Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Неверова, А. Л. Скубачевский, О классических и обобщенных решениях краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 5, 702–719

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10333>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:39:51

О классических и обобщенных решениях краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами

Д. А. Неверова, А. Л. Скубачевский

В работе рассматривается первая краевая задача для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на конечном интервале $(0, d)$. Исследован вопрос о том, при каких условиях краевая задача для дифференциально-разностного уравнения будет иметь классическое решение для любых непрерывных правых частей. Доказано, что необходимым и достаточным условием существования классического решения является равенство нулю некоторых коэффициентов разностных операторов на орбитах, порожденных сдвигами.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10333

Введение. В данной работе рассматриваются вопросы разрешимости и гладкости решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами на конечном интервале $(0, d)$. Интерес к подобным задачам возникает из-за их многочисленных приложений: к задаче об успокоении системы управления с последствием [1], к исследованию упругих деформаций многослойных пластин и оболочек [2] и т.д. С другой стороны, к краевым задачам для дифференциально-разностных уравнений можно свести дифференциальные уравнения с нелокальными краевыми условиями, описывающие процессы управления плазмой [3], [4]. Кроме того, решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений обладают рядом принципиально новых свойств. Например, известно, что гладкость обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений со сдвигом аргументов в старших производных может нарушаться даже при бесконечно-дифференцируемой правой части (см. [4]–[6]).

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00422), работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00524).

Вопросы существования классических решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений при любой непрерывной правой части в случае постоянных коэффициентов разностных операторов были рассмотрены в [7]. В этой работе было показано, что необходимым и достаточным условием существования классического решения в предположении, что рассматриваемая задача имеет обобщенное решение, является отсутствие сдвигов аргументов в производных неизвестной функции, входящих в уравнение. Случай переменных коэффициентов разностных операторов, входящих в уравнение, к настоящему моменту является неизученным.

В настоящей работе рассматривается дифференциально-разностное уравнение в дивергентном виде

$$-\frac{d}{dt}(R_0 u'(t)) + R_2 u(t) = f(t), \quad t \in (0, d), \quad (0.1)$$

с однородным краевым условием

$$u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus (0, d), \quad (0.2)$$

где R_i – разностные операторы, определенные по формуле

$$R_i u(t) = \sum_{j=-m}^m b_{ij}(t) u(t+j), \quad i = 0, 1, 2. \quad (0.3)$$

Здесь m – натуральное число, $b_{ij}(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ – комплекснозначные функции.

Задача (0.1), (0.2) может быть получена из вариационной задачи для интегрального функционала, содержащего полином второго порядка от функции и ее первой производной со сдвигами аргумента [8].

Наряду с краевой задачей (0.1), (0.2) мы рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$-\frac{d^2}{dt^2}(R_0 u(t)) + \frac{d}{dt}(R_1 u(t)) + R_2 u(t) = f(t), \quad t \in (0, d), \quad (0.4)$$

с краевым условием (0.2).

Мы исследуем вопрос о том, при каких условиях на коэффициенты уравнений краевые задачи (0.1), (0.2) и (0.4), (0.2) будут иметь классические решения для любых непрерывных правых частей при условии, что существует обобщенное решение рассматриваемой задачи.

Пункт 1 посвящен свойствам разностных операторов на интервале $(0, d)$. В п. 2 мы рассмотрим разрешимость и гладкость обобщенных решений краевой задачи (0.1), (0.2) на интервале $(0, d)$. В п. 3 мы получим необходимые и достаточные условия совпадения обобщенного и классического решений этой задачи для любых правых частей. В п. 4 будут получены необходимые и достаточные условия того, что обобщенные решения задачи (0.4), (0.2) являются классическими.

1. Разностные операторы. В этом пункте мы рассмотрим свойства разностных операторов. Пусть $d = N + \theta$, где $0 < \theta \leq 1$, N – натуральное число.

Не ограничивая общности, будем предполагать, что $m = N$. Действительно, если $m < N$, можно считать, что $b_{ij}(t) \equiv 0$ при $|j| > m$. В случае, если $m > N$, оператор R_i с краевым условием (0.2) не зависит от коэффициентов $b_{ij}(t)$ при $|j| > N$.

Поскольку сдвиги на j могут отобразить точки интервала $(0, d)$ в точки множества $\mathbb{R} \setminus (0, d)$, краевые условия для дифференциально-разностного уравнения следует задавать не только в точках $\{0\}$, $\{d\}$, но и вне интервала $(0, d)$.

Введем операторы

$$I_Q: L_2(0, d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}), \quad P_Q: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(0, d), \quad R_Q: L_2(0, d) \rightarrow L_2(0, d)$$

по формулам

$$\begin{aligned} (I_Q v)(t) &= v(t), \quad t \in (0, d), & (I_Q v)(t) &= 0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus (0, d), \\ (P_Q v)(t) &= v(t), \quad t \in (0, d), \\ R_{iQ} &= P_Q R_i I_Q, \quad i = 0, 1, 2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $Q = (0, d)$.

Эти операторы будут использоваться для изучения краевой задачи (0.1), (0.2) и (0.4), (0.2). Оператор I_Q в формуле (1.1) позволяет учитывать однородные краевые условия (0.2). Умножение на оператор P_Q означает, что уравнение рассматривается не на всей оси, а лишь для $t \in (0, d)$.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства разностных операторов R_{iQ} в пространстве $L_2(0, d)$, доказательства которых можно найти в [4; гл. 1]. Мы покажем, что эти свойства тесно связаны со свойствами конечного числа матриц, элементами которых являются коэффициенты разностных операторов R_{iQ} и нули.

Если $0 < \theta < 1$, обозначим

$$\begin{aligned} Q_{1l} &= (l-1, l-1+\theta), & l &= 1, \dots, N+1, \\ Q_{2l} &= (l-1+\theta, l), & l &= 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Если $\theta = 1$, обозначим

$$Q_{1l} = (l-1, l), \quad l = 1, \dots, N+1.$$

Таким образом, мы получим два класса непересекающихся интервалов $\{Q_{1l}\}$ и $\{Q_{2l}\}$ в случае $0 < \theta < 1$ и один класс $\{Q_{1l}\}$, если $\theta = 1$. Очевидно, любые два интервала из одного класса могут быть получены друг из друга сдвигом на некоторое целое число.

ПРИМЕР 1.1. Пусть $d = 3$. Тогда $N = 2$, $\theta = 1$. Мы имеем один класс интервалов $Q_{1l} = (l-1, l)$, $l = 1, 2, 3$.

ПРИМЕР 1.2. Пусть $d = \pi$. Тогда $N = 3$, $\theta = \pi - 3$. Мы имеем два класса интервалов: $Q_{1l} = (l-1, l + \pi - 4)$, $l = 1, 2, 3, 4$, и $Q_{2l} = (l + \pi - 4, l)$, $l = 1, 2, 3$.

