Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Федотов, О реализуемости обобщенного соленоида как гиперболического аттрактора диффеоморфизма сферы, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 5, 733–744

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10332>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 11:41:26

О реализуемости обобщенного соленоида как гиперболического аттрактора диффеоморфизма сферы

А. Г. Федотов

В работе устанавливаются достаточные условия того, чтобы обобщенный соленоид мог быть реализован как гиперболический аттрактор диффеоморфизма сферы. Основная теорема и ее следствия дают возможность построения примеров аттракторов с разнообразными свойствами.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm10332

В этой работе под “аттрактором” всюду подразумевается одномерный гиперболический аттрактор диффеоморфизма гладкого многообразия.

Известный в теории непрерывных групп соленоид Вьеториса, который строится из растягивающего эндоморфизма окружности как предел возникающего при этом обратного спектра, послужил основой построенного Смейлом [1] примера аттрактора диффеоморфизма трехмерного многообразия.

Проводя “хирургическую операцию” диффеоморфизма Аносова, Смейл [1] получил также замечательный пример одномерного аттрактора на торе и, следовательно, серию аналогичных примеров, связанных с поверхностью более высокого рода. Задачу построения аттрактора на сфере усложняет отсутствие у нее ненулевых одномерных циклов.

Первый пример одномерного гиперболического аттрактора на сфере построил Плыкин [2]. В его работе [3] доказано, что связный гиперболический аттрактор диффеоморфизма сферы как топологическое пространство представляет собой “обобщенный соленоид” (см. ниже), а ограничение диффеоморфизма или некоторой его итерации на аттрактор топологически подобно сдвигу обобщенного соленоида.

Таким образом, естественно возникает вопрос: какие из обобщенных соленоидов – абстрактных объектов символической динамики, как расширенно трактовал ее В. М. Алексеев, – могут быть реализованы как аттракторы диффеоморфизмов сферы? Установлению достаточного признака возможности такой реализации посвящена данная работа.

Пусть $K = \bigvee_{i=1}^n S_i^1$ – букет окружностей и $\varphi: K \rightarrow K$ – отображение такие, что:

- 1) окружности S_i^1 имеют одинаковую длину в стандартной метрике, порождающей метрику букета K ;
- 2) $\varphi(\omega) = \omega$, где ω – точка ветвления букета;
- 3) φ – равномерно растягивающее во введенной метрике отображение;

- 4) для любой пары окружностей S_i^1 и S_j^1 некоторая степень p отображения φ такова, что справедливо включение: $\varphi^p(S_i^1) \supset S_j^1$.

Система $K \xleftarrow{\varphi} K \xleftarrow{\varphi} \dots$ образует обратный спектр. Пусть $K_\infty = \varprojlim K$ – проективный предел этого спектра и $\varphi_\infty: K_\infty \rightarrow K_\infty$ – гомеоморфизм сдвига:

$$\varphi_\infty(x_1, x_2, \dots) = (\varphi(x_1), x_1, x_2, \dots).$$

Пару $(K_\infty, \varphi_\infty)$ назовем *обобщенным соленоидом*, а точку $\omega_\infty = (\omega, \omega, \dots) \in K_\infty$ – точкой ветвления соленоида.

Ориентировав окружности букета K , получим стандартную систему $a_1, \dots, a_n$ образующих фундаментальной группы $\pi_1(K, \omega) = F_n$, где F_n – свободная группа; $\varphi_*: \pi_1(K, \omega) \rightarrow \pi_1(K, \omega)$ – эндоморфизм фундаментальной группы букета окружностей K , порожденный отображением φ .

Говоря далее о словах, составленных из символов $a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}$, будем всюду иметь в виду несократимые слова.

Если $A \cup B = \{a_1, \dots, a_n\}$ – разбиение множества образующих группы F_n на два подмножества, то мы будем говорить, что в слове $a_{i_1}^{n_{i_1}}, \dots, a_{i_k}^{n_{i_k}}$ чередование символов согласовано с разбиением $A \cup B$, если образующие a_{i_j} и $a_{i_{j+1}}$ принадлежат разным элементам разбиения ($j = 1, 2, \dots, k-1$) и все показатели $n_{i_1}, \dots, n_{i_k}$ равны ± 1 .

Пусть Λ – аттрактор диффеоморфизма сферы S^2 и $x \in \Lambda$; $W^S(x)$ – устойчивое многообразие точки x ; при этом точка x называется *граничной*, если пересечение одной из компонент связности $W^S(x) \setminus x$ с Λ пусто [3].

ТЕОРЕМА 1. *Для того, чтобы соленоид $(K_\infty, \varphi_\infty)$ можно было реализовать как аттрактор изотопного тождественному диффеоморфизма S^2 с точкой ветвления в качестве граничной точки достаточно, чтобы были выполнены условия:*

- 1) $\varphi_*: \pi_1(K, \omega) \rightarrow \pi_1(K, \omega)$ – эндоморфизм;
- 2) для некоторого k : $1 \leq k < n$ выполнено

$$\begin{aligned} \varphi_*(a_i) &= (a_1 \beta_i) a_{\sigma(i)} (a_1 \beta_i)^{-1} & \text{для } 1 \leq i \leq k, \\ \varphi_*(a_i) &= (a_n^{-1} \beta_i) a_{\sigma(i)} (a_n^{-1} \beta_i)^{-1} & \text{для } k < i \leq n, \end{aligned}$$

где $a_1, \dots, a_n$ – стандартная система образующих $\pi_1(K, \omega)$, $\beta_i \in \pi_1(K, \omega)$, $i = 1, \dots, n$, σ – перестановка чисел $1, \dots, n$;

- 3) чередование символов в каждом слове $\varphi_*(a_i)$, $i = 1, \dots, n$, согласовано с разбиением $\{a_1, \dots, a_k\} \cup \{a_{k+1}, \dots, a_n\}$;
- 4) $\varphi_*(a_1 \cdot a_2 \dots a_n) = a_1 \cdot a_2 \dots a_n$.

Известно [4], что при выполнении условий 2 и 4 эндоморфизм φ_* является автоморфизмом.

