемов $k(t) = \mathbf{V}_{n-1}(K \cap L_t)$ и $s(t) = \mathbf{V}_{n-1}(S \cap L_t)$:

$$\int_0^n e^{-\lambda t} k(t) dt = \int_K e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_n)} dx_1 \dots dx_n,$$

$$\int_0^n e^{-\lambda t} s(t) dt = \int_S e^{-\lambda(x_1+\dots+x_n)} dx_1 \dots dx_n,$$

где $\lambda \geq 0$.

Утверждение теоремы следует из равенства этих интегралов [2]. Они в работе [1] интерпретируются как вероятности некоторых событий, а требуемое их равенство устанавливается с помощью известных результатов о разностях между соседними членами вариационного ряда, построенного по n независимым случайным величинам с одинаковыми показательными распределениями.

Наряду с этим в работе [1] отмечается, что необходимое равенство устанавливается и непосредственным интегрированием. Соответствующие выкладки там опущены. Ниже (в качестве второго доказательства теоремы [1]) они воспроизводятся. Действительно,

$$\int_K e^{-\lambda(x_1+\dots+x_n)} dx_1 \dots dx_n = \left(\int_0^1 e^{-\lambda z} dz \right)^n = \left(\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \right)^n.$$

Равенство

$$\int_S e^{-\lambda(x_1+\dots+x_n)} dx_1 \dots dx_n = \left(\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \right)^n$$

устанавливается индукцией по n . Для $u \in [0, n]$ определим

$$S(u) = \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : x_1 \geq 0, \dots, x_{n-1} \geq 0, \sum_{j=1}^{n-1} j^{-1} x_j \leq 1 - n^{-1} u \right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_S e^{-\lambda(x_1+\dots+x_n)} dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_0^n e^{-\lambda u} \left(\int_{S(u)} e^{-\lambda(x_1+\dots+x_{n-1})} dx_1 \dots dx_{n-1} \right) du \\ &= \int_0^n e^{-\lambda u} \left(\left(1 - \frac{u}{n} \right)^{n-1} \int_{S(0)} e^{-\lambda(1-u/n)(y_1+\dots+y_{n-1})} dy_1 \dots dy_{n-1} \right) du \\ &= \int_0^n e^{-\lambda u} \left(\frac{1-e^{-\lambda(1-u/n)}}{\lambda} \right)^{n-1} du = \frac{1}{\lambda^{n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i (-1)^i e^{-\lambda i} \int_0^n e^{-\lambda u(1-i/n)} du \\ &= \frac{1}{\lambda^n} \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i (-1)^i e^{-\lambda i} (1-e^{-\lambda(n-i)}) = \left(\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \right)^n. \end{aligned}$$

Дословное повторение этих вычислений позволяет распространить теорему [1] на семейство из 2^{n-1} многогранников P , которые для определенности ниже называются элементарными. Приведем их индуктивное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. При $n = 1$ элементарным является отрезок $[A_0, A_1]$. При $n = 2$ элементарными многоугольниками являются прямоугольник высоты 1 с основанием $[A_0, A_1]$ и треугольник с вершиной A_2 и с тем же основанием $[A_0, A_1]$. При $n \geq 3$ к элементарным многогранникам в $\mathbb{R}^n$ относятся прямые призмы высоты 1 с элементарным основанием и пирамиды с вершиной A_n и тоже с элементарным основанием.

Нетрудно убедиться, например, индукцией по n , что каждый элементарный многогранник P находится между гиперплоскостями L_0 и L_n , причем на этих гиперплоскостях находится по одной вершине P . Куб K_n и симплекс S_n являются элементарными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Многогранники P', P'' в $\mathbb{R}^n$ считаем L -равновеликими относительно векторного подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$, $\dim L = k \geq 0$, если

$$\mathbf{V}_k(P' \cap (L + v)) = \mathbf{V}_k(P'' \cap (L + v)) \quad \text{для всех } v \in \mathbb{R}^n,$$

где $L + v = \{x + v : x \in L\}$.

Очевидно, L -равновеликость является отношением эквивалентности. По принципу Кавальери в случае вложения подпространств $L \subset \hat{L}$ из L -равновеликости многогранников P', P'' следует их $\hat{L}$ -равновеликость; в частности, при $\hat{L} = \mathbb{R}^n$ имеем $\mathbf{V}_n(P') = \mathbf{V}_n(P'')$.

ТЕОРЕМА 1. Все 2^{n-1} элементарных многогранников в $\mathbb{R}^n$ являются L_0 -равновеликими друг другу.

Как уже было отмечено, одно из доказательств этой теоремы получается непосредственным вычислением преобразований Лапласа функций объемов сечений. Соответствующие выкладки с интегралами дословно повторяют выше приведенное второе доказательство теоремы [1].

В п. 2 настоящей работы приводится элементарное геометрическое доказательство теоремы 1. Еще одно доказательство теоремы 1 получается путем непосредственного вычисления объемов сечений, а именно, в п. 3 доказывается следующая

ТЕОРЕМА 2. При каждом $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$, сечения $P \cap L_t$ для всех 2^{n-1} элементарных многогранников P в $\mathbb{R}^n$ имеют одинаковые $(n-1)$ -мерные объемы, равные

$$\mathbf{V}_{n-1}(P \cap L_t) = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{[t]} (-1)^j C_n^j (t-j)^{n-1}. \quad (1)$$

Вообще говоря, утверждение теоремы 2 является следствием теоремы 1 и хорошо известного значения для $\mathbf{V}_{n-1}(K_n \cap L_t)$. Вероятностное доказательство равенства (1) для $P = K_n$ можно получить, например, из рассуждений §9 главы 1 учебника [3] (см. с. 43). Основное содержание п. 3 состоит в получении независимого от теоремы 1 доказательства равенства (1) в случае произвольного элементарного многогранника P . Применяемый там способ определения объемов сечений может представлять самостоятельный интерес.

В общем случае выражение (1) получается благодаря представлению элементарных многогранников P в виде алгебраической суммы выпуклых конусов. Введем необходимые для этого понятия.

Пусть P – произвольный элементарный (для определенности) многогранник в $\mathbb{R}^n$. Точку $x \in \mathbb{R}^n$ будем считать особой, если она содержится в одной гиперплоскости с какой-либо $(n-1)$ -мерной гранью P . Остальные точки $\mathbb{R}^n$ считаем точками общего положения. Множество точек общего положения открыто. Оно разбивается на конечное число связных выпуклых областей $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{m-1}$, которые будем называть *ячейками*. Считаем Δ_0 внутренностью P .

Рассмотрим свободную абелеву группу $G \cong \mathbb{Z}^m$ с множеством образующих $\mathfrak{D} = \{\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{m-1}\}$. Сложение в G обозначаем через $\oplus$. Элементы в G имеют вид

$$\alpha_0 \Delta_0 \oplus \alpha_1 \Delta_1 \oplus \dots \oplus \alpha_{m-1} \Delta_{m-1} = \bigoplus_{i=0}^{m-1} \alpha_i \Delta_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

а сложение осуществляется по правилу

$$\left(\bigoplus_{i=0}^{m-1} \alpha_i \Delta_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{m-1} \beta_i \Delta_i \right) = \bigoplus_{i=0}^{m-1} (\alpha_i + \beta_i) \Delta_i.$$

Можно считать также, что группа G состоит из всевозможных отображений

$$\alpha: \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \alpha(\Delta_i) = \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Элементы группы G можно рассматривать как мультимножества, в которых кратности точек $x \in \mathbb{R}^n$ могут быть любыми целочисленными значениями, в том числе и отрицательными. В мультимножестве, отвечающем элементу $\bigoplus_{i=0}^{m-1} \alpha_i \Delta_i$, точки $x \in \Delta_i$ имеют кратность α_i . Кратности особых точек задаются произвольно. Сложение и вычитание в группе G можно воспринимать как соответствующие теоретико-множественные операции над мультимножествами в $\mathbb{R}^n$.