Обозначим через $L_2(\bigcup_l Q_{sl})$ подпространство функций в $L_2(Q)$, равных нулю вне $\bigcup_l Q_{sl}$, а через $P_s: L_2(Q) \rightarrow L_2(\bigcup_l Q_{sl})$ – оператор ортогонального проектирования функций из $L_2(Q)$ на $L_2(\bigcup_l Q_{sl})$, $l = 1, \dots, N(s)$, где

$$L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right) = \left\{ u \in L_2(0, d) : u(t) = 0 \text{ при } t \in (0, d) \setminus \bigcup_l Q_{sl} \right\}.$$

Оператор P_1 является единичным оператором при $\theta = 1$. Очевидно,

$$L_2(Q) = \bigoplus_s L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right). \quad (1.2)$$

Из определений разностных операторов и интервалов Q_{sl} вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 1.1. $L_2(\bigcup_l Q_{sl})$ – инвариантное подпространство оператора R_{iQ} .

Введем изометрический изоморфизм гильбертовых пространств

$$U_s: L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right) \rightarrow L_2^M(Q_{s1}) \quad (1.3)$$

следующим равенством:

$$(U_s u)_k(t) = u(t + k - 1), \quad t \in Q_{s1}, \quad k = 1, \dots, M, \quad (1.4)$$

где

$$L_2^M(Q_{s1}) = \prod_{k=1}^M L_2(Q_{s1}), \quad M = M(s)$$

($M = N + 1$, если $s = 1$; $M = N$, если $s = 2$).

Обозначим через $R_{i1} = R_{i1}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, матрицы порядка $(N + 1) \times (N + 1)$ с элементами

$$r_{jk}^i(t) = b_{i,k-j}(t + j - 1), \quad i = 0, 1, 2, \quad j, k = 1, \dots, N + 1. \quad (1.5)$$

Обозначим через $R_{i2} = R_{i2}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, матрицы порядка $N \times N$, полученные из R_{i1} вычеркиванием последней строки и последнего столбца. Другими словами,

$$R_{i1} = \begin{pmatrix} b_{i,0}(t) & b_{i,1}(t) & \dots & b_{i,N}(t) \\ b_{i,-1}(t+1) & b_{i,0}(t+1) & \dots & b_{i,N-1}(t+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i,-N}(t+N) & b_{i,-N+1}(t+N) & \dots & b_{i,0}(t+N) \end{pmatrix},$$

$$R_{i2} = \begin{pmatrix} b_{i,0}(t) & b_{i,1}(t) & \dots & b_{i,N-1}(t) \\ b_{i,-1}(t+1) & b_{i,0}(t+1) & \dots & b_{i,N-2}(t+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i,-N+1}(t+N-1) & b_{i,-N+2}(t+N-1) & \dots & b_{i,0}(t+N-1) \end{pmatrix}.$$

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать матрицы $R_{i1}(t)$ при $t \in [0, \theta]$, а матрицы $R_{i2}(t)$ при $t \in [\theta, 1]$.

ЛЕММА 1.2. Оператор $R_{iQ_s}: L_2^M(Q_{s1}) \rightarrow L_2^M(Q_{s1})$, определенный по формуле

$$R_{iQ_s} = U_s R_{iQ} U_s^{-1}, \quad (1.6)$$

является оператором умножения на квадратную матрицу $R_{is}(t)$ порядка $M \times M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V \in L_2^M(Q_{s1})$. Обозначим $u = U_s^{-1}V \in L_2(\bigcup_l Q_{sl})$. В силу соотношения (1.4) и определения операторов R_{iQ} получим

$$\begin{aligned} (R_{iQ}sV)_j(t) &= (R_{iQ}sU_s u)_j(t) = (U_s R_{iQ}u)_j(t) = \sum_{l=-j+1}^{M-j} b_{il}(t+j-1)u(t+l+j-1) \\ &= \sum_{k=1}^M b_{i,k-j}(t+j-1)u(t+k-1) = \sum_{k=1}^M b_{i,k-j}(t+j-1)V_k(t). \end{aligned}$$

Пусть $A: H \rightarrow H$ – ограниченный самосопряженный линейный оператор в гильбертовом пространстве H . Оператор $A: H \rightarrow H$ мы назовем *положительным* (неотрицательным), если $(Ax, x) > 0$ ($(Ax, x) \geq 0$) для всех $0 \neq x \in D(A)$. Оператор $A: H \rightarrow H$ назовем *положительно определенным*, если $(Ax, x) \geq c(x, x)$ для всех $x \in D(A)$, где $c > 0$ не зависит от x . В случае оператора умножения на эрмитову матрицу определенные таким образом понятия положительности и положительной определенности совпадают.

Из леммы 1.2 следует

ЛЕММА 1.3. Оператор $R_{iQ} + R_{iQ}^*$ является положительно определенным тогда и только тогда, когда матрицы $R_{is}(t) + R_{is}^*(t)$ положительно определены для всех $t \in \overline{Q}_{s1}$ ($s = 1, 2$, если $\theta < 1$; $s = 1$, если $\theta = 1$), где R_{is}^* – эрмитово сопряженные матрицы.

Обозначим через $W_2^k(0, d)$ пространство Соболева комплекснозначных функций, состоящее из функций, которые абсолютно непрерывны вместе со всеми своими производными вплоть до $(k-1)$ -го порядка и имеют k -ю производную из $L_2(0, d)$. В пространстве $W_2^k(0, d)$ вводится скалярное произведение по формуле

$$(u, v)_{W_2^k(0, d)} = \sum_{j=0}^k \int_0^d u^{(j)}(t) \overline{v^{(j)}(t)} dt. \quad (1.7)$$

Обозначим

$$\dot{W}_2^k(0, d) = \{v \in W_2^k(0, d) : v^{(j)}(0) = v^{(j)}(d) = 0, j = 0, 1, \dots, k-1\}.$$

Будем считать, что в уравнении (0.1) $f \in L_2(0, d)$.

ЛЕММА 1.4. Оператор R_{iQ} непрерывно отображает $\dot{W}_2^k(0, d)$ в $W_2^k(0, d)$. Если $u \in \dot{W}_2^1(0, d)$, то

$$(R_{iQ}u)' = R_{iQ}'u + R_{iQ}u', \quad (1.8)$$

где

$$R_i' = \sum_{j=-N}^N b_{ij}'(t)u(t+j), \quad R_{iQ}' = P_Q R_i' I_Q.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, равенство (1.8) выполнено для любой $u \in \dot{C}^\infty(0, d)$. Используя это равенство k раз, из ограниченности операторов R_{iQ} , $R_{iQ}' : L_2(0, d) \rightarrow L_2(0, d)$ получим

$$\|R_{iQ}u\|_{W_2^k(0, d)} \leq c\|u\|_{W_2^k(0, d)} \quad (1.9)$$

для любой $u \in \dot{C}^\infty(0, d)$. В силу того, что $\dot{C}^\infty(0, d)$ плотно в $\dot{W}_2^k(0, d)$, из (1.9) следует ограниченность оператора $R_{iQ}: \dot{W}_2^k(0, d) \rightarrow W_2^k(0, d)$ и справедливость равенства (1.8) для всех $u \in \dot{W}_2^1(0, d)$.