Построение аттракторов типа соленоида Вьеториса осуществлялось Смейлом в два этапа [1]. Сначала растягивающее отображение компакта аппроксимировалось вложением в многообразие достаточно высокой размерности, после чего трубчатая окрестность образа подвергалась сжатию вдоль ее слоев. В условиях теоремы 1 первый шаг невозможен. Поэтому после приведения иммерсии $K \rightarrow \mathbb{R}^2$ в общее положение процедуру приходится дополнять перестройками возникающих отображений,

которые являются аналогами хорошо известных конструкций в высших размерностях. Это влечет за собой появление объектов, имитирующих некоторые алгебраические построения теории перестроек гладких многообразий.

Рассмотрим $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – компактную область на плоскости с гладкой и имеющей конечное число компонент связности границей $\partial\Omega$, $x_0 \in \partial\Omega$. Фиксируем стандартную ориентацию плоскости. Пусть x_0 – начало системы координат, ось Ox направлена по касательной к границе $\partial\Omega$, а Oy – внутрь области Ω .

В дальнейшем термины “петля” и “путь” обозначают как соответствующее отображение, так и его образ. Смысл, в котором термин употребляется, всегда ясен из контекста. Гладкую петлю $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$, $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ назовем *правильной*, если

- 1) $\gamma(\tau) \in \text{Int } \Omega$, $\tau \in]0, 1[$;
- 2) $\gamma(\tau)$ есть погружение $[0, 1]$ в Ω ;
- 3) точки самопересечения петли трансверсальны, а векторы $\gamma'(0)$ и $\gamma'(1)$ не коллинеарны и не касательны к границе;
- 4) пара векторов $(\gamma'(0), \gamma'(1))$ задает выбранную ориентацию.

Очевидно, что всякий элемент фундаментальной группы $\pi_1(\Omega, x_0)$ можно реализовать правильной петлей.

Последовательность правильных петель $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ будем называть *правильной*, если

- 1) взаимные пересечения петель трансверсальны;
- 2) замкнутые углы, образованные векторами $(\gamma'_i(0), -\gamma'_i(1))$ с вершинами в точке x_0 , пересекаются только в этой вершине;
- 3) векторы $(\gamma'_i(0), \gamma'_j(1))$ задают выбранную ориентацию, если $1 \leq i \leq j \leq n$.

Последовательность $a_1, \dots, a_n$ элементов группы $\pi_1(\Omega, x_0)$ можно реализовать петлями $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, которые образуют правильную последовательность.

Если γ – правильная петля, а γ_1, γ_2 – правильная последовательность петель, рассмотрим $g(\gamma)$ – число точек самопересечения петли γ и $g(\gamma_1, \gamma_2)$ – число точек взаимного пересечения γ_1 и γ_2 , расположенных внутри Ω . Числа $g(\gamma)$ и $g(\gamma_1, \gamma_2)$ будем называть *геометрическими числами самопересечения и пересечения петель* соответственно. Для петли γ γ_a^b (γ_a^b) будет обозначать путь $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$, где $0 \leq a < b \leq 1$.

В связи с группой G рассмотрим ее целочисленное групповое кольцо $\mathbb{Z}[G]$; для элемента группового кольца $\xi = \sum n_i g_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $g_i \in G$, определим его модуль: $|\xi| = \sum_i |n_i| g_i$, гомоморфизм $\xi \rightarrow \sum_i n_i$ (т.е. аугментацию) будем обозначать $\int: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}$.

Далее роль группы G будет выполнять фундаментальная группа $\pi_1(\Omega, x_0)$, для краткости часто обозначаемая π_1 ; $\mathbb{Z}[\pi_1(\Omega, x_0)] = \mathbb{Z}[\pi_1]$ – соответствующее групповое кольцо.

Правильной петле γ и точке P ее самопересечения поставим в соответствие элемент группового кольца $\mathbb{Z}[\pi_1]$:

$$\ell_P(\gamma) = \text{ind}_P(\gamma_0^{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}^1)[\gamma_0^{\tau_1} \circ \gamma_{\tau_2}^1] + \text{ind}_P(\gamma_0^{\tau_2}, \gamma_{\tau_1}^1)[\gamma_0^{\tau_2} \circ \gamma_{\tau_1}^1],$$

где $\gamma(\tau_1) = P = \gamma(\tau_2)$, $[\gamma_0^{\tau_1} \circ \gamma_{\tau_2}^1]$ – элемент $\pi_1(\Omega, x_0)$, определенный последовательно пройденными путями $\gamma_0^{\tau_1}$ и $\gamma_{\tau_2}^1$ (определение $[\gamma_0^{\tau_2} \circ \gamma_{\tau_1}^1]$ аналогично), $\text{ind}_P(\gamma_0^{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}^1) = -\text{ind}_P(\gamma_0^{\tau_2}, \gamma_{\tau_1}^1)$ – индексы пересечения путей $\gamma_0^{\tau_1}$, $\gamma_{\tau_2}^1$ (соответственно $\gamma_0^{\tau_2}$, $\gamma_{\tau_1}^1$) в точке P .

Определим

$$\ell(\gamma) = \sum_P \ell_P(\gamma) \in \mathbb{Z}[\pi_1].$$

Для правильной последовательности петель γ_1, γ_2 и точки их взаимного пересечения $P \in \text{Int } \Omega$ рассмотрим элемент $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle_P \in \mathbb{Z}[\pi_1]$:

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle_P = \text{ind}_P(\gamma_1|_0^{\tau_1}, \gamma_2|_{\tau_2}^1)[\gamma_1|_0^{\tau_1} \circ \gamma_2|_{\tau_2}^1],$$

где $\gamma_1(\tau_1) = P = \gamma_2(\tau_2)$, $[\gamma_1|_0^{\tau_1} \circ \gamma_2|_{\tau_2}^1]$ – элемент группы π_1 , определенный последовательно пройденными путями $\gamma_1|_0^{\tau_1}$ и $\gamma_2|_{\tau_2}^1$, а $\text{ind}_P(\gamma_1|_0^{\tau_1}, \gamma_2|_{\tau_2}^1)$ – индекс их пересечения в точке P .