Для подмножества $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{D}$ элементу $g_{\mathfrak{X}} = \bigoplus_{i: \Delta_i \in \mathfrak{X}} \Delta_i \in G$ отвечает обычное подмножество точек $X \subset \mathbb{R}^n$: $X = \bigcup_{i: \Delta_i \in \mathfrak{X}} \Delta_i$. Тогда кратность точек $x \in \Delta_i \in \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{X}$ равна нулю, а для точек $y \in \Delta_i \in \mathfrak{X}$ кратность равна 1. При замыкании такого множества X к нему добавляются особые точки. Различие между множеством X и его замыканием $\overline{X}$ не принципиально для наших целей, связанных с вычислением объемов. Множества X и $\overline{X}$ можно не различать. Кратности особых точек не будем принимать во внимание. Это позволяет n -мерные многогранники и конусы в $\mathbb{R}^n$ с границами из особых точек считать элементами группы G , равными суммам в них содержащихся ячеек. Вместо Δ_0 можно писать P .

Пусть V – множество вершин элементарного многогранника P в $\mathbb{R}^n$. К каждой вершине $v \in V$ пристроим бесконечный выпуклый конус $\Lambda_v \in G$ с вершиной v и с протыкающими гиперплоскость L_{n+1} ребрами, находящимися на прямых vv' , где $v' \in V$ – смежные с v вершины P . Других ребер у Λ_v нет. В корректности задания конусов Λ_v , $v \in V$, множеством их ребер убедимся в п. 3 индукцией по n . Граница конуса Λ_v состоит из особых точек. Тогда $\Lambda_v = \bigoplus_{i: \Delta_i \in \mathfrak{X}} \Delta_i$ для некоторого подмножества $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{D}$. Особые точки могут быть и внутри конуса Λ_v .

Положим

$$V \cap L_j = \{A_{j1}, \dots, A_{jk_j}\}, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Для числа всех вершин многогранника P имеем $|V| = \sum_{j=0}^n k_j$. На гиперплоскостях L_0 и L_n находится по одной вершине элементарного многогранника P , поэтому $k_0 = k_n = 1$. Конус $\Lambda_{A_{ji}}$ далее обозначаем через Λ_{ji} .

Доказательство теоремы 2 опирается на следующую лемму.

ЛЕММА. Для любого элементарного многогранника P в $\mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} P = \Lambda_{01} \oplus (-1) \bigoplus_{i=1}^{k_1} \Lambda_{1i} \oplus (-1)^2 \bigoplus_{i=1}^{k_2} \Lambda_{2i} \oplus \dots \oplus (-1)^j \bigoplus_{i=1}^{k_j} \Lambda_{ji} \oplus \dots \\ \oplus (-1)^{n-1} \bigoplus_{i=1}^{k_{n-1}} \Lambda_{n-1,i} \oplus (-1)^n \Lambda_{n1} = \bigoplus_{j=0}^n (-1)^j \bigoplus_{i=1}^{k_j} \Lambda_{ji}. \end{aligned} \quad (2)$$

К вычислению $(n - 1)$ -мерных объемов сечений гиперплоскостями даже n -мерных параллелепипедов обращаются с давних пор и до настоящего времени (см., например, [4]–[6]). Выражения для объемов сечений из этих работ приводятся в п. 4 настоящей статьи в качестве примеров на применение равенств вида (2). Там же приводится элементарный вывод формулы (1) для куба K_n . Представление многогранников в виде алгебраических сумм выпуклых конусов по типу (2) может оказаться полезным с точки зрения вычисления объемов сечений и в более общих ситуациях, поскольку любой многогранник представляется объединением симплексов.

2. Геометрическое доказательство теоремы 1

Вначале сделаем несколько общих замечаний, относящихся к понятию L -равновеликости.

В $\mathbb{R}^{n+1}$ равновеликость будет рассматриваться, как правило, относительно подпространства $\tilde{L}_0$ из семейства параллельных гиперплоскостей

$$\tilde{L}_t = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1 + \dots + x_n + x_{n+1} = t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Будем представлять основания элементарных многогранников расположенными в горизонтальной гиперплоскости

$$\mathbb{R}_0^n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\} = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{R}},$$

вектор e_{n+1} направленным строго вертикально вверх. Полагаем $A_{n+1} = (n + 1)e_{n+1}$. Иногда для гиперплоскости $\mathbb{R}_0^n$ будет использоваться обозначение $\mathbb{R}^n$.

Нетрудно убедиться в L -равновеликости двух призм в $\mathbb{R}^{n+1}$ одинаковой высоты с основаниями P_i и $P_i + v_i$, $v_i \in \mathbb{R}^{n+1}$, $i = 1, 2$, если их нижние основания P_1, P_2 лежат в $\mathbb{R}_0^n$, являются L -равновеликими и $v_1 - v_2 \in L \cap \mathbb{R}_0^n$. По этим же соображениям L -равновеликими являются две пирамиды в $\mathbb{R}^{n+1}$ одинаковой высоты с L -равновеликими основаниями P_1, P_2 в $\mathbb{R}_0^n$ и соответствующими вершинами B_1, B_2 с $\overrightarrow{B_1 B_2} \in L \cap \mathbb{R}_0^n$.

По принципу Кавальери два многогранника P', P'' в $\mathbb{R}^n$ являются L -равновеликими, если, например, при некотором векторе $e \in L \setminus \{0\}$ для каждой прямой l , параллельной e , отрезки $P' \cap l$ и $P'' \cap l$ имеют одинаковую длину или, иначе, если P', P'' являются $\langle e \rangle_{\mathbb{R}}$ -равновеликими. Воспользуемся этим свойством для построения многогранников, L -равновеликих заданному многограннику P в $\mathbb{R}^n$. С каждой гиперплоскостью M в $\mathbb{R}^n$ будем связывать разбиение $\mathbb{R}^n = M^{(0)} \cup M \cup M^{(1)}$, где $M^{(0)}, M^{(1)}$ – открытые полупространства, ограниченные M . Пусть в $M^{(0)} \cap P$ имеется только одна вершина многогранника P . Обозначим ее A . Выберем другую точку A' в $M^{(0)}$ так, что отрезок $[A, A']$ параллелен M , и L . Через Y обозначим пирамиду с вершиной A' и с основанием $M \cap P$. Тогда многогранник $P' = (P \cap M^{(1)}) \cup Y$ будет L -равновеликим P . Чтобы это проверить, достаточно положить $e = \overrightarrow{AA'}$ и убедиться, что многогранники P, P' являются $\langle e \rangle_{\mathbb{R}}$ -равновеликими.

Описанную перестройку многогранника P в P' далее используем только в частной ситуации, когда $M \cap P$ является выпуклой оболочкой вершин P , содержащихся в M . Назовем такую перестройку *переносом* вершины A в точку A' . В результате переноса вершины A в A' некоторые вершины P , содержащиеся в M , могут оказаться внутри ребер нового многогранника P' .

Доказательство теоремы 1. Применим индукцию по n . При $n = 1$ и при $n = 2$ теорема 1 проверяется непосредственно. Проверим справедливость индуктивного перехода. Пусть все элементарные многогранники в $\mathbb{R}^n$ являются L_0 -равновеликими. Как уже отмечалось, две прямые призмы в $\mathbb{R}^{n+1}$ одинаковой высоты с L_0 -равновеликими нижними основаниями в $\mathbb{R}_0^n$ являются L_0 -, а значит, и $\tilde{L}_0$ -равновеликими, как и две пирамиды в $\mathbb{R}^{n+1}$ с общей вершиной и L_0 -равновеликими основаниями в $\mathbb{R}_0^n$ являются L_0 - и $\tilde{L}_0$ -равновеликими друг другу. В результате все призмы высоты 1 с элементарными основаниями $\tilde{L}_0$ -равновеликие, и все пирамиды с вершиной A_{n+1} и элементарными основаниями являются $\tilde{L}_0$ -равновеликими. В силу транзитивности отношения эквивалентности для доказательства теоремы 1 остается проверить $\tilde{L}_0$ -равновеликость в $\mathbb{R}^{n+1}$ прямой призмы P высоты 1 с основанием S_n и пирамиды S_{n+1} с тем же основанием S_n и с вершиной A_{n+1} .