2. Обобщенные решения. Введем неограниченный оператор

$$\mathcal{A}_R: D(\mathcal{A}_R) \subset L_2(0, d) \rightarrow L_2(0, d),$$

заданный по формуле

$$\mathcal{A}_R v = -(R_{0Q} v')' + R_{2Q} v, \quad v \in D(\mathcal{A}_R), \quad (2.1)$$

где

$$D(\mathcal{A}_R) = \{v \in \dot{W}_2^1(0, d) : R_{0Q} v' \in W_2^1(0, d)\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В силу леммы 1.4

$$D(\mathcal{A}_R) = \{v \in \dot{W}_2^1(0, d) : R_{0Q} v \in W_2^2(0, d)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функцию $u \in D(\mathcal{A}_R)$ назовем *обобщенным решением* задачи (0.1), (0.2), если

$$\mathcal{A}_R u = f. \quad (2.2)$$

Легко показать, что это определение эквивалентно следующему.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Функция $u \in \dot{W}_2^1(0, d)$ называется *обобщенным решением* задачи (0.1), (0.2), если для всех $w \in \dot{W}_2^1(0, d)$ выполняется следующее интегральное тождество

$$\int_0^d \{(R_{0Q} u')(t) \bar{w}'(t) + (R_{2Q} u)(t) \bar{w}(t)\} dt = \int_0^d f(t) \bar{w}(t) dt. \quad (2.3)$$

При некоторых ограничениях на коэффициенты разностного оператора можно установить однозначную разрешимость задачи (0.1), (0.2).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть матрицы $R_{0s}(t) + R_{0s}^*(t)$ положительно определены, а матрицы $R_{2s}(t) + R_{2s}^*(t)$ неотрицательны для всех $t \in \bar{Q}_{s1}$ ($s = 1, 2$, если $\theta < 1$; $s = 1$, если $\theta = 1$). Тогда существует единственное обобщенное решение краевой задачи (0.1), (0.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [4].

Обозначим через $C[a, b]$ пространство непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ с нормой

$$\|f(t)\|_{C[a,b]} = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|,$$

а через $\dot{C}[a, b]$ – подпространство непрерывных функций на отрезке $[a, b]$, обращающихся в нуль на концах отрезка.

Введем также пространство $C^k[a, b]$ как множество непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$ с нормой

$$\|f(t)\|_{C^k[a,b]} = \max_{0 \leq l \leq k} \sup_{t \in [a,b]} |f^{(l)}(t)|.$$

Как показано в [4]–[6], гладкость обобщенных решений краевой задачи (0.1), (0.2) может нарушаться даже для бесконечно гладких правых частей уравнения. Однако, как показывает следующий результат, гладкость обобщенных решений сохраняется на интервалах Q_{sl} .

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\det R_{0s}(t) \neq 0$ для $t \in \overline{Q}_{s1}$ ($s = 1, 2$, если $\theta < 1$; $s = 1$, если $\theta = 1$). Пусть $f \in C[0, d]$, а u – обобщенное решение краевой задачи (0.1), (0.2). Тогда $u \in C^2(\overline{Q}_{sl})$ ($l = 1, \dots, M$; $s = 1, 2$, если $\theta < 1$; $s = 1$, если $\theta = 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку u – обобщенное решение задачи (0.1), (0.2), по определению $R_{0Q}u' \in W_2^1(0, d)$. Тогда, очевидно, $(U_s P_s R_{0Q}u')_i \in W_2^1(Q_{s1})$, $s = 1, 2$, $i = 1, \dots, M$.

Из леммы 1.1 следует, что $P_s R_{0Q} = R_{0Q} P_s$, поэтому в силу (1.6)

$$(R_{0s} U_s P_s u')_i = (U_s P_s R_{0Q} u')_i \in W_2^1(Q_{s1}).$$

Отсюда и из условия теоремы имеем

$$(U_s P_s u')_j = (R_{0s}^{-1} (R_{0s} U_s P_s u'))_j \in W_2^1(Q_{s1}). \quad (2.4)$$

Уравнение

$$-\frac{d}{dt}(R_{0Q}u')(t) + R_{2Q}u(t) = f(t), \quad t \in (0, d), \quad (2.5)$$

примет вид

$$-(R_{0Q}u)''(t) + (R'_{0Q}u)'(t) + R_{2Q}u(t) = f(t), \quad t \in (0, d), \quad (2.6)$$

где R'_{iQ} – разностные операторы, коэффициентами которых являются первые производные коэффициентов оператора R_{iQ} .

Таким образом, из уравнения (2.6) следует, что

$$-R_{0s}(t)(U_s P_s u)''(t) + (R'_{0s} U_s P_s u)'(t) + R_{2s}(t)(U_s P_s u)(t) = (U_s P_s f)(t), \quad t \in Q_{s1}. \quad (2.7)$$

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений (2.7) можно записать в виде

$$-R_{0s}(t)(U_s P_s u)''(t) = F(t), \quad t \in Q_{s1}, \quad (2.8)$$

где

$$F(t) = (U_s P_s f)(t) - (R'_{0s} U_s P_s u)'(t) - R_{2s}(t)(U_s P_s u)(t).$$

Из вложения $W_2^2(Q_{s1}) \subset C^1(\overline{Q}_{s1})$ следует, что $F_j \in C(\overline{Q}_{s1})$, $j = 1, \dots, M$. Следовательно, из (2.8) и условия $\det R_{0s}(t) \neq 0$ получаем, что $(U_s P_s u)_j \in C^2(\overline{Q}_{s1})$, $s = 1, 2$, $j = 1, \dots, M$. Таким образом, $u \in C^2(\overline{Q}_{sj})$, $s = 1, 2$, $j = 1, \dots, M$. Теорема доказана.

Будем предполагать, что $f \in C[0, d]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Функцию $u \in C^1[0, d] \cap \dot{C}[0, d]$ назовем классическим решением задачи (0.1), (0.2), если $R_{0Q}u' \in C^1[0, d]$ и функция u удовлетворяет уравнению (2.5) для всех $t \in (0, d)$.

Из определений 2.1, 2.3 следует

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $f \in C[0, d]$ и пусть u – классическое решение задачи (0.1), (0.2). Тогда u является обобщенным решением задачи (0.1), (0.2).