Определим

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \sum_P \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle_P.$$

Если γ и γ' две правильные петли, реализующие один и тот же элемент фундаментальной группы, то гомотопию, соединяющую γ и γ' , можно провести последовательностью элементарных деформаций, являющихся проекциями на горизонтальную плоскость известных движений Рейдемейстера [5], и не изменяющих элемента $\ell(\gamma)$. Таким образом, определено отображение $\ell: \pi_1(\Omega, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}[\pi_1]$, естественным образом распространяемое по линейности до $\ell: \mathbb{Z}[\pi_1] \rightarrow \mathbb{Z}[\pi_1]$. Эту $\mathbb{Z}$ -линейную форму назовем *формой самопересечения*.

Для $\xi \in \mathbb{Z}[\pi_1]$ рассмотрим число $A(\xi) = (1/2) \int |\ell(\xi)|$ и назовем его *алгебраическим числом самопересечения элемента ξ* .

Аналогично, если γ_1, γ_2 и γ'_1, γ'_2 две правильные пары петель, определяющие одну и ту же упорядоченную пару элементов фундаментальной группы, то можно гомотопировать γ_1 в γ'_1 и γ_2 в γ'_2 с помощью последовательности элементарных деформаций, которые не меняют элемент $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle \in \mathbb{Z}[\pi_1]$. Следовательно, корректно определено отображение

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \pi_1(\Omega, x_0) \times \pi_1(\Omega, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}[\pi_1],$$

естественным образом распространяемое до $\mathbb{Z}$ -билинейного отображения

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{Z}[\pi_1] \times \mathbb{Z}[\pi_1] \rightarrow \mathbb{Z}[\pi_1],$$

которое назовем *билинейной формой пересечения*.

Если $\xi, \eta \in \mathbb{Z}[\pi_1]$, то число $A(\xi, \eta) = \int |\langle \xi, \eta \rangle|$ назовем *алгебраическим числом пересечения ξ и η* .

Следующие предложения устанавливают нужные для дальнейшего свойства введенных выше линейной и билинейной форм.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1) Пусть $\varphi: (\Omega, x_0) \rightarrow (\Omega, x_0)$ – сохраняющий ориентацию диффеоморфизм и $\varphi_*: \mathbb{Z}[\pi_1] \rightarrow \mathbb{Z}[\pi_1]$ – соответствующий автоморфизм группового кольца. Тогда для всех $\xi, \eta \in \mathbb{Z}[\pi_1]$

$$\varphi_*[\ell(\xi)] = \ell(\varphi_*(\xi)), \quad \varphi_*\langle \xi, \eta \rangle = \langle \varphi_*(\xi), \varphi_*(\eta) \rangle.$$

2) Для всех $a_1, \dots, a_n, b \in \pi_1(\Omega, x_0)$

$$\langle a_1 \dots a_n, b \rangle = \sum_{i=1}^n a_1 \dots a_{i-1} \langle a_i, b \rangle, \quad n \geq 2.$$

3) Для всех $a, b_1, \dots, b_n \in \pi_1(\Omega, x_0)$

$$\langle a, b_1 \dots b_n \rangle = \sum_{i=1}^n \langle a, b_i \rangle b_{i+1} \dots b_n.$$

4) Для всех $a, b \in \pi_1(\Omega, x_0)$

$$\langle b, a \rangle = (b-1)(1-a) - b\langle a, b \rangle^* a,$$

где для $\xi \in \mathbb{Z}[\pi_1]$

$$(\xi)^* = \left(\sum n_k g_k \right)^* \stackrel{\text{den}}{=} \sum n_k g_k^{-1}.$$

5) Для всех $a, b \in \pi_1(\Omega, x_0)$

$$\ell(a \cdot b) = \ell(a) \cdot b + a \cdot \ell(b) + \langle a, b \rangle - ab\langle a, b \rangle^* ab.$$

6) Для всех $a \in \pi_1(\Omega, x_0)$

$$\ell(a) = \langle a, a \rangle - a + a^2.$$

7) Для всех $a, b \in \pi_1(\Omega, x_0)$

$$\begin{aligned} \langle a^{-1}, b \rangle &= -a^{-1} \langle a, b \rangle, & \langle a, b^{-1} \rangle &= -\langle a, b \rangle b^{-1}, \\ \langle a^{-1}, b^{-1} \rangle &= a^{-1} \langle a, b \rangle b^{-1}, & \ell(a^{-1}) &= a^{-1} \langle a, a \rangle a^{-1} - a^{-1} + a^{-2}. \end{aligned}$$

8) Для системы образующих $a_1, \dots, a_n$ группы $\pi_1(\Omega, x_0)$, удовлетворяющих условиям $\langle a_i, a_j \rangle = 0$, $i < j$, и $\ell(a_i) = 0$ при всяком i и для изоморфизма $\beta: \pi_1(\Omega, x_0) \rightarrow \pi_1(\Omega, x_0)$ такого, что $\beta(a_i) = T_i^{-1} a_{\sigma(i)} T_i$, $\beta(a_1 \dots a_n) = a_1 \dots a_n$, справедливо

$$\langle \beta(a_i), \beta(a_j) \rangle = 0, \quad i < j,$$

и $\ell(\beta(a_i)) = 0$ для всех i . Здесь $T_i \in \pi_1(\Omega, x_0)$, σ — перестановка чисел $1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $a, b \in \pi_1(\Omega, x_0)$ и γ_1, γ_2 — правильная последовательность петель, представляющих a и b соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_* \langle a, b \rangle &= \varphi_* \left(\sum_P \text{ind}_P(\gamma_1, \gamma_2) [\gamma_1|_0^{\tau_{1P}} \circ \gamma_2|_{\tau_{2P}}^1] \right) = \sum_P \text{ind}_P(\gamma_1, \gamma_2) \varphi_* [\gamma_1|_0^{\tau_{1P}} \circ \gamma_2|_{\tau_{2P}}^1] \\ &= \sum_P \text{ind}_{\varphi(P)}(\varphi(\gamma_1), \varphi(\gamma_2)) [\varphi(\gamma_1|_0^{\tau_{1P}}) \circ \varphi(\gamma_2|_{\tau_{2P}}^1)] = \langle \varphi_*(a), \varphi_*(b) \rangle. \end{aligned}$$

Здесь $\gamma_1(\tau_{1P}) = \gamma_2(\tau_{2P}) = P$. Отсюда вытекает сохранение формы пересечения автоморфизмом φ_* . Сохранение формы самопересечения проверяется аналогично.