Обозначим через $A'_0, A'_1, \dots, A'_n$ верхние вершины призмы P , $A'_i = A_i + e_{n+1}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Через $A''_0, A''_1, \dots, A''_n$ обозначим точки на отрезке $[A_0, A_{n+1}]$, $A''_i = (i+1)e_{n+1}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $A''_0 = A'_0$, $A''_n = A_{n+1}$. Симплекс с вершинами $B_0, \dots, B_k$ обозначаем $[B_0, \dots, B_k]$. Тогда

$$S_n = [A_0, A_1, \dots, A_n], \quad S_{n+1} = [A_0, A_1, \dots, A_n, A_{n+1}].$$

Рассмотрим последовательность усеченных призм $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n$ с одним и тем же нижним основанием S_n . Верхним основанием усеченной призмы P_j , $j = 0, 1, \dots, n$, является симплекс $[A''_j, A_1, \dots, A_j, A'_{j+1}, \dots, A'_n]$. В этой последовательности $P_0 = P$, $P_n = S_{n+1}$. Для доказательства теоремы 1 остается убедиться, что в нашей последовательности два соседних многогранника P_{j-1}, P_j , $j = 1, \dots, n$, являются $\tilde{L}_0$ -равновеликими. Тогда по транзитивности $\tilde{L}_0$ -равновеликими будут $P_0 = P$ и $P_n = S_{n+1}$.

Многогранник P_j получается из P_{j-1} в результате переноса вершины A'_j в A''_j . Для этого многогранник P_{j-1} предварительно пересекается гиперплоскостью M в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящей через вершины $A''_{j-1}, A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A'_{j+1}, \dots, A'_n$. В результате

$$M \cap P_{j-1} = [A''_{j-1}, A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A'_{j+1}, \dots, A'_n],$$

а вектор $\overrightarrow{A'_j A''_j} = \overrightarrow{A_j A''_{j-1}}$ параллелен M , и $\tilde{L}_0$. Это позволяет сделать заключение о корректности переноса вершины A'_j в A''_j и, тем самым, о $\tilde{L}_0$ -равновеликости многогранников P_{j-1} и P_j . Вершина A''_{j-1} в результате такого переноса пропадает, оказывается внутри ребра $[A_0, A''_j]$.

Теорема 1 доказана.

Используемый в приведенном доказательстве прием переноса отдельных вершин многогранника вдоль параллельного L_0 вектора с целочисленными координатами существенно расширяет семейство L_0 -равновеликих кубов K_n многогранников в $\mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами вершин. Как видно из этого доказательства, содержащее симплекс S_n семейство элементарных многогранников пополнилось специальными усеченными призмами. Следует еще иметь в виду, что если H – линейное преобразование, задаваемое умножением на целочисленную матрицу с определителем 1 и оставляющее инвариантными параллельные L_0 аффинные подпространства, то два многогранника, получающиеся один из другого под действием H , будут L_0 -равновеликими. В этой связи правомерен следующий вопрос: можно ли любой содержащий начало координат L_0 -равновеликий куб K_n выпуклый многогранник,

координаты вершин которого целочисленные, получить из K_n путем нескольких переносов вершин и указанных здесь преобразований H ?

3. Непосредственное вычисление объемов сечений элементарных многогранников

Настоящий пункт посвящен доказательствам леммы и теоремы 2.

Прежде чем доказывать лемму в общем случае, продемонстрируем ее справедливость для $n = 1, 2$ и частично для $n = 3$ с помощью рисунков 1, 2 и 3.

Рис. 1

На рис. 1 $n = 1$ и

$$\Lambda_{01} = \Delta_0 \oplus \Delta_2, \quad \Lambda_{11} = \Delta_2, \quad \Delta_0 = \Lambda_{01} \ominus \Lambda_{11} = \Lambda_{01} \oplus (-1)\Lambda_{11}.$$

Рис. 2

Для $n = 2$ на рис. 2(a)

$$\begin{aligned} \Lambda_{01} &= \Delta_0 \oplus \Delta_1 \oplus \Delta_2 \oplus \Delta_3, & \Lambda_{11} &= \Delta_2 \oplus \Delta_3, & \Lambda_{12} &= \Delta_1 \oplus \Delta_3, & \Lambda_{21} &= \Delta_3, \\ \Delta_0 &= \Lambda_{01} \ominus (\Lambda_{11} \oplus \Lambda_{12}) \oplus \Lambda_{21}, \end{aligned}$$

а на рис. 2(b)

$$\Lambda_{01} = \Delta_0 \oplus \Delta_1, \quad \Lambda_{11} = \Delta_1 \oplus \Delta_2, \quad \Lambda_{21} = \Delta_2, \quad \Delta_0 = \Lambda_{01} \ominus \Lambda_{11} \oplus \Lambda_{21}.$$

На рисунках 3(a), (b), (c), (d), относящихся к случаю $n = 3$, представлены все 4 элементарных многогранника в $\mathbb{R}^3$. Правее каждого из этих многогранников P изображены пересечения $\Lambda_v \cap L_4$ для всех вершин v многогранника P . Через w_{ij}

Рис. 3

на плоскости L_4 обозначена точка пересечения с L_4 прямой $v_i v_j$. Ниже для всех конусов Λ_v при $n = 3$ приводятся задания их вершинами v и пересечениями с L_4 .

На рис. 3(a)

$$\begin{aligned} \Lambda_{01} &= \Lambda_{v_0}, & \Lambda_{11} &= \Lambda_{v_1}, & \Lambda_{21} &= \Lambda_{v_2}, & \Lambda_{31} &= \Lambda_{v_3}, \\ \Lambda_{v_0} \cap L_4 &= [w_{01}, w_{02}, w_{03}], & \Lambda_{v_1} \cap L_4 &= [w_{01}, w_{12}, w_{13}], \\ \Lambda_{v_2} \cap L_4 &= [w_{02}, w_{12}, w_{23}], & \Lambda_{v_3} \cap L_4 &= [w_{03}, w_{13}, w_{23}]. \end{aligned}$$

На рис. 3(b)

$$\begin{aligned} \Lambda_{01} &= \Lambda_{v_0}, & \Lambda_{11} &= \Lambda_{v_1}, & \Lambda_{12} &= \Lambda_{v_2}, & \Lambda_{21} &= \Lambda_{v_3}, & \Lambda_{31} &= \Lambda_{v_4}, \\ \Lambda_{v_0} \cap L_4 &= [w_{01}, w_{02}, w_{04}], & \Lambda_{v_1} \cap L_4 &= [w_{01}, w_{13}, w_{14}], \\ \Lambda_{v_2} \cap L_4 &= [w_{02}, w_{23}, w_{24}], & \Lambda_{v_3} \cap L_4 &= [w_{13}, w_{23}, w_{34}], \\ \Lambda_{v_4} \cap L_4 &= [w_{04}, w_{24}, w_{34}, w_{14}] & \text{— выпуклый четырехугольник.} \end{aligned}$$