3. Классические решения уравнений в дивергентном виде.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\theta < 1$. Пусть $\det R_{0s}(t) \neq 0$ для $t \in \overline{Q}_{s1}$, $s = 1, 2$, и пусть $f \in C[0, d]$. В этом случае каждое обобщенное решение задачи (0.1), (0.2) является классическим решением этой задачи тогда и только тогда, когда

$$b_{0,-l}(l) = 0, \quad b_{0,N+1-l}(l-1+\theta) = 0, \quad l = 1, \dots, N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. *Достаточность.* Пусть выполнены условия

$$b_{0,-l}(l) = 0, \quad b_{0,N+1-l}(l-1+\theta) = 0, \quad l = 1, \dots, N.$$

Пусть $u(t)$ – обобщенное решение краевой задачи (0.1), (0.2). Докажем, что оно является классическим.

Поскольку функция $u(t)$ является обобщенным решением задачи (0.1), (0.2), в силу определения 2.1 $u \in \dot{W}_2^1(0, d)$ и $R_{0Q}u' \in W_2^1(0, d)$. Отсюда и из вложений $\dot{W}_2^1(0, d) \subset \dot{C}[0, d]$ следует, что

$$u(0) = 0, \tag{3.1}$$

$$u(d) = 0, \tag{3.2}$$

$$u(j-0) = u(j+0), \quad j = 1, \dots, N, \tag{3.3}$$

$$u(j-1+\theta-0) = u(j-1+\theta+0), \quad j = 1, \dots, N, \tag{3.4}$$

$$R_{0Q}u'(j-0) = R_{0Q}u'(j+0), \quad j = 1, \dots, N, \tag{3.5}$$

$$R_{0Q}u'(j-1+\theta-0) = R_{0Q}u'(j-1+\theta+0), \quad j = 1, \dots, N. \tag{3.6}$$

Поскольку $u \in \dot{W}_2^1(0, d)$, в силу леммы 1.4 $R_{2Q}u \in W_2^1(0, d)$, т.е. $R_{2Q}u \in C[0, d]$. Отсюда и из условия $f \in C[0, d]$ получим

$$(R_{0Q}u')'(j-0) = (R_{0Q}u')'(j+0), \quad j = 1, \dots, N, \tag{3.7}$$

$$(R_{0Q}u')'(j-1+\theta-0) = (R_{0Q}u')'(j-1+\theta+0), \quad j = 1, \dots, N. \tag{3.8}$$

В силу определения 2.3 и теоремы 2.2 функция $u \in D(\mathcal{A}_R)$ тогда и только тогда является классическим решением задачи (0.1), (0.2), когда

$$u'(j-0) = u'(j+0), \quad j = 1, \dots, N, \tag{3.9}$$

$$u'(j-1+\theta-0) = u'(j-1+\theta+0), \quad j = 1, \dots, N. \tag{3.10}$$

По теореме 2.2 $(U_2P_2u)_j \in C^2(\overline{Q}_{21})$, $j = 1, \dots, N$, $(U_1P_1u)_{j+1} \in C^2(\overline{Q}_{11})$, $j = 0, \dots, N$.

Обозначим

$$\varphi_j^i = (U_2P_2u)_j^{(i)}|_{t=1-0}, \quad i = 0, 1, 2, \quad j = 1, \dots, N, \tag{3.11}$$

$$\psi_j^i = (U_1P_1u)_{j+1}^{(i)}|_{t=0+0}, \quad i = 0, 1, 2, \quad j = 0, \dots, N, \tag{3.12}$$

$$\beta_j^i = (U_1P_1u)_j^{(i)}|_{t=\theta-0}, \quad i = 0, 1, 2, \quad j = 1, \dots, N+1, \tag{3.13}$$

$$\gamma_j^i = (U_2P_2u)_j^{(i)}|_{t=\theta+0}, \quad i = 0, 1, 2, \quad j = 1, \dots, N. \tag{3.14}$$

Тогда из равенств (3.1)–(3.4) получим

$$\psi_0^0 = 0, \quad (3.15)$$

$$\beta_{N+1}^0 = 0, \quad (3.16)$$

$$\varphi_j^0 - \psi_j^0 = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.17)$$

$$\beta_j^0 - \gamma_j^0 = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.18)$$

В силу лемм 1.1, 1.2 мы можем переписать (3.5)–(3.8) в виде

$$\sum_{j=1}^N b_{0,j-l}(l)(\varphi_j^1 - \psi_j^1) = b_{0,-l}(l)\psi_0^1, \quad l = 1, \dots, N, \quad (3.19)$$

$$\sum_{j=1}^N b_{0,j-l}(l-1+\theta)(\beta_j^1 - \gamma_j^1) = -b_{0,N+1-l}(l-1+\theta)\beta_{N+1}^1, \quad l = 1, \dots, N, \quad (3.20)$$

$$\sum_{j=1}^N \{b'_{0,j-l}(l)(\varphi_j^1 - \psi_j^1) + b_{0,j-l}(l)(\varphi_j^2 - \psi_j^2)\} = b'_{0,-l}(l)\psi_0^1 + b_{0,-l}(l)\psi_0^2, \quad l = 1, \dots, N, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \{b'_{0,j-l}(l-1+\theta)(\beta_j^1 - \gamma_j^1) + b_{0,j-l}(l-1+\theta)(\beta_j^2 - \gamma_j^2)\} \\ & = -b'_{0,N+1-l}(l-1+\theta)\beta_{N+1}^1 - b_{0,N+1-l}(l-1+\theta)\beta_{N+1}^2, \quad l = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Аналогично равенствам (3.15)–(3.18) из (3.9), (3.10) получим

$$\varphi_j^1 - \psi_j^1 = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.23)$$

$$\beta_j^1 - \gamma_j^1 = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.24)$$

Нам нужно показать, что для обобщенного решения $u(t)$ выполняются равенства (3.23), (3.24).

Рассмотрим систему (3.19), которая в силу (1.5) переписывается в виде

$$\sum_{j=1}^N r_{lj}^0(1)(\varphi_j^1 - \psi_j^1) = b_{0,-l}(l)\psi_0^1, \quad l = 1, \dots, N. \quad (3.25)$$

По предположению $\det R_{02}(1) \neq 0$ и $b_{0,-l}(l) = 0$. Поэтому система (3.25) имеет единственное тривиальное решение.

Аналогично при условии, что $\det R_{02}(\theta) \neq 0$ и $b_{0,N+1-l}(l-1+\theta) = 0$, система (3.20) имеет единственное тривиальное решение $\beta_j^1 - \gamma_j^1 = 0$, $j = 1, \dots, N$. Таким образом, выполняются равенства (3.23), (3.24), т.е. каждое обобщенное решение будет классическим.

2. Необходимость. Пусть каждое обобщенное решение задачи (0.1), (0.2) является классическим. Докажем, что тогда

$$b_{0,-l}(l) = 0, \quad b_{0,N+1-l}(l-1+\theta) = 0, \quad l = 1, \dots, N.$$

Предположим противное: пусть, например, $b_{0,-j_0}(j_0) \neq 0$, где $1 \leq j_0 \leq N$.