2) Пусть элементы фундаментальной группы a_1, a_2, b представлены правильной последовательностью петель $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Точки пересечения $\gamma_1 \circ \gamma_2$ и γ_3 есть либо точки пересечения γ_1 и γ_3 , либо γ_2 и γ_3 . В первом случае точка P дает вклад в сумму, определяющую $\langle a_1 \cdot a_2, b \rangle$, равный $\text{ind}_P(\gamma_1, \gamma_3) [\gamma_1|_0^{\tau_{1P}} \circ \gamma_3|_{\tau_{3P}}^1]$, во втором случае ее вклад в ту же сумму равен $\text{ind}_P(\gamma_2, \gamma_3) [\gamma_1|_0^1 \circ \gamma_2|_0^{\tau_{2P}} \circ \gamma_3|_{\tau_{3P}}^1]$. Здесь $\gamma_i(\tau_{iP}) = P$, $i = 1, 2, 3$. Суммируя по всем точкам P , получаем: $\langle a_1 \cdot a_2, b \rangle = \langle a_1, b \rangle + a_1 \langle a_2, b \rangle$; n -кратное применение этой формулы доказывает утверждение 2.

3) Доказывается аналогично 2).

4) Пусть γ_1, γ_2, a и b такие же, как в 1). Правильная последовательность γ'_2, γ'_1 петель, представляющих соответственно b и a , может быть получена сохранением картины вне маленькой окрестности точки x_0 и появлением новых четырех точек в этой окрестности. Их вклад в сумму, определяющую $\langle b, a \rangle$, равен $(b-1)(1-a)$.

Точка P , лежащая вне этой окрестности, дает вклад в сумму для $\langle b, a \rangle$, равный

$$\begin{aligned} \text{ind}_P(\gamma'_2, \gamma'_1)[\gamma_2|_0^{\tau_{2P}} \circ \gamma_1|_{\tau_{1P}}^1] \\ = -\text{ind}_P(\gamma'_1, \gamma'_2)[(\gamma_2|_0^{\tau_{2P}}) \circ (\gamma_2|_1^{\tau_{2P}}) \circ (\gamma_1|_{\tau_{1P}}^1) \circ (\gamma_1|_0^{\tau_{1P}}) \circ (\gamma_1|_0^{\tau_{1P}}) \circ (\gamma_1|_{\tau_{1P}}^1)] \\ = -b\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle_P^{-1} a. \end{aligned}$$

Суммируя по всем “старым” точкам пересечения и учитывая вклад в сумму новых четырех точек, получаем формулу 4).

5) Символы γ_1, γ_2, a, b имеют прежнее значение. Точки самопересечения петли $\gamma_1 \circ \gamma_2$ складываются из трех групп: точек самопересечения петли γ_1 , точек самопересечения петли γ_2 и точек их взаимного пересечения. Суммирование всех вкладов точек первой группы дает $\ell(a) \cdot b$, точек второй группы $a \cdot \ell(b)$ и точек третьей группы $\langle a, b \rangle - ab\langle a, b \rangle^* ab$. Это доказывает формулу 5).

6) Рассмотрим элемент $\langle a, a \rangle \in \mathbb{Z}[\pi_1]$. Пусть γ – правильная петля, представляющая $a \in \pi_1(\Omega, x_0)$, а $n_{\gamma(\tau)}$ – поле единичных нормалей к $\gamma(\tau)$ такое, что векторы $(n_{\gamma(0)}, \gamma'(0))$ задают выбранную ориентацию.

Будем считать, что петля γ такова, что путь $\gamma_\varepsilon(\tau) = \gamma(\tau) + \varepsilon \cdot n_{\gamma(\tau)}$ лежит в $\text{Int } \Omega$ при малых $\varepsilon > 0$. Превратим путь γ_ε в правильную петлю $\tilde{\gamma}$ так, что, во-первых, $\gamma, \tilde{\gamma}$ – правильная последовательность и, во-вторых, петля $\tilde{\gamma}$ пересекает γ по сравнению с γ_ε еще в двух точках: $P_1 = \tilde{\gamma}(\tau_1)$ и $P_2 = \tilde{\gamma}(\tau_2)$, где τ_1 – число, близкое к нулю, а τ_2 – к единице. Точки P_1 и P_2 дают вклад в сумму, определяющую $\langle a, a \rangle$, равный $-a^2$ и a , соответственно.

Если Q – точка самопересечения петли γ , то при малых ε ей соответствуют две точки Q_1 и Q_2 пересечения γ и $\tilde{\gamma}$. Пусть $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta) = Q$. Тогда можно однозначно выбрать числа $\alpha_1 \approx \alpha, \alpha_2 \approx \alpha, \beta_1 \approx \beta, \beta_2 \approx \beta$ ($\approx$ – знак приближенного равенства) такие, что $\gamma(\alpha_1) = \gamma_\varepsilon(\beta_2) = Q_1, \gamma_\varepsilon(\alpha_2) = \gamma(\beta_1) = Q_2$.

Поэтому

$$\langle \gamma, \tilde{\gamma} \rangle_{Q_1} + \langle \gamma, \tilde{\gamma} \rangle_{Q_2} = \text{ind}_{Q_1}(\gamma, \tilde{\gamma})[\gamma_0^{\alpha_1} \circ \tilde{\gamma}_{\beta_2}^1] + \text{ind}_{Q_2}(\gamma, \tilde{\gamma})[\gamma_0^{\beta_1} \circ \tilde{\gamma}_{\alpha_2}^1] = \ell_Q(\gamma).$$

Суммируя все слагаемые, получаем, что $\langle a, a \rangle = \ell(a) - a^2 + a$.

7) $0 = \langle e, b \rangle = \langle a \cdot a^{-1}, b \rangle = \langle a, b \rangle + a\langle a^{-1}, b \rangle$, таким образом, $\langle a^{-1}, b \rangle = -a^{-1}\langle a, b \rangle$. Остальные равенства доказываются аналогично.