На рис. 3(c)

$$\begin{aligned} \Lambda_{01} &= \Lambda_{v_0}, & \Lambda_{11} &= \Lambda_{v_1}, & \Lambda_{12} &= \Lambda_{v_3}, \\ \Lambda_{21} &= \Lambda_{v_2}, & \Lambda_{22} &= \Lambda_{v_4}, & \Lambda_{31} &= \Lambda_{v_5}, \\ \Lambda_{v_0} \cap L_4 &= [w_{01}, w_{02}, w_{03}], & \Lambda_{v_1} \cap L_4 &= [w_{01}, w_{12}, w_{14}], \\ \Lambda_{v_3} \cap L_4 &= [w_{03}, w_{34}, w_{35}], & \Lambda_{v_2} \cap L_4 &= [w_{02}, w_{12}, w_{25}], \end{aligned}$$

$$\Lambda_{v_4} \cap L_4 = [w_{14}, w_{34}, w_{45}], \quad \Lambda_{v_5} \cap L_4 = [w_{25}, w_{35}, w_{45}].$$

На рис. 3(d)

$$\begin{aligned} \Lambda_{01} &= \Lambda_{v_0}, & \Lambda_{11} &= \Lambda_{v_1}, & \Lambda_{12} &= \Lambda_{v_2}, & \Lambda_{13} &= \Lambda_{v_4}, & \Lambda_{21} &= \Lambda_{v_3}, \\ \Lambda_{22} &= \Lambda_{v_5}, & \Lambda_{23} &= \Lambda_{v_6}, & \Lambda_{31} &= \Lambda_{v_7}, \\ \Lambda_{v_0} \cap L_4 &= [w_{01}, w_{02}, w_{04}], & \Lambda_{v_1} \cap L_4 &= [w_{01}, w_{13}, w_{15}], \\ \Lambda_{v_2} \cap L_4 &= [w_{02}, w_{23}, w_{26}], & \Lambda_{v_4} \cap L_4 &= [w_{04}, w_{45}, w_{46}], \\ \Lambda_{v_3} \cap L_4 &= [w_{13}, w_{23}, w_{37}], & \Lambda_{v_5} \cap L_4 &= [w_{15}, w_{45}, w_{57}], \\ \Lambda_{v_6} \cap L_4 &= [w_{26}, w_{46}, w_{67}], & \Lambda_{v_7} \cap L_4 &= [w_{37}, w_{57}, w_{67}]. \end{aligned}$$

У нас $P \cap L_4 = \emptyset$. Формально следующие из (2) равенства

$$0 = \Delta_0 \cap L_4 = \bigoplus_{j=0}^3 (-1)^j \bigoplus_{i=1}^{k_j} \Lambda_{ji} \cap L_4,$$

относящиеся к мультимножествам на L_4 , проверяются непосредственно по рис. 3. Это служит подтверждением справедливости пока не доказанного при $n \geq 3$ равенства (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ, к которому приступаем, предполагает задание бесконечных выпуклых конусов $\Lambda_{ji}, i = 1, \dots, k_j, j = 0, 1, \dots, n$, и затем проверку равенства (2).

Применяем индукцию по $n \geq 1$. При $n = 1$ и при $n = 2$ равенство (2) проверялось выше непосредственно с помощью рис. 1 и рис. 2.

Пусть $n \geq 2$. Обозначим через $\bar{\Lambda}_{ji}, j = 0, 1, \dots, n, i = 1, \dots, k_j$, конус, получающийся из Λ_{ji} центральной симметрией относительно его вершины A_{ji} . В общем случае для конуса Λ через $\bar{\Lambda}$ тоже обозначаем конус, центрально симметричный Λ относительно его вершины.

Вместе с равенством (2) будем проверять еще равенство

$$\bigoplus_{j=0}^n (-1)^j \bigoplus_{i=1}^{k_j} \bar{\Lambda}_{ji} = (-1)^n P. \quad (3)$$

При $n = 1$ и при $n = 2$ равенство (3) также проверяется с помощью рис. 1 и рис. 2.

Пусть равенства (2), (3) справедливы для элементарных многогранников размерности n и меньше, а Q является элементарным многогранником в $\mathbb{R}^{n+1}$, причем равенства (2), (3) относятся к его основанию P . Многогранник Q может быть призмой или пирамидой. Данные две возможности рассмотрим отдельно. Начнем с призм.

Для множества вершин V' призмы Q имеем $V' = V \cup (V + e_{n+1})$. Конус, пристраиваемый к вершине $v \in V'$, обозначаем через Λ'_v .

Через $\Lambda'_{ji}, j = 0, 1, \dots, n, i = 1, \dots, k_j$, и P' обозначим конус и цилиндр, состоящие из всех точек $\mathbb{R}^{n+1}$, расположенных соответственно над Λ_{ji} и P . Ребрами конуса $\Lambda'_{ji} = \Lambda'_{A_{ji}}$ являются ребра конуса Λ_{ji} и еще одно ребро, которое направлено вертикально вверх вдоль вектора e_{n+1} . Одна n -мерная грань конуса Λ'_{ji} содержится в $\mathbb{R}_0^n$ и совпадает с Λ_{ji} . Другие n -мерные грани Λ'_{ji} являются, соответственно, выпуклыми оболочками $(n-1)$ -мерных граней Λ_{ji} и дополнительного вертикального ребра $\{A_{ji} + te_{n+1} : t \geq 0\}$. Каждая такая грань содержится в одной гиперплоскости с n -мерной вертикальной гранью призмы Q .

Положим еще

$$\Lambda''_{ji} = \Lambda'_{ji} + e_{n+1} = \Lambda'_{A_{ji} + e_{n+1}}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, k_j,$$

$P'' = P' + e_{n+1}$, $\overline{P'}$ – зеркальное отражение P' относительно гиперплоскости $\mathbb{R}_0^n$, $\overline{P''}$ – зеркальное отражение P'' относительно гиперплоскости $\mathbb{R}_0^n + e_{n+1}$.

Непосредственно из равенств (2) и (3) получаем

$$\begin{aligned} P' &= \bigoplus_{j=0}^n (-1)^j \bigoplus_{i=1}^{k_j} \Lambda'_{ji}, & P'' &= \bigoplus_{j=0}^n (-1)^j \bigoplus_{i=1}^{k_j} \Lambda''_{ji}, \\ (-1)^n \overline{P'} &= \bigoplus_{j=0}^n (-1)^j \bigoplus_{i=1}^{k_j} \overline{\Lambda'_{ji}}, & (-1)^n \overline{P''} &= \bigoplus_{j=0}^n (-1)^j \bigoplus_{i=1}^{k_j} \overline{\Lambda''_{ji}}. \end{aligned}$$

Последнее равенство здесь можно также получить из предыдущего, так как $\overline{P''} = \overline{P'} + e_{n+1}$, $\overline{\Lambda''_{ji}} = \overline{\Lambda'_{ji}} + e_{n+1}$. Подставляя полученные выражения для P' , P'' , $(-1)^n \overline{P'}$, $(-1)^n \overline{P''}$ в равенства

$$Q = P' \oplus (-1)P'' = \overline{P''} \oplus (-1)\overline{P'} = (-1)(\overline{P'} \oplus (-1)\overline{P''}),$$

получаем

$$\begin{aligned} Q &= \Lambda'_{01} \oplus \bigoplus_{j=1}^n (-1)^j \left(\bigoplus_{i=1}^{k_{j-1}} \Lambda''_{j-1,i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{k_j} \Lambda'_{ji} \right) \oplus (-1)^{n+1} \Lambda''_{n1}, \\ (-1)^{n+1} Q &= \overline{\Lambda'_{01}} \oplus \bigoplus_{j=1}^n (-1)^j \left(\bigoplus_{i=1}^{k_{j-1}} \overline{\Lambda''_{j-1,i}} \oplus \bigoplus_{i=1}^{k_j} \overline{\Lambda'_{ji}} \right) \oplus (-1)^{n+1} \overline{\Lambda''_{n1}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тем самым доказали справедливость индуктивного перехода от n к $n+1$ для призмы Q – равенство (4) в размерности $n+1$ является аналогом равенства (2) в размерности n , а равенство для $(-1)^{n+1}Q$ – аналогом равенства (3). Чтобы окончательно в этом убедиться, заметим, что

$$\begin{aligned} V' \cap \tilde{L}_j &= (V \cup \{V + e_{n+1}\}) \cap \tilde{L}_j = (V \cap \tilde{L}_j) \cup ((V + e_{n+1}) \cap \tilde{L}_j) \\ &= (V \cap L_j) \cup (V \cap L_{j-1} + e_{n+1}) \\ &= \{A_{j1}, \dots, A_{jk_j}\} \cup \{A_{j-1,1} + e_{n+1}, \dots, A_{j-1,k_{j-1}} + e_{n+1}\}. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что это еще не доказывает справедливость леммы для призм. Необходимо убедиться в справедливости индуктивного перехода и для пирамид.