Вновь рассмотрим систему (3.25). По предположению $b_{0,-j_0}(j_0) \neq 0$, $1 \leq j_0 \leq N$. Положим $\psi_0^1 = \lambda_0 = 1$. Тогда столбец свободных членов, стоящий в правой части системы уравнений (3.25), ненулевой. Поскольку по условию $\det R_{02}(1) \neq 0$, система уравнений (3.25) имеет единственное решение $(\varphi_1^1 - \psi_1^1, \dots, \varphi_N^1 - \psi_N^1)^T$, которое, очевидно, нетривиально. Обозначим это решение через $(-\lambda_1, \dots, -\lambda_N)^T$. Данное решение не будет удовлетворять системе уравнений (3.23).

Для найденных $\varphi_j^1 - \psi_j^1$, $j = 1, \dots, N$, и $\psi_0^1 = 1$ положим $\psi_0^2 = \mu_0 = 1$ и рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N b_{0,j-l}(l)(\varphi_j^2 - \psi_j^2) \\ &= - \sum_{j=1}^N b'_{0,j-l}(l)(\varphi_j^1 - \psi_j^1) + b'_{0,-l}(l)\psi_0^1 + b_{0,-l}(l)\psi_0^2, \quad l = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Поскольку по условию $\det R_{02}(1) \neq 0$, система уравнений (3.26) имеет единственное решение $(\varphi_1^2 - \psi_1^2, \dots, \varphi_N^2 - \psi_N^2)^T$. Обозначим это решение через $(-\mu_1, \dots, -\mu_N)^T$. Положим

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0, & t \in \bigcup_{l=1}^N (l-1+\theta, l), \\ \sum_{j=0}^N \lambda_j(t-j)\eta(t-j) + \sum_{j=0}^N \mu_j(t-j)^2 \frac{\eta(t-j)}{2}, & t \in \bigcup_{l=1}^{N+1} [l-1, l-1+\theta], \end{cases} \quad (3.27)$$

где $\eta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ и $\dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ – множество финитных бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}$, $0 \leq \eta(t) \leq 1$, $(\eta(t) = 1, \text{ если } |t| \leq \theta/3; \eta(t) = 0, \text{ если } |t| \geq \theta/2)$.

Обозначим числа φ_l^i , ψ_l^i , β_l^i , γ_l^i , определенные по формулам (3.11)–(3.14) для $u = \tilde{u}$, через $\tilde{\varphi}_l^i$, $\tilde{\psi}_l^i$, $\tilde{\beta}_l^i$, $\tilde{\gamma}_l^i$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_l^i &= \tilde{\gamma}_l^i = 0, & i &= 0, 1, 2, \quad l = 1, \dots, N, \\ \tilde{\psi}_l^i &= 0, & i &= 0, \quad l = 0, \dots, N, \\ \tilde{\beta}_l^i &= 0, & i &= 0, 1, 2, \quad l = 1, \dots, N+1. \end{aligned}$$

По построению числа $\tilde{\varphi}_j^i$, $\tilde{\gamma}_j^i$, $j = 1, \dots, N$, $\tilde{\psi}_l^i$, $l = 0, \dots, N$, и $\tilde{\beta}_k^i$, $k = 1, \dots, N+1$, удовлетворяют уравнениям (3.15)–(3.22). Таким образом, $\tilde{u} \in D(\mathcal{A}_R)$ и $\mathcal{A}_R \tilde{u} \in C[0, d]$. Другими словами, функция $u = \tilde{u}$ является обобщенным решением задачи (0.1), (0.2) при $f = \mathcal{A}_R \tilde{u} \in C[0, d]$.

С другой стороны, $\sum_{i=1}^N (\tilde{\varphi}_i^1 - \tilde{\psi}_i^1)^2 \neq 0$. Следовательно, числа $\tilde{\varphi}_i^1 - \tilde{\psi}_i^1$, $i = 1, \dots, N$, не будут удовлетворять системе уравнений (3.23). Таким образом, обобщенное решение $\tilde{u}$ не является классическим. Полученное противоречие доказывает, что $b_{0,-l}(l) = 0$, $l = 1, \dots, N$. Аналогично можно показать, что $b_{0,N+1-j}(j-1+\theta) = 0$ для всех $j = 1, \dots, N$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Для случая 1-периодических функций $b_{0j}(t)$ элементы матрицы $R_{0s}(t)$ примут вид $r_{lj}^0(t) = b_{0,j-l}(t+l-1) = b_{0,j-l}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, условия

теоремы 3.1 примут вид

$$b_{0,-l}(1) = 0, \quad b_{0,N+1-l}(\theta) = 0, \quad l = 1, \dots, N.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть коэффициенты разностного оператора R_0 постоянны. Пусть $\theta < 1$. Пусть $\det R_{0s} \neq 0$, $s = 1, 2$, и пусть $f \in C[0, d]$. В этом случае каждое обобщенное решение задачи (0.1), (0.2) является классическим решением этой задачи тогда и только тогда, когда $b_{0j} = 0$, $j = \pm 1, \dots, \pm N$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\theta = 1$. Пусть $\det R_{01}(t) \neq 0$ для $t \in [0, 1]$, $\det R_{02}(1) \neq 0$, и пусть $f \in C[0, d]$. Каждое обобщенное решение задачи (0.1), (0.2) является классическим решением этой задачи тогда и только тогда, когда

$$b_{0,-l}(l) = 0, \quad b_{0,N+1-l}(l) = 0, \quad l = 1, \dots, N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 3.1.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть коэффициенты разностного оператора R_0 постоянны. Пусть $\theta = 1$. Пусть $\det R_{01} \neq 0$ и пусть $f \in C[0, d]$. В этом случае каждое обобщенное решение задачи (0.1), (0.2) является классическим решением этой задачи тогда и только тогда, когда $b_{0j} = 0$, $j = \pm 1, \dots, \pm N$.