8) Пусть F_n – свободная группа с образующими $a_1, \dots, a_n, n > 2$. Автоморфизмы этой группы, которые переводят образующие в их трансформу $a_i \rightarrow T_i^{-1} a_{\sigma(i)} T_i$ ($i = 1, \dots, n, T_i \in F_n, \sigma$ – перестановка чисел $1, \dots, n$) и оставляют неизменным произведение $a_1 \cdot \dots \cdot a_n$, образуют группу кос $B(n)$. Известно [4], [5], что группа порождается автоморфизмами $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$:

$$\sigma_k(a_k) = a_{k+1}, \quad \sigma_k(a_{k+1}) = a_{k+1}^{-1} \cdot a_k \cdot a_{k+1}, \quad \sigma_k(a_i) = a_i, \quad i \neq k, k+1,$$

причем определяющие соотношения группы $B(n)$ таковы: $\sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k = \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i - j| > 1$.

Для доказательства свойства 8), очевидно, достаточно показать, что свойством сохранения форм пересечения и самопересечения обладает каждый из автоморфизмов σ_k . Это доказывается прямым вычислением с помощью установленных выше формул 2)–7).

Теперь определим перестройки правильной последовательности петель γ_1, γ_2 в точках их взаимного пересечения.

Пусть $P = \gamma_1(\tau_{1P}) = \gamma_2(\tau_{2P})$ и $Q = \gamma_1(\tau_{1Q}) = \gamma_2(\tau_{2Q})$ – две такие точки. Можно считать, что $\tau_{1P} < \tau_{1Q}$.

Если $\tau_{2P} < \tau_{2Q}$, рассмотрим петли

$$\gamma'_1 = \gamma_1|_0^{\tau_{1P}} \circ \gamma_2|_{\tau_{2P}}^{\tau_{2Q}} \circ \gamma_1|_{\tau_{1Q}}^1, \quad \gamma'_2 = \gamma_2|_0^{\tau_{2P}} \circ \gamma_1|_{\tau_{1P}}^{\tau_{1Q}} \circ \gamma_2|_{\tau_{2Q}}^1,$$

причем имеет место гомотопность петель $\gamma_1 \sim \gamma'_1$ и $\gamma_2 \sim \gamma'_2$ тогда и только тогда, когда петля $\gamma_1|_{\tau_{1P}}^{\tau_{1Q}} \circ (\gamma_2|_{\tau_{2P}}^{\tau_{2Q}})^{-1}$ гомотопна нулю.

Если $\tau_{2P} > \tau_{2Q}$, рассмотрим петли

$$\gamma'_1 = \gamma_1|_0^{\tau_{1P}} \circ (\gamma_2|_{\tau_{2Q}}^{\tau_{2P}})^{-1} \circ \gamma_1|_{\tau_{1Q}}^1, \quad \gamma'_2 = \gamma_2|_0^{\tau_{2Q}} \circ (\gamma_1|_{\tau_{1P}}^{\tau_{1Q}})^{-1} \circ \gamma_2|_{\tau_{2P}}^1,$$

причем $\gamma_1 \sim \gamma'_1$ и $\gamma_2 \sim \gamma'_2$ тогда и только тогда, когда петля $\gamma_1|_{\tau_{1P}}^{\tau_{1Q}} \circ \gamma_2|_{\tau_{2Q}}^{\tau_{2P}} \sim 0$.

Рассмотрим малые окрестности точек P и Q , в которых нет как других точек пересечения γ_1 и γ_2 , так и точек их самопересечения. Малым шевелением в этих окрестностях устраним точки пересечения P и Q петель γ'_1 и γ'_2 и “сгладим углы”, не выходя из этих окрестностей. Полученные новые петли обозначим также γ'_1 и γ'_2 и скажем, что они получены из петель γ_1, γ_2 перестройкой последних в точках их пересечения.

Таким образом, $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \langle \gamma'_1, \gamma'_2 \rangle = \langle [\gamma'_1], [\gamma'_2] \rangle \in \mathbb{Z}[\pi_1]$, если $\gamma_1 \sim \gamma'_1, \gamma_2 \sim \gamma'_2$.

Также определим перестройки, связанные с самопересечением правильной петли γ . Если $P = \gamma(\tau_{1P}) = \gamma(\tau_{2P})$ – точка самопересечения γ , то рассмотрим петлю $\gamma' = \gamma|_0^{\tau_{1P}} \circ \gamma|_{\tau_{2P}}^1$ (считаем, что $\tau_{1P} < \tau_{2P}$) и проведем необходимое сглаживание в малой окрестности точки P . Назовем рассмотренное построение петли γ' из γ *перестройкой первого типа*. Она не изменяет гомотопического класса пути γ тогда и только тогда, когда петля $\gamma|_{\tau_{1P}}^{\tau_{2P}} \sim 0$.

Пусть теперь P и Q – точки самопересечения петли γ . Обозначим τ_{1P} (τ_{1Q}) – первый момент показания в точку P (точку Q), а τ_{2P} (τ_{2Q}) – второй. Будем считать, что $\tau_{1P} < \tau_{1Q}$.

Возможны три случая.

Во-первых, если $\tau_{1P} < \tau_{2P} < \tau_{1Q} < \tau_{2Q}$, то в каждой из точек P, Q можно провести перестройку первого типа и условие гомотопности новой петли γ' петле γ такое же, как выше.

Во-вторых, если $\tau_{1P} < \tau_{1Q} < \tau_{2P} < \tau_{2Q}$, то петля γ' получается после приведения должным образом в общее положение и сглаживания петли

$$\gamma|_0^{\tau_{1P}} \circ \gamma|_{\tau_{2P}}^{\tau_{2Q}} \circ \gamma|_{\tau_{1Q}}^{\tau_{2P}} \circ \gamma|_{\tau_{1P}}^{\tau_{1Q}} \circ \gamma|_{\tau_{2Q}}^1,$$

которая гомотопна γ , если и только если петля $\gamma|_{\tau_{1P}}^{\tau_{1Q}} \circ (\gamma|_{\tau_{2P}}^{\tau_{2Q}})^{-1} \sim 0$.

В-третьих, если $\tau_{1P} < \tau_{1Q} < \tau_{2Q} < \tau_{2P}$, то петля γ' получается после приведения в общее положение и сглаживания петли

$$\gamma|_0^{\tau_{1P}} \circ (\gamma|_{\tau_{2Q}}^{\tau_{2P}})^{-1} \circ \gamma|_{\tau_{1Q}}^{\tau_{2Q}} \circ (\gamma|_{\tau_{1P}}^{\tau_{1Q}})^{-1} \circ \gamma|_{\tau_{2P}}^1,$$

гомотопность которой исходной петле γ равносильна тому, что петля $\gamma|_{\tau_{1P}}^{\tau_{1Q}} \circ \gamma|_{\tau_{2P}}^{\tau_{2Q}} \sim 0$.