Пусть теперь Q – пирамида в $\mathbb{R}^{n+1}$ с вершиной A_{n+1} и с основанием в виде элементарного многогранника $P \subset \mathbb{R}_0^n$, для которого по предположению индукции имеют место равенства (2) и (3). Для множества вершин V' пирамиды Q имеем $V' = V \cup \{A_{n+1}\}$. Конус, пристраиваемый к вершине $v \in V'$, снова обозначаем через Λ'_v .

Для всех $j = 0, 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, k_j$ через $\Lambda'''_{ji} = \Lambda'_{A_{ji}}$ обозначим выпуклый конус с вершиной $A_{ji} \in V'$. Ребрами конуса Λ'''_{ji} являются ребра конуса Λ_{ji} и еще одно ребро, направленное вдоль вектора $\overrightarrow{A_{ji}A_{n+1}}$. Это ребро, заметим сразу, протыкает гиперплоскость L_{n+2} , потому как сумма всех $n+1$ координат каждой вершины A_{ji} многогранника P не превосходит n , а у A_{n+1} эта сумма равна $n+1$.

Через $\Lambda'''_{n+1,1}$ обозначим выпуклый конус с вершиной $A_{n+1,1} = A_{n+1}$ и ребрами вдоль векторов $\overrightarrow{A_{ji}A_{n+1}}$, $j = 0, 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, k_j$.

Как и в случае призмы, каждая n -мерная грань конуса Λ'_v , $v \in V'$, содержится в одной гиперплоскости с некоторой n -мерной гранью пирамиды Q .

Вначале докажем равенство

$$\bigoplus_{j=0}^n (-1)^j \bigoplus_{i=1}^{k_j} \Lambda_{ji}''' = Q \oplus (-1)^n \Lambda_{n+1,1}'''. \quad (5)$$

Будем проверять его отдельно на каждой гиперплоскости $\mathbb{R}_u^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = u\}$, $u \in \mathbb{R}$, параллельной $\mathbb{R}_0^n$. Это отвечает доказательству равенств

$$\bigoplus_{j=0}^n (-1)^j \bigoplus_{i=1}^{k_j} \Lambda_{ji}''' \cap \mathbb{R}_u^n = Q \cap \mathbb{R}_u^n \oplus (-1)^n \Lambda_{n+1,1}''' \cap \mathbb{R}_u^n. \quad (6)$$

При $u < 0$ последнее очевидно, так как в этом случае все присутствующие в (6) пересечения множеств пустые. Для $u = 0$ равенство (6) следует из (2), поскольку $\Lambda_{n+1,1}''' \cap \mathbb{R}_u^n = \emptyset$ при $u < n + 1$. Для $u < n + 1$ равенства (6) доказываются после этого привлечением гомотетии с положительным коэффициентом и с центром в A_{n+1} .

Особо нужно рассматривать случай $u > n + 1$, когда $\Lambda_{n+1,1}''' \cap \mathbb{R}_u^n \neq \emptyset$, а $Q \cap \mathbb{R}_u^n = \emptyset$. Пусть вначале $u = 2(n + 1)$. Многогранник $\Lambda_{n+1,1}''' \cap \mathbb{R}_{2(n+1)}^n$ центрально симметричен относительно A_{n+1} многограннику P , а конусы $\Lambda_{ji}''' \cap \mathbb{R}_{2(n+1)}^n$, $j < n + 1$, центрально симметричны конусам Λ_{ji} . Применяя данную центральную симметрию к равенствам (2), (3), получаем соответственно равенства

$$\begin{aligned} \Lambda_{n+1,1}''' \cap \mathbb{R}_{2(n+1)}^n &= \bigoplus_{j=0}^n (-1)^j \bigoplus_{i=1}^{k_j} \overline{\Lambda_{ji}''' \cap \mathbb{R}_{2(n+1)}^n}, \\ (-1)^n \Lambda_{ji}''' \cap \mathbb{R}_{2(n+1)}^n &= \bigoplus_{j=0}^n (-1)^j \bigoplus_{i=1}^{k_j} \Lambda_{ji}''' \cap \mathbb{R}_{2(n+1)}^n. \end{aligned}$$

Последнее является равенством (6) при $u = 2(n + 1)$. Для остальных $u > n + 1$ равенство (6) снова проверяется посредством гомотетии с положительным коэффициентом и с центром в A_{n+1} .

Равенство (6) справедливо и для $u = n + 1$. Чтобы в этом убедиться, достаточно вокруг каждой точки общего положения в $\mathbb{R}_{n+1}^n$ рассмотреть $(n + 1)$ -мерную окрестность $\mathcal{O}$, целиком состоящую из точек общего положения и, значит, не пересекающуюся с Q и с $\Lambda_{n+1,1}'''$. Кратность α' точек $\mathcal{O}$, задаваемая левой частью (5), постоянна. Кратность α'' точек $\mathcal{O}$, задаваемая правой частью (5), тоже постоянна. Уже доказано, что эти кратности нулевые на $\mathcal{O} \setminus \mathbb{R}_{n+1}^n$ как в верхней части, так и в нижней, поэтому $\alpha' = \alpha'' = 0$.

Аналог равенства (2) для пирамиды Q следует из (5), поскольку при переносе в нем слагаемого $(-1)^n \Lambda_{n+1,1}'''$ в левую часть получим слагаемое $(-1)^{n+1} \Lambda_{n+1,1}'''$.

Аналог равенства (3) для пирамиды Q записывается в виде

$$\bigoplus_{j=0}^n (-1)^j \bigoplus_{i=1}^{k_j} \overline{\Lambda_{ji}'''} \oplus (-1)^{n+1} \overline{\Lambda_{n+1,1}'''} = (-1)^{n+1} Q.$$

Чтобы убедиться в его справедливости, снова будем доказывать равенства

$$\bigoplus_{j=0}^n (-1)^j \bigoplus_{i=1}^{k_j} \overline{\Lambda_{ji}'''} \cap \mathbb{R}_u^n \oplus (-1)^{n+1} \overline{\Lambda_{n+1,1}'''} \cap \mathbb{R}_u^n = (-1)^{n+1} Q \cap \mathbb{R}_u^n \quad (7)$$

для различных $u \in \mathbb{R}$. Для $u > n + 1$ они очевидны, поскольку тогда $\overline{\Lambda_{ji}'''} \cap \mathbb{R}_u^n = \emptyset$, $j = 0, 1, \dots, n + 1$, $i = 1, \dots, k_j$, и $Q \cap \mathbb{R}_u^n = \emptyset$.

Если $u \in (0, n+1)$, то $\overline{\Lambda_{ji}'''} \cap \mathbb{R}_u^n = \emptyset$ при $j \leq n$. Поэтому (7) сводится к безусловно справедливому равенству $\overline{\Lambda_{n+1,1}'''} \cap \mathbb{R}_u^n = Q \cap \mathbb{R}_u^n$. При $u = n+1$ равенство (7) доказывается, как и (6), привлечением окрестностей точек общего положения $\mathcal{O}$.