4. Классические решения уравнений в недивергентном виде. Теперь перейдем к рассмотрению уравнения (0.4), которое имеет следующий вид:

$$-\frac{d^2}{dt^2}(R_0 u(t)) + \frac{d}{dt}(R_1 u(t)) + R_2 u(t) = f(t), \quad t \in (0, d),$$

с тем же однородным краевым условием (0.2)

$$u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus (0, d).$$

Для определения обобщенного решения, как и в п. 2, введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_R: D(\mathcal{A}_R) \subset L_2(0, d) \rightarrow L_2(0, d)$, заданный по формуле

$$\mathcal{A}_R v = -(R_{0Q} v)'' + (R_{1Q} v)' + R_2 v, \quad v \in D(\mathcal{A}_R), \quad (4.1)$$

где

$$D(\mathcal{A}_R) = \{v \in \dot{W}_2^1(0, d) : R_{0Q} v \in W_2^2(0, d)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Функцию $u \in D(\mathcal{A}_R)$ назовем обобщенным решением задачи (0.4), (0.2), если

$$\mathcal{A}_R u = f. \quad (4.2)$$

Легко показать, что это определение эквивалентно следующему.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Функция $u \in \dot{W}_2^1(0, d)$ называется обобщенным решением задачи (0.4), (0.2), если для всех $w \in \dot{W}_2^1(0, d)$ выполняется следующее интегральное тождество:

$$\int_0^d \{(R_{0Q} u)'(t) \bar{w}'(t) + (R_{1Q} u)'(t) \bar{w}(t) + (R_2 u)(t) \bar{w}(t)\} dt = \int_0^d f(t) \bar{w}(t) dt.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Рассматривая обобщенные решения, задачу (0.4), (0.2) можно записать в виде (0.1), (0.2), если $R'_0 = R_1$, т.е. $b'_{0j}(t) = b_{1j}(t)$, $j = 0, \pm 1, \dots, \pm N$. Другими словами, каждое обобщенное решение задачи (0.4), (0.2) является обобщенным решением задачи (0.1), (0.2). И наоборот, каждое обобщенное решение задачи (0.1), (0.2) является обобщенным решением задачи (0.4), (0.2), если $R'_0 = R_1$. Для классических решений этот факт неверен.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\det R_{0s}(t) \neq 0$ для $t \in \overline{Q}_{s1}$ ($s = 1, 2$, если $\theta < 1$; $s = 1$, если $\theta = 1$). Пусть $f \in C[0, d]$, а u – обобщенное решение краевой задачи (0.4), (0.2). Тогда $u \in C^2(\overline{Q}_{sl})$ ($l = 1, \dots, M$; $s = 1, 2$, если $\theta < 1$; $s = 1$, если $\theta = 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку u – обобщенное решение задачи (0.4), (0.2), по определению $R_{0Q}u \in W_2^2(0, d)$. Тогда, очевидно, $(U_s P_s R_{0Q}u)_j \in W_2^2(Q_{s1})$, где $j = 1, \dots, M$.

Из леммы 1.1 следует, что $P_s R_{0Q} = R_{0Q} P_s$, поэтому в силу (1.6)

$$(R_{0s} U_s P_s u)_j = (U_s P_s R_{0Q} u)_j \in W_2^2(Q_{s1}).$$

Отсюда и из условия теоремы имеем

$$(U_s P_s u)_j = (R_{0s}^{-1} (R_{0s} U_s P_s u))_j \in W_2^2(Q_{s1}). \quad (4.3)$$

Таким образом, из уравнения

$$-\frac{d^2}{dt^2}(R_{0Q}u)(t) + \frac{d}{dt}(R_{1Q}u)(t) + R_{2Q}u(t) = f(t), \quad t \in (0, d), \quad (4.4)$$

следует, что

$$\begin{aligned} & -R''_{0s}(t)(U_s P_s u)(t) - 2R'_{0s}(t)(U_s P_s u)'(t) - R_{0s}(t)(U_s P_s u)''(t) + R'_{1s}(t)(U_s P_s u)(t) \\ & + R_{1s}(t)(U_s P_s u)'(t) + R_{2s}(t)(U_s P_s u)(t) = (U_s P_s f)(t), \quad t \in Q_{s1}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где, как и ранее, R'_{is} и R''_{is} – матрицы, элементами которых являются первые и вторые производные элементов матриц R_{is} , $i = 0, 1, 2$, $s = 1, 2$, соответственно.

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4.5) можно записать в виде

$$-R_{0s}(t)(U_s P_s u)''(t) = F(t), \quad t \in Q_{s1}, \quad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned} F(t) = & (U_s P_s f)(t) + 2R'_{0s}(t)(U_s P_s u)'(t) + R''_{0s}(t)(U_s P_s u)(t) \\ & - R'_{1s}(t)(U_s P_s u)(t) - R_{1s}(t)(U_s P_s u)'(t) - R_{2s}(t)(U_s P_s u)(t). \end{aligned}$$

Из вложения $W_2^2(Q_{s1}) \subset C^1(\overline{Q}_{s1})$ следует, что $F_j \in C(\overline{Q}_{s1})$, $j = 1, \dots, M$. Следовательно, из (4.6) и условия $\det R_{0s}(t) \neq 0$ получаем, что $(U_s P_s u)_j \in C^2(\overline{Q}_{s1})$, $j = 1, \dots, M$. Таким образом, $u \in C^2(\overline{Q}_{sj})$, $j = 1, \dots, M$. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Функцию $u \in C^2[0, d] \cap \mathring{C}[0, d]$ назовем *классическим решением* задачи (0.4), (0.2), если $R_{0Q}u \in C^2[0, d]$, $R_{1Q}u \in C^1[0, d]$ и функция u удовлетворяет уравнению (4.4) для всех $t \in (0, d)$.

Из определений 4.1, 4.3 следует

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $f \in C[0, d]$ и пусть u – классическое решение задачи (0.4), (0.2). Тогда u является обобщенным решением задачи (0.4), (0.2).

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $\theta < 1$. Пусть $\det R_{0s}(t) \neq 0$, $t \in \overline{Q}_{s1}$, $s = 1, 2$, и пусть $f \in C[0, d]$. В этом случае каждое обобщенное решение задачи (0.4), (0.2) является классическим решением этой задачи тогда и только тогда, когда

$$b_{i,-l}(l) = 0, \quad b_{i,N+1-l}(l-1+\theta) = 0, \quad b'_{0,-l}(l) = 0, \quad b'_{0,N+1-l}(l-1+\theta) = 0,$$

где $i = 0, 1$, $l = 1, \dots, N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. *Достаточность.* Пусть выполнены условия

$$b_{i,-l}(l) = 0, \quad b_{i,N+1-l}(l-1+\theta) = 0, \quad b'_{0,-l}(l) = 0, \quad b'_{0,N+1-l}(l-1+\theta) = 0,$$

$i = 0, 1$, $l = 1, \dots, N$. Пусть $u(t)$ – обобщенное решение краевой задачи (0.4), (0.2). Докажем, что оно является классическим.

