Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Бородин, Примеры множеств с заданными аппроксимативными свойствами в WCG -пространстве, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 5, 643–647

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10331>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:04:10

Примеры множеств с заданными аппроксимативными свойствами в WCG -пространстве

П. А. Бородин

В произвольном слабо компактно порожденном банаховом пространстве (WCG -пространстве) строится пример нетривиального выпуклого ограниченного чебышевского множества. В произвольном бесконечномерном WCG -пространстве строится пример ограниченного аппроксимативно компактного, но не локально компактного множества.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm10331

Пусть M – некоторое подмножество банахова пространства X ,

$$\rho(x, M) := \inf\{\|x - y\| : y \in M\}$$

– расстояние от элемента $x \in X$ до множества M ,

$$P_M(x) = \{y \in M : \|x - y\| = \rho(x, M)\}$$

– метрическая проекция элемента x на множество M .

Множество M называется *чебышевским*, если для любого $x \in X$ метрическая проекция $P_M(x)$ одноточечна, т.е. в M существует и единственен элемент, ближайший к x .

Множество M называется *аппроксимативно компактным*, если для любого $x \in X$ всякая минимизирующая последовательность $\{y_n\} \subset M$ (т.е. последовательность со свойством $\|y_n - x\| \rightarrow \rho(x, M)$ при $n \rightarrow \infty$) содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из M .

Понятия чебышевского множества и аппроксимативно компактного множества были введены Ефимовым и Стечкиным [1], [2] и относятся к числу основных понятий теории приближений в нормированных пространствах [3].

В рефлексивном строго выпуклом пространстве X всякое выпуклое замкнутое множество является чебышевским. Имеются также многочисленные примеры нетривиальных (т.е. непустых, не одноточечных и не совпадающих со всем X) чебышевских множеств в конкретных нерелексивных или не строго выпуклых пространствах X . Однако до сих пор не решена

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00952а).

ЗАДАЧА 1. *Во всяком ли банаховом пространстве существует нетривиальное чебышевское множество?*

В любом пространстве X всякое ограниченно компактное множество (т.е. множество, пересечение которого с любым замкнутым шаром компактно) является аппроксимативно компактным. В связи с этим естественно возникла и также до сих пор не решена

ЗАДАЧА 2. *Во всяком ли бесконечномерном банаховом пространстве существует аппроксимативно компактное, но не ограниченно компактное множество?*

Ранее задача 2 была положительно решена в классе сепарабельных и в классе рефлексивных пространств. Именно, в произвольном бесконечномерном сепарабельном пространстве имеется пример ограниченного, аппроксимативно компактного, но не компактного множества [4]. В [5] этот пример был модифицирован так, что получилось даже ограниченное, аппроксимативно компактное, но не локально компактное множество (локальная компактность множества M означает, что у всякой его точки есть окрестность, пересечение которой с M предкомпактно). В произвольном рефлексивном пространстве имеется пример выпуклого аппроксимативно компактного тела [6].

Цель настоящей заметки – построить примеры нетривиального чебышевского множества с дополнительными свойствами (теорема 1) и ограниченного аппроксимативно компактного, но не локально компактного множества (теорема 2) в произвольном (в теореме 2 – бесконечномерном) слабо компактно порожденном банаховом пространстве (WCG -пространстве). Напомним, что банахово пространство X называется *слабо компактно порожденным*, если существует слабо компактное множество $K \subset X$, линейная оболочка которого плотна в X . Класс WCG -пространств включает в себя все сепарабельные и все рефлексивные пространства.

Основные методы построения нижеследующих примеров развиты в [4]–[6], а возможность применения этих методов к WCG -пространствам обусловлена следующим результатом Дэвиса, Фигеля, Джонсона и Пелчинского [7].

ТЕОРЕМА А ([7], см. также [8; гл. 5, § 4]). *Банахово пространство X является слабо компактно порожденным тогда и только тогда, когда существует рефлексивное пространство V и такой инъективный линейный непрерывный оператор $A: V \rightarrow X$, что образ $A(V)$ является всюду плотным в X подмножеством.*

Перейдем к изложению основных результатов.

ТЕОРЕМА 1. *В любом WCG -пространстве X существует чебышевское множество M со следующими дополнительными свойствами: M выпукло, ограничено, аппроксимативно компактно, и $\rho(x, M) < \|x\|$ для любого ненулевого элемента $x \in X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – WCG -пространство. Возьмем рефлексивное пространство V и оператор A из теоремы А. В силу теоремы Троянского [9] пространство V можно считать локально равномерно выпуклым (т.е. из условий $v_n, v \in V$, $\|v_n\| = \|v\| = 1$, $\|v_n + v\| \rightarrow 2$ следует $\|v_n - v\| \rightarrow 0$).

Пусть B_V – замкнутый единичный шар пространства V . Докажем, что $M := A(B_V)$ – искомое чебышевское множество.