При $u = 0$ вместо (7) (на множестве особых точек для Q) рассмотрим равенство

$$\bigoplus_{j=0}^n (-1)^j \bigoplus_{i=1}^{k_j} \overline{\Lambda_{ji}'''} \cap \mathbb{R}_0^n \oplus (-1)^{n+1} \overline{\Lambda_{n+1,1}'''} \cap \mathbb{R}_0^n = 0, \quad (8)$$

которое совпадает с равенством (3) для P , если там правую часть перенести в левую с заменой знака. Равенство (7) для $u < 0$ следует из (8) ввиду той же гомотетии с положительным коэффициентом и с центром в A_{n+1} , поскольку тогда $Q \cap \mathbb{R}_u^n = \emptyset$.

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Требуется вычислить значения $\mathbf{V}_{n-1}(P \cap L_t)$, $t \in [0, n]$, для элементарных многогранников P в $\mathbb{R}^n$. За единицу объема возьмем объем “эталоны” — $\mathbf{V}_{n-1}(\Lambda_{01} \cap L_1) = \sqrt{n}/(n-1)!$. Как правило, этот множитель в выражениях для $(n-1)$ -мерных объемов будет опускаться. Такой выбор “эталоны” правомерен, поскольку конус Λ_{01} один и тот же для всех элементарных многогранников — его вершина находится в начале координат, а ребра направлены по координатным осям.

Используя введенные в доказательстве леммы обозначения, с помощью равенства (2) ниже проверяется, что при $t > 0$

$$\mathbf{V}_{n-1}(P \cap L_t) = \sum_{j=0}^{[t]} (-1)^j C_n^j (t-j)^{n-1}. \quad (9)$$

Этого достаточно для доказательства теоремы. Равенство (9) будет доказываться с помощью непосредственно вытекающего из (2) равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{n-1}(P \cap L_t) &= \sum_{j=0}^{[t]} (-1)^j \sum_{i=1}^{k_j} \mathbf{V}_{n-1}(\Lambda_{ji} \cap L_t) \\ &= \sum_{j=0}^{[t]} (-1)^j (t-j)^{n-1} \sum_{i=1}^{k_j} \mathbf{V}_{n-1}(\Lambda_{ji} \cap L_{j+1}). \end{aligned}$$

Слагаемые с $j > [t]$ не присутствуют, так как в этом случае $\Lambda_{ji} \cap L_t = \emptyset$.

Обозначим

$$\mathbf{V}_{n-1}(\Lambda_{ji} \cap L_{j+1}) = w_{ji}^{(n)}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, k_j.$$

Здесь $w_{ji}^{(n)}$ — скалярная величина, характеризующая n -мерный конус Λ_{ji} . Она удобна тем, что $\mathbf{V}_{n-1}(\Lambda_{ji} \cap L_{j+\tau}) = \tau^{n-1} w_{ji}^{(n)}$ при $\tau > 0$. Для “эталоны” $w_{01}^{(n)} = 1$.

Равенство (9) будет доказано, если для каждого элементарного многогранника P в $\mathbb{R}^n$ проверить равенства $\sum_{i=1}^{k_j} w_{ji}^{(n)} = C_n^j$ при всех $j = 0, 1, \dots, n$. Докажем это индукцией по $n \geq 2$. При $n = 2$ требуемые равенства легко проверяются с помощью рис. 2 (а) и 2 (б). Исходя из индуктивного предположения, для элементарного многогранника Q в $\mathbb{R}^{n+1}$ проверим равенства

$$\sum_{i=1}^{\tilde{k}_j} w_{ji}^{(n+1)} = C_{n+1}^j, \quad j = 0, 1, \dots, n+1, \quad (10)$$

отдельно для призмы и пирамиды. В равенстве (10) $\tilde{k}_j$ – число вершин многогранника Q , лежащих на гиперплоскости $\tilde{L}_j = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1 + \dots + x_{n+1} = j\}$.

Если Q является призмой, то, как отмечалось при доказательстве леммы, $\tilde{k}_j = k_j + k_{j-1}$, $j = 1, \dots, n$, $\tilde{k}_0 = \tilde{k}_{n+1} = 1$, а равенство (10) следует из индуктивного предположения, выражения (4) и основного тождества для биномиальных коэффициентов. Для проверки этого положим

$$\begin{aligned} {}'w_{ji}^{(n+1)} &= \mathbf{V}_n(\Lambda'_{ji} \cap \tilde{L}_{j+1}), \quad i = 1, \dots, k_j, \quad j = 0, 1, \dots, n, \\ {}''w_{j-1,i}^{(n+1)} &= \mathbf{V}_n(\Lambda''_{j-1,i} \cap \tilde{L}_{j+1}) = \mathbf{V}_n((\Lambda'_{j-1,i} + e_{n+1}) \cap \tilde{L}_{j+1}) \\ &= \mathbf{V}_n(\Lambda'_{j-1,i} \cap \tilde{L}_j) = {}'w_{j-1,i}^{(n+1)}, \quad i = 1, \dots, k_{j-1}, \quad j = 1, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Длина высоты, опущенной из вершины $A_{ji} + e_{n+1}$ симплекса $\Lambda'_{ji} \cap \tilde{L}_{j+1}$ на противоположное ей основание, лежащее в $L_{j+1} \subset \mathbb{R}_0^n$, не зависит от номеров j, i (такая же, как для “эталоны”) при $j = 0, i = 1$, поэтому $w_{01}^{(n+1)} = 1$, $w_{n+1,1}^{(n+1)} = {}'w_{n1}^{(n+1)} = w_{n1}^{(n)} = 1$, а для $j = 1, \dots, n$ – $'w_{ji}^{(n+1)} = w_{ji}^{(n)}$, $i = 1, \dots, k_j$. В результате для $j = 1, \dots, n$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\tilde{k}_j} w_{ji}^{(n+1)} &= \sum_{i=1}^{k_j+k_{j-1}} w_{ji}^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{k_j} {}'w_{ji}^{(n+1)} + \sum_{i=1}^{k_{j-1}} {}''w_{j-1,i}^{(n+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{k_j} {}'w_{ji}^{(n+1)} + \sum_{i=1}^{k_{j-1}} {}'w_{j-1,i}^{(n+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{k_j} w_{ji}^{(n)} + \sum_{i=1}^{k_{j-1}} w_{j-1,i}^{(n)} = C_n^j + C_n^{j-1} = C_{n+1}^j. \end{aligned}$$

Пусть теперь Q является пирамидой. Тогда $\tilde{k}_j = k_j$, $j = 0, 1, \dots, n$, а $\tilde{k}_{n+1} = 1$. Скалярные величины $w_{ji}^{(n+1)}$ будут отличаться от тех, что были для призмы. Докажем, что

$$w_{ji}^{(n+1)} = \frac{n+1}{n+1-j} w_{ji}^{(n)} \quad \text{для } j = 0, 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, k_j.$$

Обратимся для этого к рис. 4. На нем жирными линиями выделены $(n-1)$ -мерные аффинные подпространства, три из них – L_0, L_j, L_{j+1} . Отрезок $[A_0, O]$ в $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}_0^n$ перпендикулярен этим трем подпространствам. Им же перпендикулярна и плоскость $\mathbb{R}_0^2$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащая точки A_0, A_{n+1}, O . На рис. 4

$$\begin{aligned} C &= \tilde{L}_{j+1} \cap [A_{ji}, A_{n+1}], & E &= \tilde{L}_{j+1} \cap [A_0, A_{n+1}], \\ \hat{A}_{ji} &= L_j \cap [A_0, O], & \hat{C} &= \tilde{L}_{j+1} \cap [\hat{A}_{ji}, A_{n+1}]. \end{aligned}$$

Отрезок $[\hat{A}_{ji}, F]$ параллелен $[A_0, A_{n+1}]$, поэтому длина отрезка $[F, O]$ равна высоте n -мерного “эталоны”. Через $\tilde{L}$ обозначена гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящая через A_{n+1} и L_j . Гиперплоскости L_j, L_{j+1} параллельны, поэтому им параллельно и пересечение $\tilde{L} \cap \tilde{L}_{j+1}$, проходящее через точки $\hat{C}$ и C . В силу этого длина высоты $[C, O''']$ пирамиды $\Lambda'''_{ji} \cap \tilde{L}_{j+1}$, опущенная из ее вершины C на основание $\Lambda_{ji} \cap L_{j+1}$, равна длине отрезка $[\hat{C}, O]$.