Поскольку функция $u(t)$ является обобщенным решением задачи (0.4), (0.2), в силу определения 4.1 $u \in \dot{W}_2^1(0, d)$ и $R_{0Q}u \in W_2^2(0, d)$. Отсюда и из вложений $\dot{W}_2^1(0, d) \subset \dot{C}[0, d]$ и $W_2^2(0, d) \subset C^1[0, d]$ следует, что

$$u(0) = 0, \tag{4.7}$$

$$u(d) = 0, \tag{4.8}$$

$$u(j-0) = u(j+0), \quad j = 1, \dots, N, \tag{4.9}$$

$$u(j-1+\theta-0) = u(j-1+\theta+0), \quad j = 1, \dots, N, \tag{4.10}$$

$$(R_{0Q}u)'(j-0) = (R_{0Q}u)'(j+0), \quad j = 1, \dots, N, \tag{4.11}$$

$$(R_{0Q}u)'(j-1+\theta-0) = (R_{0Q}u)'(j-1+\theta+0), \quad j = 1, \dots, N. \tag{4.12}$$

Поскольку $u \in \dot{W}_2^1(0, d)$, в силу леммы 1.4 $R_{2Q}u \in W_2^1(0, d)$, т.е. $R_{2Q}u \in C[0, d]$. Отсюда и из условия $f \in C[0, d]$ получим

$$(-(R_{0Q}u)'' + (R_{1Q}u)')(j-0) = (-(R_{0Q}u)'' + (R_{1Q}u)')(j+0), \quad j = 1, \dots, N, \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} &(-(R_{0Q}u)'' + (R_{1Q}u)')(j-1+\theta-0) \\ &= (-(R_{0Q}u)'' + (R_{1Q}u)')(j-1+\theta+0), \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Очевидно, заключение теоремы 2.1 справедливо также для краевой задачи (0.4), (0.2). Поэтому в силу определения 4.3 функция $u \in D(\mathcal{A}_R)$ тогда и только тогда является классическим решением задачи (0.4), (0.2), когда

$$u^{(i)}(j-0) = u^{(i)}(j+0), \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, N, \tag{4.15}$$

$$u^{(i)}(j-1+\theta-0) = u^{(i)}(j-1+\theta+0), \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, N, \tag{4.16}$$

$$(R_{0Q}u)''(j-0) = (R_{0Q}u)''(j+0), \quad j = 1, \dots, N, \tag{4.17}$$

$$(R_{0Q}u)''(j-1+\theta-0) = (R_{0Q}u)''(j-1+\theta+0), \quad j = 1, \dots, N, \tag{4.18}$$

$$(R_{1Q}u)'(j-0) = (R_{1Q}u)'(j+0), \quad j = 1, \dots, N, \tag{4.19}$$

$$(R_{1Q}u)'(j-1+\theta-0) = (R_{1Q}u)'(j-1+\theta+0), \quad j = 1, \dots, N. \tag{4.20}$$

Обозначим

$$\varphi_j^i = (U_2 P_2 u)_j^{(i)}|_{t=1-0}, \quad i = 0, 1, 2, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.21)$$

$$\psi_j^i = (U_1 P_1 u)_{j+1}^{(i)}|_{t=0+0}, \quad i = 0, 1, 2, \quad j = 0, \dots, N, \quad (4.22)$$

$$\beta_j^i = (U_1 P_1 u)_j^{(i)}|_{t=\theta-0}, \quad i = 0, 1, 2, \quad j = 1, \dots, N+1, \quad (4.23)$$

$$\gamma_j^i = (U_2 P_2 u)_j^{(i)}|_{t=\theta+0}, \quad i = 0, 1, 2, \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.24)$$

Тогда из равенств (4.7)–(4.10) получим

$$\psi_0^0 = 0, \quad (4.25)$$

$$\beta_{N+1}^0 = 0, \quad (4.26)$$

$$\varphi_j^0 - \psi_j^0 = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.27)$$

$$\beta_j^0 - \gamma_j^0 = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.28)$$

В силу лемм 1.1, 1.2 можем переписать (4.11)–(4.14) в виде

$$\sum_{j=1}^N b_{0,j-l}(l)(\varphi_j^1 - \psi_j^1) = b_{0,-l}(l)\psi_0^1, \quad l = 1, \dots, N, \quad (4.29)$$

$$\sum_{j=1}^N b_{0,j-l}(l-1+\theta)(\beta_j^1 - \gamma_j^1) = -b_{0,N+1-l}(l-1+\theta)\beta_{N+1}^1, \quad l = 1, \dots, N, \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \{-b_{0,j-l}(l)(\varphi_j^2 - \psi_j^2) - 2b'_{0,j-l}(l)(\varphi_j^1 - \psi_j^1) + b_{1,j-l}(l)(\varphi_j^1 - \psi_j^1)\} \\ & = -b_{0,-l}(l)\psi_0^2 - 2b'_{0,-l}(l)\psi_0^1 + b_{1,-l}(l)\psi_0^1, \quad l = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \{-b_{0,j-l}(l-1+\theta)(\beta_j^2 - \gamma_j^2) \\ & \quad - 2b'_{0,j-l}(l-1+\theta)(\beta_j^1 - \gamma_j^1) + b_{1,j-l}(l-1+\theta)(\beta_j^1 - \gamma_j^1)\} \\ & = b_{0,N+1-l}(l-1+\theta)\beta_{N+1}^2 + 2b'_{0,N+1-l}(l-1+\theta)\beta_{N+1}^1 \\ & \quad - b_{1,N+1-l}(l-1+\theta)\beta_{N+1}^1, \quad l = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Аналогично равенствам (4.25)–(4.28) из (4.15)–(4.20) получим

$$\varphi_j^i - \psi_j^i = 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.33)$$

$$\beta_j^i - \gamma_j^i = 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \{b_{0,j-l}(l)(\varphi_j^2 - \psi_j^2) + 2b'_{0,j-l}(l)(\varphi_j^1 - \psi_j^1)\} \\ & = 2b'_{0,-l}(l)\psi_0^1 + b_{0,-l}(l)\psi_0^2, \quad l = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \{b_{0,j-l}(l-1+\theta)(\beta_j^2 - \gamma_j^2) + 2b'_{0,j-l}(l-1+\theta)(\beta_j^1 - \gamma_j^1)\} \\ & = -2b'_{0,N+1-l}(l-1+\theta)\beta_{N+1}^1 - b_{0,N+1-l}(l-1+\theta)\beta_{N+1}^2, \quad l = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\sum_{j=1}^N b_{1,j-l}(l)(\varphi_j^1 - \psi_j^1) = b_{1,-l}(l)\psi_0^1, \quad l = 1, \dots, N, \quad (4.37)$$

$$\sum_{j=1}^N b_{1,j-l}(l-1+\theta)(\beta_j^1 - \gamma_j^1) = -b_{1,N+1-l}(l-1+\theta)\beta_{N+1}^1, \quad l = 1, \dots, N. \quad (4.38)$$

Нам нужно показать, что для обобщенного решения $u(t)$ выполняются равенства (4.33)–(4.38).

Рассмотрим систему (4.29), которая в силу (1.5) перепишется в виде

$$\sum_{j=1}^N r_{lj}^0(1)(\varphi_j^1 - \psi_j^1) = b_{0,-l}(l)\psi_0^1, \quad l = 1, \dots, N. \quad (4.39)$$

По предположению $\det R_{02}(1) \neq 0$ и $b_{0,-l}(l) = 0$. Поэтому система (4.39) имеет единственное тривиальное решение $\varphi_j^1 - \psi_j^1 = 0$, $j = 1, \dots, N$.