Второй и третий случаи – перестройки второго типа. В каждом из них $\ell(\gamma) = \ell(\gamma') = \ell([\gamma']) \in \mathbb{Z}[\pi_1]$, если $\gamma \sim \gamma'$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для элементов $a_1, \dots, a_n \in \pi_1(\Omega, x_0)$ найдутся образующие правильную последовательность петель $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n$ такие, что $[\tilde{\gamma}_i] = a_i$, $g(\tilde{\gamma}_i) = A(a_i)$, $i = 1, \dots, n$, и $g(\tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_j) = A(a_i, a_j)$, $1 \leq i < j \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n$; $[\gamma_i] = a_i$, $i = 1, \dots, n$, – правильная последовательность петель. Сначала для каждой петли γ_i произведем перестройки первого и второго типа в точках самопересечения, не изменяющие гомотопического класса соответствующей петли. Этот процесс продолжим до тех пор, пока он возможен. Получим правильную последовательность петель $\tilde{\gamma}_i$, $[\tilde{\gamma}_i] = a_i$, $i = 1, \dots, n$.

В каждой упорядоченной паре $\tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_j$, $1 \leq i < j \leq n$, производим перестройки в точках взаимного пересечения этих петель, не изменяющих их гомотопического класса. Такие перестройки будем совершать пока они возможны. Получим правильную последовательность $\tilde{\gamma}_i$, $[\tilde{\gamma}_i] = a_i$, $i = 1, \dots, n$.

Покажем, что эта последовательность искомая. Пусть γ – правильная петля и $P_1, \dots, P_r$ – ее точки самопересечения. Рассмотрим формальную сумму $\ell_{P_1}(\gamma) + \dots + \ell_{P_r}(\gamma)$, которая определяет элемент $\ell([\gamma]) \in \mathbb{Z}[\pi_1]$ после сокращения одинаковых элементов фундаментальной группы с противоположными знаками. Фиксируем последовательность сокращений и скажем, что точка P_k , $1 \leq k \leq r$, дает нулевой вклад в $\ell([\gamma])$, если $\ell_{P_k}(\gamma)$ подвергается сокращению.

Если γ_1, γ_2 – правильная последовательность петель, то аналогично определяется, что точка P их взаимного пересечения дает нулевой вклад в $\langle [\gamma_1], [\gamma_2] \rangle \in \mathbb{Z}[\pi_1]$.

Для доказательства предложения 2 достаточно установить, что никакая из точек пересечения петель $\tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_j$, ($i < j$) и точек самопересечения петли $\tilde{\gamma}_i$ не дает нулевого вклада в $\langle a_i, a_j \rangle$ и, соответственно, в $\ell(a_i)$.

Рассмотрим случай взаимного пересечения. Предположим существование точки P пересечения петель $\tilde{\gamma}_i$ и $\tilde{\gamma}_j$, дающей нулевой вклад в $\langle a_i, a_j \rangle$. Тогда найдется точка Q пересечения этих петель такая, что $\langle \tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_j \rangle_P + \langle \tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_j \rangle_Q = 0$. Следовательно, гомотопны петли $\tilde{\gamma}_i|_0^{T_i P} \circ \tilde{\gamma}_j|_{\tau_j P}^1$ и $\tilde{\gamma}_i|_0^{T_i Q} \circ \tilde{\gamma}_j|_{\tau_j Q}^1$, т.е. петля $\tilde{\gamma}_i|_{\tau_i P}^{T_i Q} \circ \tilde{\gamma}_j|_{\tau_j Q}^{T_j P}$ гомотопна нулю и возможна перестройка петель $\tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_j$ в точках P и Q . Это противоречит тому, что все “допустимые” перестройки в точках взаимного пересечения петель произведены.

Случай самопересечения рассматривается аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим вложение $f: K \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ букета окружностей K в верхнюю полуплоскость; $f(\omega) = (0, 0)$. Пусть $\ell_i = f(S_i^1)$, $i = 1, \dots, n$, – гладкие кривые, имеющие точку возврата в начале координат, касание которых с осью Ox в начале координат имеет бесконечный порядок. Пусть ни одна из кривых не лежит внутри другой и все они ориентированы по часовой стрелке. k кривых расположены слева от оси Oy , остальные $(n-k)$ – справа и все они пронумерованы по часовой стрелке; таким образом, $\ell_1, \dots, \ell_k$ находятся во второй, а $\ell_{k+1}, \dots, \ell_n$ в первой четверти. Дополнительно предположим, что каждая кривая ℓ_i имеет лишь по одной точке перегиба, ее проекция на ось Ox содержит отрезок $[-1; 0]$, если $1 \leq i \leq k$, и отрезок $[0; 1]$, если $k < i \leq n$, и прообраз каждой точки при проектировании ℓ_i на Ox состоит не более, чем из двух точек.

Далее мы отождествляем букет окружностей K с его образом при вложении в $\mathbb{R}_+^2$ и считаем, что определенное выше отображение $\varphi: K \rightarrow K$ является растягивающим в метрике индуцированной вложением f .

Пусть Ω – область с гладкой границей $\partial\Omega$, являющаяся малой окрестностью букета K в $\mathbb{R}^2$ такой, что она расслаивается на слой-отрезки, пересечение каждого слоя с замыканием $\overline{\Omega}$ связно и в каждой точке $(x, y) \in K$ угол между нормалью к K в этой точке и проходящим через нее отрезком слоения меньше числа $\varepsilon > 0$. Ясно, что такое слоение может быть построено при всяком положительном ε .

Рассмотрим отображение $\varphi: K \rightarrow K$. Будучи растягивающим, при выполнении условия 3 теоремы оно трансверсально слоению. Малым вместе с производными шевелением φ приведем это отображение в общее положение $\varphi_1: K \rightarrow \Omega$, сохраняя начало координат и гладкость так, чтобы угол в каждой точке образа $\varphi_1(K)$ между проходящими через эту точку отрезком слоения и нормалью был меньше 2ε . Изменим отображение φ_1 в маленькой окрестности точки ветвления, “опустив точку ветвления вниз”: $\varphi_2(\omega) = (0; -\varepsilon/N)$, и оставляя φ_2 гладким на каждой окружности букета за исключением точки ветвления. Пусть окрестность Ω такова, что $\varphi_2(\omega) \in \partial\Omega$, вне указанной малой окрестности φ_2 совпадает с φ_1 и петли $\varphi_2(\ell_i)$, $i = 1, \dots, n$, образуют в Ω правильную последовательность.