Рис. 4

По теореме Менелая

$$\frac{|[O, \widehat{C}]|}{|[E, O]|} = \frac{n+1}{(j+1)(n+1-j)}.$$

Откуда, поскольку $|[E, O]|/|[O, F]| = j+1$, имеем

$$\frac{|[O, \widehat{C}]|}{|[O, F]|} = \frac{n+1}{n+1-j}.$$

Таким образом, высота $[C, O''']$ пирамиды $\Lambda_{ji}''' \cap \tilde{L}_{j+1}$ в $(n+1)/(n+1-j)$ раз длиннее высоты n -мерного эталона, поэтому

$$w_{ji}^{(n+1)} = \frac{n+1}{n+1-j} w_{ji}^{(n)}.$$

Обратим внимание, что рис. 4 можно использовать и при $j = n$. Тогда $\widehat{C} = C = E = A_{n+1}$ и теорема Менелая не требуется. При $j = 0$ равенство $w_{01}^{(n+1)} = w_{01}^{(n)}$ следует из того, что $\Lambda_{01}''' = \Lambda_{01}'$. Пересечение этих конусов с $\tilde{L}_1$ является n -мерным “эталонном”.

По только что доказанному и по предположению индукции для $j = 0, 1, \dots, n$ имеем

$$\sum_{i=0}^{k_j} w_{ji}^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{k_j} \frac{n+1}{n+1-j} w_{ji}^{(n)} = \frac{n+1}{n+1-j} C_n^j = C_{n+1}^j.$$

В случае пирамиды осталось проверить, что $w_{n+1,1}^{(n+1)} = 1$. С этой целью вычислим $\mathbf{V}_n(Q \cap \tilde{L}_{n+2})$ с помощью выражения (2), причем отдельно для призмы и пирамиды. Поскольку $Q \cap \tilde{L}_{n+2} = \emptyset$, то $\mathbf{V}_n(Q \cap \tilde{L}_{n+2}) = 0$, поэтому в случае призмы имеем

$$0 = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{n+1}^j (n+2-j)^n + (-1)^{n+1},$$

а в случае пирамиды –

$$0 = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{n+1}^j (n+2-j)^n + (-1)^{n+1} w_{n+1,1}^{(n+1)},$$

откуда и заключаем, что $w_{n+1,1}^{(n+1)} = 1$.

Теорема 2 полностью доказана.

4. Примеры на использование равенств вида (2)

4.1. Приведем равенства (2) для исходных многогранников – куба K и симплекса S , рассмотренных в работе [1]. Пусть V_n – множество вершин куба K , а Λ_j , $j = 0, 1, \dots, n$, выпуклый конус с вершиной A_j и реберными лучами, направленными вдоль векторов $\overrightarrow{A_0 A_j}, \overrightarrow{A_1 A_j}, \dots, \overrightarrow{A_{j-1} A_j}, \overrightarrow{A_j A_{j+1}}, \dots, \overrightarrow{A_j A_n}$. Тогда

$$\begin{aligned} K &= \Lambda_0 \oplus (-1) \bigoplus_{v \in V_n: \|v\|=1} (v + \Lambda_0) \oplus (-1)^2 \bigoplus_{v \in V_n: \|v\|=2} (v + \Lambda_0) \oplus \\ &\quad \dots \oplus (-1)^j \bigoplus_{v \in V_n: \|v\|=j} (v + \Lambda_0) \oplus \\ &\quad \dots \oplus (-1)^{n-1} \bigoplus_{v \in V_n: \|v\|=n-1} (v + \Lambda_0) \oplus (-1)^n \bigoplus_{v \in V_n: \|v\|=n} (v + \Lambda_0), \quad (11) \end{aligned}$$

$$S = \Lambda_0 \oplus (-1) \Lambda_1 \oplus (-1)^2 \Lambda_2 \oplus \dots \oplus (-1)^j \Lambda_j \oplus \dots \oplus (-1)^n \Lambda_n. \quad (12)$$

Последнее равенство имеет простое объяснение. Пусть $\mathfrak{L}_j$, $j = 0, 1, \dots, n$, – гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, содержащая грань симплекса S , противоположную вершине A_j . В разбиении $\mathbb{R}^n = \mathfrak{L}_j^{(0)} \cup \mathfrak{L}_j \cup \mathfrak{L}_j^{(1)}$ обозначаем через $\mathfrak{L}_j^{(1)}$ полупространство, содержащее внутренность S . Все $2^{n+1} - 1$ возникающих ячеек представляются в виде

$$\Delta_{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} = \bigcap_{j=0}^n \mathfrak{L}_j^{(\varepsilon_j)}, \quad (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in V_{n+1} \setminus \{0\}.$$

Игнорируя особые точки, имеем

$$\Lambda_j = \Delta_{\underbrace{0 \dots 0}_j \underbrace{1 \dots 1}_{n+1-j}} \cup \Delta_{\underbrace{0 \dots 0}_{j+1} \underbrace{1 \dots 1}_{n-j}}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad \Lambda_n = \Delta_{0 \dots 01}.$$

После этого равенство (12) становится очевидным.

Выражение (1) для $P = K_n$ является непосредственным следствием (11).

При наличии равенств (11), (12) для доказательства приведенной в начале статьи теоремы работы [1] достаточно убедиться, что

$$\mathbf{V}_{n-1}(\Lambda_j \cap L_{j+1}) = \binom{n}{j} \mathbf{V}_{n-1}(\Lambda_0 \cap L_1). \quad (13)$$

Это фактически было проверено в конце доказательства теоремы 2 с помощью рис. 4 и теоремы Менелая. Приведенные там рассуждения показывают, что высота $(n-1)$ -мерного симплекса $\Lambda_j \cap L_{j+1}$, опущенная из его вершины

$$\frac{1}{n-j} \overrightarrow{A_n} + \frac{n-j-1}{n-j} \overrightarrow{A_j}$$

на противоположное основание, в $n/(n-j)$ раз длиннее высоты $(n-1)$ -мерного эталона $\Lambda_0 \cap L_1$. После этого равенство (13) доказывается индукцией по n с помощью равенства $C_n^j = (n/(n-j))C_{n-1}^j$.

4.2. Выражения (2) позволяют достаточно просто вычислять объемы сечений элементарных многогранников произвольными гиперплоскостями, не только параллельными L_0 .