Как нетрудно видеть, множество M выпукло и ограничено. Его аппроксимативная компактность (даже при более слабых условиях на пространство V) доказывалась в [6]. Приведем это рассуждение для полноты изложения.

Докажем вначале, что M замкнуто. Пусть $x_n = A(v_n) \rightarrow x$, $v_n \in B_V$. Шар B_V слабо компактен (теорема Банаха–Алаоглу), и по теореме Эберлейна–Шмульяна из последовательности $\{v_n\}$ можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу $v \in B_V$. Отсюда $x = A(v) \in M$.

Возьмем произвольный элемент $x \in X$. Если $x \in M$, то любая минимизирующая последовательность $\{y_n\} \subset M$ сходится к x .

Пусть $x \notin M$, т.е. $\rho = \rho(x, M) > 0$. По лемме об отделимости (см., например, [10; гл. 5, § 2]) существует ненулевой функционал $f \in X^*$, разделяющий выпуклое множество M и не пересекающийся с ним открытый шар

$$B(x, \rho) = \{z \in X : \|z - x\| < \rho\},$$

т.е. для некоторого числа c имеем $f|_M \leq c$, $f|_{B(x, \rho)} > c$. Так как $B(x, \rho + \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$ для любого $\varepsilon > 0$, то

$$c = \sup\{f(y) : y \in M\}, \quad f(x) - c = \sup\{f(z) : \|z\| \leq \rho\} = \rho\|f\|.$$

Отсюда

$$\rho\|f\| = f(x) - \sup_{y \in M} f(y) = f(x) - \sup_{v \in B_V} f(A(v)) = f(x) - \|A^*(f)\|.$$

Теперь возьмем произвольную минимизирующую последовательность $\{y_n\} \subset M$: $\|x - y_n\| \rightarrow \rho$. Имеем

$$\|x - y_n\| \cdot \|f\| \geq f(x - y_n) \geq f(x) - \sup_{y \in M} f(y) = f(x) - \|A^*(f)\|.$$

С другой стороны,

$$\|x - y_n\| \cdot \|f\| \rightarrow \rho\|f\| = f(x) - \|A^*(f)\|.$$

Следовательно, $f(y_n) \rightarrow \|A^*(f)\|$. Полагая $y_n = A(v_n)$, где $v_n \in B_V$, имеем

$$f(A(v_n)) = A^*(f)(v_n) \rightarrow \|A^*(f)\|.$$

Функционал $A^*(f) \neq 0$ (поскольку образ $A(V)$ плотен в X , оператор A^* имеет тривиальное ядро), и существует вектор $v \in B_V$, на котором этот функционал достигает своей нормы: $A^*(f)(v) = \|A^*(f)\|$ (пространство V рефлексивно). Но тогда

$$\|v + v_n\| \geq \frac{A^*(f)(v + v_n)}{\|A^*(f)\|} \rightarrow 2,$$

откуда в силу локальной равномерной выпуклости пространства V получаем

$$\|v_n - v\| \rightarrow 0, \quad y_n \rightarrow A(v).$$

Таким образом, множество M аппроксимативно компактно.

Поскольку образ $A(V)$ плотен в X , для любого ненулевого $x \in X$ найдутся такие вектор $z \in M$ и число $\lambda > 0$, что $\|x - \lambda z\| < \|x\|/2$. Если $\lambda \leq 1$, то $\lambda z \in M$ и $\rho(x, M) \leq \|x - \lambda z\| < \|x\|$. Если же $\lambda > 1$, то

$$\rho(x, M) \leq \|x - z\| \leq \left\| \frac{x - \lambda z}{\lambda} \right\| + \left\| \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)x \right\| < \frac{\|x\|}{2\lambda} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\|x\| < \|x\|.$$

Итак, $\rho(x, M) < \|x\|$ для любого $x \neq 0$.

Осталось доказать, что множество M чебышевское.

Поскольку M аппроксимативно компактно, оно является множеством существования, т.е. метрическая проекция $P_M(x)$ непуста для любого $x \in X$. Докажем, что $P_M(x)$ состоит из не более чем одной точки.

Если $\rho(x, M) = 0$, то $P_M(x) = \{x\}$.

Если $\rho(x, M) > 0$ и $y_1, y_2 \in P_M(x)$, $y_1 \neq y_2$, то в силу выпуклости M элемент $y = (y_1 + y_2)/2$ также лежит в $P_M(x)$. Элемент $v = A^{-1}(y)$ является серединой отрезка с концами $v_k = A^{-1}(y_k) \in B_V$, $k = 1, 2$, а значит, входит в B_V вместе с некоторой своей окрестностью $v + \varepsilon B_V$, где $\varepsilon > 0$ (пространство V строго выпукло). Но тогда $A(v + \varepsilon B_V) = y + \varepsilon M \subset M$, и

$$\rho(x, M) \leq \rho(x, y + \varepsilon M) = \rho(x - y, \varepsilon M) = \varepsilon \rho\left(\frac{x - y}{\varepsilon}, M\right) < \varepsilon \left\| \frac{x - y}{\varepsilon} \right\| = \rho(x, M)$$

(строгое неравенство объясняется доказанным выше свойством множества M). Полученное противоречие доказывает, что $P_M(x)$ одноточечна.

Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *В любом бесконечномерном WCG-пространстве существует ограниченное, аппроксимативно компактное, но не локально компактное множество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если построенное в доказательстве теоремы 1 множество M не компактно, то оно искомое. Действительно, M ограничено, аппроксимативно компактно и не локально компактно в точке 0: если пересечение $U(0) \cap M$ предкомпактно для некоторой окрестности $U(0)$, то и M компактно, поскольку $M \subset \lambda(U(0) \cap M)$ для достаточно большого $\lambda > 0$.

Если же множество M из теоремы 1 компактно, то пространство X сепарабельно: $\bigcup_{n=1}^{\infty} nM = A(V)$ плотно в X . Для сепарабельного же пространства X утверждение теоремы 2 уже доказывалось [5].

Можно, впрочем, построить и само M до искомого множества. Именно, возьмем в X последовательность $\{x_n\}$ со свойствами

$$\|x_n\| = 1, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| \geq \|x\| \quad \text{для любого } x \in X$$

(построение такой последовательности в сепарабельном X приведено в [4]), положим $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, x_n]$ (отрезки с концами 0 и x_n в пространстве X) и докажем, что ограниченное множество $M' = M \cup E$ — искомое.

Множество M' не локально компактно в нуле: всякая окрестность нуля содержит последовательность вида $\{\varepsilon x_n\} \subset M'$ ($\varepsilon > 0$), из которой не извлекается сходящаяся подпоследовательность.

M' аппроксимативно компактно: $0 \in M'$, а для всякого элемента $x \neq 0$ имеем

$$\rho(x, M') \leq \rho(x, M) < \|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x - t_n x_n\|$$

при любых числах $t_n \in [0, 1]$, поэтому всякая минимизирующая последовательность $\{y_k\} \subset M'$, $\|x - y_k\| \rightarrow \rho(x, M')$, принадлежит объединению M с конечным числом отрезков $[0, x_n]$, а значит (в силу компактности M), из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В доказательстве теоремы А пространство V и оператор A строятся явно, поэтому примеры множеств из теорем 1 и 2 можно считать конструктивными.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В доказательстве теоремы 2 по существу показано, что если оператор $A: V \rightarrow X$ не компактный, то в пространстве X имеется *выпуклое*, ограниченное, аппроксимативно компактное, но не локально компактное множество M . Вопрос о существовании такого множества M в произвольном бесконечномерном сепарабельном пространстве X , поставленный в [6], остается открытым. В [6] такое множество построено в каждом из пространств c_0 , c , $L_1[0, 1]$, $C[0, 1]$, l_1 (для $X = l_1$ вообще нет некомпактных операторов $A: V \rightarrow X$), а в пространстве c_0 имеется даже пример выпуклого аппроксимативно компактного тела [11].

Автор благодарен С. В. Конягину за постановку задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин, “Некоторые свойства чебышевских множеств”, *Докл. АН СССР*, **118**:1 (1958), 17–19.
- [2] Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин, “Аппроксимативная компактность и чебышевские множества”, *Докл. АН СССР*, **140**:3 (1961), 522–524.
- [3] Л. П. Власов, “Редкие аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах”, *УМН*, **28**:6 (1973), 3–66.
- [4] П. А. Бородин, “Пример ограниченного аппроксимативно компактного множества, не являющегося компактным”, *УМН*, **49**:4 (1994), 157–158.
- [5] И. А. Пятыхев, “Пример ограниченного аппроксимативно компактного множества, не являющегося локально компактным”, *УМН*, **62**:5 (2007), 163–164.
- [6] П. А. Бородин, “О выпуклых аппроксимативно компактных множествах и пространствах Ефимова–Стечкина”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем., мех.*, 1999, № 4, 19–21.
- [7] W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson, A. Pełczyński, “Factoring weakly compact operators”, *J. Funct. Anal.*, **17**:3 (1974), 311–327.
- [8] Дж. Дистель, *Геометрия банаховых пространств. Избранные главы*, Вища школа, Киев, 1980.
- [9] S. Troyanski, “On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non-separable Banach spaces”, *Studia Math.*, **37**:2 (1971), 173–180.
- [10] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*. Т. 1. *Общая теория*, ИЛ, М., 1962.
- [11] И. А. Пятыхев, “Пример выпуклого аппроксимативно компактного тела в пространстве c_0 ”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, № 3, 57–59.

П. А. Бородин

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: pborodin@inbox.ru

Поступило

19.11.2010