Выбирая N достаточно большим, добьемся того, чтобы в каждой точке образа $\varphi_2(K)$ угол между нормалью и отрезком слоения, через эту точку проходящим, не превосходил 3ε . (В точке $(0; -\varepsilon/N)$ теперь имеем $2n$ различных, “односторонних” нормалей).

Так как автоморфизм $\varphi_*: \pi_1(K, \omega) \rightarrow \pi_1(K, \omega)$ удовлетворяет условиям 2 и 4 теоремы 1, согласно предложению 1 имеем

$$\langle [\gamma_i], [\gamma_j] \rangle = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad \ell([\gamma_m]) = 0, \quad m = 1, \dots, n,$$

где $[\gamma_i] = \varphi_*(a_i) \in \pi_1(\Omega, \varphi_2(\omega))$; $\gamma_i = \varphi_2(\ell_i)$; ℓ_i – окружности букета K , $i = 1, \dots, n$.

Производя процедуру, связанную с перестройками, согласно предложению 2 получим правильную последовательность петель $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n$, не имеющих точек самопересечения и точек взаимного пересечения. Петли $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n$ можно считать гладкими; гладкость в точке ветвления восстановим, “подняв” точку $(0; -\varepsilon/N)$ в начало координат. Для полученных в результате петель сохраним обозначения $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n$.

Теперь естественно возникает гладкое отображение $\varphi_3: K \rightarrow \Omega$; $\varphi_3(\ell_i) = \tilde{\gamma}_i$, $i = 1, \dots, n$. Трансверсальность петель $\tilde{\gamma}_i$ слоению очевидна.

Так как отображение φ_3 – вложение, распространим его на всю окрестность $\phi: \Omega \rightarrow \Omega$ с помощью имеющегося в Ω слоения, превратив его в устойчивое инвариантное слоение ([1], [6], [2]).

Корректность такого построения гарантирует условие 2 теоремы: требование, предъявляемое этим условием к каждой первой и последней букве слова $\varphi_*(a_i)$, $i = 1, \dots, n$, позволяет провести это построение в окрестности точки ω .

Возможность продолжения отображения ϕ до диффеоморфизма f -сферы устанавливается на основе известных теорем, как в [2].

Существование инвариантного расширяющегося слоения при малых ε также следует из общих теорем [6].

Топологическая сопряженность гомеоморфизма сдвига $\varphi_\infty: K_\infty \rightarrow K_\infty$ и ограничения построенного диффеоморфизма на аттрактор $\Lambda = \bigcap_{n \geq 1} f^n(\Omega)$ доказывается, как аналогичное утверждение в [1] или [2].

Таким образом, обобщенный соленоид $(K_\infty, \varphi_\infty)$ реализован как гиперболический аттрактор (Λ, f) диффеоморфизма сферы.

Теорема 1 дает возможность строить примеры гиперболических аттракторов на сфере (плоскости) с различными свойствами.

Пусть F_n , $n > 2$, – свободная группа с образующими $a_1, \dots, a_n$. Фиксируем k : $1 \leq k < n$ и рассмотрим множество автоморфизмов $B_k(n)$ группы F_n , удовлетворяющих условиям 2–4 теоремы 1 таких, что слово $\varphi(a_i)$, $i = 1, \dots, n$, содержит более одной буквы для всякого $\varphi \in B_k(n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $B_k(n)$ есть полугруппа в $B(n) \subset \text{Aut } F_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\varphi_1, \varphi_2 \in B_k(n)$, то условие 4 теоремы 1 выполнено для композиции $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in B_k(n)$. В силу того, что разбиение множества образующих, с которым согласовано чередование символов в словах $\varphi_1(a_i)$ и $\varphi_2(a_j)$ одно и то же, в словах $\varphi_1 \circ \varphi_2(a_i)$ не произойдет сокращений, что влечет выполнение остальных требований, определяющих принадлежность $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in B_k(n)$.

Рассмотрим автоморфизмы σ_1^{-1} , $\varphi_{2,k}^{-1}$ ($2 < k < n$), $\varphi_{2,n}$, заданные в системе образующих группы F_n :

- σ_1^{-1} :

$$\sigma_1^{-1}(a_1) = a_1 a_2 a_1^{-1}, \quad \sigma_1^{-1}(a_2) = a_1, \quad \sigma_1^{-1}(a_i) = a_i, \quad i = 3, \dots, n,$$

- $\varphi_{2,k}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \varphi_{2,k}^{-1}(a_1) &= a_1, & \varphi_{2,k}^{-1}(a_2) &= a_2 a_k a_2^{-1}, & \varphi_{2,k}^{-1}(a_i) &= a_2 a_k^{-1} a_i a_k a_2^{-1}, & 2 < i < k, \\ \varphi_{2,k}^{-1}(a_k) &= a_2, & \varphi_{2,k}^{-1}(a_s) &= a_s, & k < s \leq n, \end{aligned}$$

- $\varphi_{2,n}$:

$$\begin{aligned} \varphi_{2,n}(a_1) &= a_1, & \varphi_{2,n}(a_2) &= a_n, \\ \varphi_{2,n}(a_i) &= a_n^{-1} a_2 a_i a_2^{-1} a_n, & 2 < i < n, & \quad \varphi_{2,n}(a_n) = a_n^{-1} a_2 a_n. \end{aligned}$$

Непосредственно проверяется, что автоморфизмы $\varphi_{2,n}^2$, $\varphi_{2,n}^3$, $\varphi_{2,k}^{-1} \cdot \varphi_{2,n}^2$, $k = 3, \dots, n-1$, обладают следующими общими свойствами: во-первых, элемент a_1 они оставляют на месте; во-вторых, при действии на каждую образующую a_i , $i = 2, \dots, n$, получается слово, которое начинается с a_n^{-1} и заканчивается a_n ; в-третьих, чередование символов в каждом из этих слов согласовано с разбиением $\{a_2, a_3, \dots, a_n\} = \{a_2\} \cup \{a_3, \dots, a_n\}$.