В качестве примера приведем вычисляемое вероятностными методами в работе [4] значение $\mathbf{V}_{n-1}(\Pi \cap L_t)$ для прямоугольного параллелепипеда Π размера $b_1 \times \dots \times b_n$ с множеством вершин $B_n = \{(\varepsilon_1 b_1, \dots, \varepsilon_n b_n) : (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in V_n\}$. Для Π имеет место представление вида (11), нужно только там V_n заменить на B_n и полагать $\|v\| = \|(v_1, \dots, v_n)\| = v_1 + \dots + v_n$, $|v| = |\{i = 1, \dots, n : v_i \neq 0\}|$. После этого из рассуждений приведенного доказательства теоремы 2 получаем

$$\mathbf{V}_{n-1}(\Pi \cap L_t) = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} \sum_{v \in B_n : \|v\| < t} (-1)^{|v|} (t - \|v\|)^{n-1}. \quad (14)$$

К вычислению объемов сечений параллелепипедов обращаются до настоящего времени (см., например, [5], [6], [13]). В работе [5] рассматриваются сечения куба $C_n = [-1, 1]^n$, $n \geq 2$, гиперплоскостями $H_b = \{x \in \mathbb{R}^n : (a, x) = b\}$, где $b \in \mathbb{R}$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $a_1^2 + \dots + a_n^2 = 1$. Гиперплоскость H_b отстоит от начала координат на расстоянии $|b|$. В работе [5] (тоже вероятностным методом) доказывается, что

$$\mathbf{V}_{n-1}(C_n \cap H_b) = \frac{1}{\pi} \cdot 2^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^n \frac{\sin a_k t}{a_k t} \right) \cdot \cos bt \, dt.$$

В работе [6] другим аналитическим методом с привлечением свертки n ступенчатых функций получено выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{n-1}(C_n \cap H_b) \\ = \frac{1}{2(n-1)!} \cdot \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{-1} \sum_{w \in \{-1, 1\}^n} ((a, w) + b)^{n-1} \operatorname{sgn}((a, w) + b) \cdot \prod_{k=1}^n w_k. \end{aligned} \quad (15)$$

По симметрии значение $\mathbf{V}_{n-1}(C_n \cap H_b)$ не изменится после изменения знака у b и/или у некоторых координат вектора a , поэтому можно считать $b > 0$, $a_i > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Подобное (15) выражение получается также непосредственно из представления куба C_n выражением типа (11), но в котором для удобства вместо Λ_0 лучше использовать центрально симметричный ему конус $\bar{\Lambda}_0$. Выражение для $\mathbf{V}_{n-1}(C_n \cap H_b)$ повторяет (14), нужно только знать $\mathbf{V}_{n-1}(\bar{\Lambda}_0 \cap H_{-1})$. Вычисляя двумя способами n -мерный объем симплекса, отсекаемого от конуса $\bar{\Lambda}_0$ гиперплоскостью H_{-1} , имеем

$$\frac{1}{n!} \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{-1} = \frac{1}{n} \mathbf{V}_{n-1}(\bar{\Lambda}_0 \cap H_{-1}),$$

откуда

$$\mathbf{V}_{n-1}(\bar{\Lambda}_0 \cap H_{-1}) = \frac{1}{(n-1)!} \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{-1}.$$

После этого по аналогии с (14) получаем

$$\mathbf{V}_{n-1}(C_n \cap H_b) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{-1} \sum_{w \in \{-1,1\}^n : (a,w) > b} ((a,w) - b)^{n-1} \cdot \prod_{k=1}^n w_k. \quad (16)$$

Равенства выражений (15) и (16) проверяются и непосредственно. Действительно,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{w \in \{-1,1\}^n : (a,w) + b > 0} ((a,w) + b)^{n-1} \prod_{k=1}^n w_k \\ & - \frac{1}{2} \sum_{w \in \{-1,1\}^n : (a,w) + b < 0} ((a,w) + b)^{n-1} \prod_{k=1}^n w_k \\ & = \frac{1}{2} \sum_{w \in \{-1,1\}^n} ((a,w) + b)^{n-1} \prod_{k=1}^n w_k \\ & - \sum_{w \in \{-1,1\}^n : (a,w) + b < 0} ((a,-w) - b)^{n-1} (-1)^{n-1} (-1)^n \prod_{k=1}^n (-w_k) \\ & = \frac{1}{2} \sum_{w \in \{-1,1\}^n} ((a,w) + b)^{n-1} \prod_{k=1}^n w_k + \sum_{u \in \{-1,1\}^n : (a,u) - b > 0} ((a,u) - b)^{n-1} \prod_{k=1}^n u_k. \end{aligned}$$

Для подтверждения равенства выражений (15) и (16) осталось проверить тождество

$$\sum_{w \in \{-1,1\}^n} (a_1 w_1 + \dots + a_n w_n + b)^{n-1} \prod_{k=1}^n w_k = 0 \quad \text{при любых } a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

С точностью до ненулевого множителя $(n-1)!/(i_1! \dots i_n! \cdot i_{n+1}!)$ коэффициент при одночлене $a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} b^{i_{n+1}}$ в левой части (17) выражается через подмножество индексов

$$I = I(i_1, \dots, i_n) = \{k = 1, \dots, n : i_k \equiv 0 \pmod{2}\} \subseteq \{1, \dots, n\},$$

$1 \leq |I| \leq n$, и равен

$$\begin{aligned} \sum_{w \in \{-1,1\}^n} w_1^{i_1+1} \dots w_n^{i_n+1} &= \sum_{w \in \{-1,1\}^n} \prod_{k \in I} w_k \\ &= 2^{n-m} \sum_{u \in \{-1,1\}^m} \prod_{k=1}^m u_k = 2^{n-m} \sum_{s=0}^m (-1)^s C_m^s = 0. \end{aligned}$$

Здесь $m = |I| \geq 1$, так как $i_1 + \dots + i_n \leq n-1$.

4.3. По аналогии с рис. 3(а) в общем случае сечения конусов, содержащихся в выражении (12), гиперплоскостью L_t , $t > n$, предоставляют

$$\left(\binom{n+1}{2}_{n-1}, \binom{n+1}{3}_3 \right)$$

конфигурацию [7]. При $n = 4$ получаем уникальную (10_3) конфигурацию Дезарга (см. [7; с. 1079, рис. 8]). Представление точек и прямых конфигурации, соответственно, ребрами и 2-мерными гранями симплекса S_4 предоставляет наиболее органичную на сегодняшний день модель конфигурации Дезарга (см. [8]–[10]). В этой модели все известные ее свойства получают простое и достаточно элементарное объяснение, в частности, группа автоморфизмов конфигурации Дезарга изоморфна симметрической группе $\mathfrak{S}_5$ – группе перестановок 5 вершин симплекса.

4.4. Сечение конусов, содержащихся в выражении (11), гиперплоскостью L_n и ограничение самого выражения (11) на L_n уже использовалось автором в работе [11] для получения верхней оценки на порядок инвариантного дифференциала n вещественных функций одной переменной, что позволило дать ответ на вопрос доклада [12] о числе инвариантных дифференциалов высших порядков.

В заключение автор выражает благодарность А. М. Зубкову, обратившего его внимание на теорему работы [1], за высказанные критические замечания в ходе подготовки статьи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Зубков, “Вероятностное доказательство одной геометрической теоремы”, *Матем. заметки*, **26:6** (1979), 957–959.
- [2] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, М., 1987.
- [3] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, Т. 2, Мир, М., 1984.
- [4] A. M. Ostrowski, “Two explicit formulae for the distribution function of the sum of n uniformly distributed independent variables”, *Arch. Math.*, **3:6** (1952), 451–459.
- [5] K. Ball, “Cube slicing in $\mathbb{R}^n$ ”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **97:3** (1986), 465–473.
- [6] R. Frank, H. Riede, “Hyperplane sections of the n -dimensional cube”, *Amer. Math. Monthly*, **119:10** (2012), 868–872.
- [7] *Математическая энциклопедия*, Т. 2, Советская энциклопедия, М., 1979.
- [8] М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия*, Наука, М., 1979.
- [9] Ф. Картеси, *Введение в конечные геометрии*, Наука, М., 1980.
- [10] Дж. Х. Мейсон, “Изучение матроидов как геометрических конфигураций”, *Проблемы комбинаторного анализа, Новое в зарубежной науке*, **19**, Мир, М., 1980, 7–50.
- [11] Ф. М. Малышев, “Симплециальные системы линейных уравнений”, *Алгебра*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1980, 53–56.
- [12] O. Veblen, “Differential invariants and geometry”, *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, Vol. 1, Bologna, 1928, 181–189.
- [13] J.-L. Marichal, M. J. Mossinghoff, “Slices, slabs, and sections of the unit hypercube”, *Online J. Anal. Comb.*, **3** (2008), Art. 1.

Ф. М. Малышев

Математический институт им. В. А. Стеклова,
г. Москва
E-mail: malyshevfm@mi.ras.ru

Поступило

13.06.2013