Пусть

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sigma_1^{-3} \cdot \varphi_{2,n}^2, & \varepsilon_2 &= \sigma_1^{-2} \cdot \varphi_{2,n}^2, \\ \varepsilon_k &= \sigma_1^{-2} \cdot \varphi_{2,k}^{-1} \cdot \varphi_{2,n}^2, & k = 3, \dots, n-1, & \quad \varepsilon_n = \sigma_1^{-2} \cdot \varphi_{2,n}^3. \end{aligned}$$

Легко заметить, что чередование символов в каждом из слов $\varepsilon_i(a_j)$, $i, j = 1, \dots, n$, согласовано с разбиением $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{a_1\} \cup \{a_2, \dots, a_n\}$ и выполняются условия 2–4 теоремы 1.

Рассмотрим $\overline{F}_n = [F_n, F_n]$ – коммутант свободной группы F_n и канонический эпиморфизм

$$g: F_n \rightarrow F_n / \overline{F}_n \cong \mathbb{Z}^n$$

на факторгруппу, порождающий эпиморфизм $\text{Aut}(F_n) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{Z})$. При этом в базисе $g(a_1), \dots, g(a_n)$ в $\mathbb{Z}^n$ автоморфизму ε_i , $i = 1, \dots, n$, $i \neq 2$, отвечает матрица перестановки 2 и i элементов. Разложим цикл длины n в произведение транспозиций: $(2, n)(2, n-1) \cdots (2, 3)(2, 1)$. Тогда автоморфизм $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4 \cdots \varepsilon_n$ принадлежит $B_1(n)$ и таков, что удовлетворяется свойство, естественно соответствующее требованию 4), предъявляемому к растягивающему отображению $\varphi: K \rightarrow K$.

Как следствие изложенных построений, приходим к утверждению

ТЕОРЕМА 2. *Для любой перестановки ρ трех и более элементов можно указать диффеоморфизм плоскости с гиперболическим аттрактором Λ такой, что перестановка ограниченных областей дополнения $\mathbb{R}^2 \setminus \Lambda$ есть ρ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим ρ в произведение транспозиций:

$$\rho = (2, i_1) \cdots (2, i_s), \quad 1 \leq i_1, \dots, i_s \leq n.$$

Тогда автоморфизм $\varepsilon_{i_s} \dots \varepsilon_{i_1}(\varepsilon_0)^n$ порождает растягивающее отображение букета окружностей K такое, что соответствующий обобщенный соленоид $(K_\infty, \varphi_\infty)$ реализуется согласно теореме 1 как гиперболический аттрактор Λ диффеоморфизма плоскости, осуществляющего требуемую перестановку дополнительных областей $\mathbb{R} \setminus \Lambda$.

Рассмотренные выше автоморфизмы имеют простое описание, если группу кос Артина $B(n)$ интерпретировать геометрически [5].

Например, автоморфизм $\varphi_{2,k}^{-1}$ отвечает следующей косе: верхняя нить соединяет точку с номером k верхнего семейства точек с точкой номер 2 нижнего семейства, под ней находится нить, соединяющая точку номер 2 верхнего семейства с точкой номер k нижнего. Остальные нити, представляющие собой отрезки, соединяющие точки двух семейств с одинаковыми номерами, расположены ниже предыдущих двух нитей.

Соленоид Плыкина [2] отвечает автоморфизму $\sigma_1^{-2} \cdot \varphi_{2,3}^2$ (т.е. геометрической косе $\sigma_2^2 \cdot \sigma_1^{-2}$ в стандартных обозначениях [5]).

Теорема 2 получена в работе [7]; она выведена как следствие теоремы 1 в [8]. Формулировка теоремы 1 имеется в [3] и [9]. Недавно мне было сообщено, что в работе [10] определены и глубоко исследованы формы на групповом кольце фундаментальной группы поверхности с краем, по существу совпадающие с введенными выше. В работе [11] дается геометрическое представление гиперболических аттракторов диффеоморфизмов поверхностей, позволяющее указать алгоритм, устанавливающий перечислимость множества таких объектов.

В заключение благодарю В. Л. Попова и, с опозданием, С. Ю. Пилюгина за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Смейл, "Дифференцируемые динамические системы", *УМН*, **25:1** (1970), 113–185.
- [2] Р. В. Плыкин, "Источники и стоки A -диффеоморфизмов поверхностей", *Матем. сб.*, **94:2** (1974), 243–264.
- [3] Р. В. Плыкин, "О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов", *УМН*, **39:6(240)** (1984), 75–113.
- [4] В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитер, *Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и определяющих соотношений*, Наука, М., 1974.

- [5] В. О. Мантуров, *Теория узлов*, РХД, Ижевск, 2005.
- [6] В. М. Алексеев, “Квазислучайные динамические системы. I. Квазислучайные диффеоморфизмы”, *Матем. сб.*, **76**:1 (1968), 72–134.
- [7] А. Г. Федотов, “О соленоидах Вильмса и их реализации в двумерных динамических системах”, *Докл. АН СССР*, **252**:4 (1980), 801–804.
- [8] А. Г. Федотов, *Применение аппроксимационных методов для изучения базисных множеств гладких динамических систем*, Дис. . . . канд. физ.-матем. наук, МИЭМ, М., 1984.
- [9] Р. В. Плыкин, Е. А. Сатаев, С. В. Шлячков, “Динамические системы с гиперболическим поведением. Глава 3. Странные аттракторы”, *Динамические системы – 9*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **66**, ВИНТИ, М., 1991, 100–148.
- [10] В. Т. Тураев, “Пересечения петель в двумерных многообразиях”, *Матем. сб.*, **106**:4 (1978), 566–588.
- [11] А. Ю. Жиров, “Комбинаторика одномерных гиперболических аттракторов диффеоморфизмов поверхностей”, *Динамические системы и смежные вопросы геометрии*, Сборник статей. Посвящается памяти академика Андрея Андреевича Болибруха, Тр. МИАН, **244**, Наука, М., 2004, 143–215.

А. Г. Федотов

Национальный исследовательский университет

«Высшая школа экономики»,

Мясницкая ул. 20, Москва, 101000, Россия

E-mail: gernat_14@mail.ru

Поступило

28.05.2013