Аналогично при условии, что $\det R_{02}(\theta) \neq 0$ и $b_{0,N+1-l}(l-1+\theta) = 0$, система (4.30) имеет единственное тривиальное решение $\beta_j^1 - \gamma_j^1 = 0$, $j = 1, \dots, N$.

Согласно предположению $b_{i,-l}(l) = 0$, $b'_{0,-l}(l) = 0$ и $\det R_{02}(1) \neq 0$, для найденных $\varphi_j^1 - \psi_j^1$ и $\beta_j^1 - \gamma_j^1$, $j = 1, \dots, N$, система (4.31) имеет единственное тривиальное решение $\varphi_j^2 - \psi_j^2 = 0$, $j = 1, \dots, N$. Аналогично, используя предположения

$$b_{i,N+1-l}(l-1+\theta) = 0, \quad b'_{0,N+1-l}(l-1+\theta) = 0, \quad \det R_{02}(\theta) \neq 0,$$

для найденных $\varphi_j^1 - \psi_j^1$ и $\beta_j^1 - \gamma_j^1$, $j = 1, \dots, N$, система (4.32) имеет единственное тривиальное решение $\beta_j^2 - \gamma_j^2 = 0$, $j = 1, \dots, N$. Таким образом, выполняются равенства (4.33)–(4.38), т.е. каждое обобщенное решение будет классическим.

2. Необходимость. Пусть каждое обобщенное решение задачи (0.4), (0.2) является классическим. Докажем, что тогда

$$b_{i,-l}(l) = 0, \quad b_{i,N+1-l}(l-1+\theta) = 0, \quad b'_{0,-l}(l) = 0, \quad b'_{0,N+1-l}(l-1+\theta) = 0,$$

$i = 0, 1$, $l = 1, \dots, N$.

2.1. Предположим противное: пусть, например, $b_{0,-j_0}(j_0) \neq 0$, где $1 \leq j_0 \leq N$.

Рассмотрим систему (4.29). По предположению $b_{0,-j_0}(j_0) \neq 0$, $1 \leq j_0 \leq N$. Положим $\psi_0^1 = \lambda_0 = 1$. Тогда столбец свободных членов, стоящий в правой части системы уравнений (4.29), ненулевой. Поскольку по условию $\det R_{02}(1) \neq 0$, система уравнений (4.29) имеет единственное решение $(\varphi_1^1 - \psi_1^1, \dots, \varphi_N^1 - \psi_N^1)^T$, которое, очевидно, нетривиально. Обозначим это решение через $(-\lambda_1, \dots, -\lambda_N)^T$. Данное решение не будет удовлетворять системе уравнений (4.33) при $i = 1$.

Для найденных $\varphi_j^1 - \psi_j^1$, $j = 1, \dots, N$, и $\psi_0^1 = \lambda_0 = 1$ положим $\psi_0^2 = \mu_0 = 1$ и рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N -b_{0,j-l}(l)(\varphi_j^2 - \psi_j^2) &= -\sum_{j=1}^N \{(b_{1,-l}(l) - 2b'_{0,j-l}(l))(\varphi_j^1 - \psi_j^1)\} \\ &\quad - b_{0,-l}(l)\psi_0^2 - 2b'_{0,-l}(l)\psi_0^1 + b_{1,-l}(l)\psi_0^1, \quad l = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Поскольку по условию $\det R_{02}(1) \neq 0$, система уравнений (4.40) имеет единственное решение $(\varphi_1^2 - \psi_1^2, \dots, \varphi_N^2 - \psi_N^2)^T$. Обозначим это решение через $(-\mu_1, \dots, -\mu_N)^T$.

Положим

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0, & t \in \bigcup_{l=1}^N (l-1+\theta, l), \\ \sum_{j=0}^N \lambda_j(t-j)\eta(t-j) + \sum_{j=0}^N \mu_j(t-j)^2 \frac{\eta(t-j)}{2}, & t \in \bigcup_{l=1}^{N+1} [l-1, l-1+\theta], \end{cases} \quad (4.41)$$

где $\eta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \eta(t) \leq 1$, $(\eta(t) = 1, \text{ если } |t| \leq \theta/3; \eta(t) = 0, \text{ если } |t| \geq \theta/2)$.

Обозначим числа $\varphi_l^i, \psi_l^i, \beta_l^i, \gamma_l^i$, определенные по формулам (4.21)–(4.24) для $u = \tilde{u}$, через $\tilde{\varphi}_l^i, \tilde{\psi}_l^i, \tilde{\beta}_l^i, \tilde{\gamma}_l^i$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_l^i &= \tilde{\gamma}_l^i = 0, & i &= 0, 1, 2, \quad l = 1, \dots, N, \\ \tilde{\psi}_l^i &= 0, & i &= 0, \quad l = 0, \dots, N, \\ \tilde{\beta}_l^i &= 0, & i &= 0, 1, 2, \quad l = 1, \dots, N+1. \end{aligned}$$

По построению числа $\varphi_j^i, \gamma_j^i, j = 1, \dots, N, \psi_l^i, l = 0, \dots, N$, и $\beta_k^i, k = 1, \dots, N+1$, удовлетворяют уравнениям (4.25)–(4.32). Таким образом, $\tilde{u} \in D(\mathcal{A}_R)$ и $\mathcal{A}_R \tilde{u} \in C[0, d]$. Другими словами, функция $u = \tilde{u}$ является обобщенным решением задачи (0.4), (0.2) при $f = \mathcal{A}_R \tilde{u} \in C[0, d]$.

С другой стороны, $\sum_{i=1}^N (\tilde{\varphi}_i^1 - \tilde{\psi}_i^1)^2 \neq 0$. Значит, числа $\tilde{\varphi}_i^1 - \tilde{\psi}_i^1, i = 1, \dots, N$, не будут удовлетворять системе уравнений (4.33). Таким образом, обобщенное решение $\tilde{u}$ не является классическим. Полученное противоречие доказывает, что $b_{0,-l}(l) = 0, l = 1, \dots, N$. Аналогично можно показать, что $b_{0,N+1-l}(l-1+\theta) = 0$ для всех $l = 1, \dots, N$.

2.2. Продолжим доказательство необходимости. Будем по-прежнему предполагать, что каждое обобщенное решение является классическим. Докажем, что

$$b'_{0,-l}(l) = 0, \quad b'_{0,N+1-l}(l-1+\theta) = 0, \quad 1 \leq l \leq N.$$

Предположим противное: пусть, например, $b'_{0,-j_0}(j_0) \neq 0$, где $1 \leq j_0 \leq N$.

По доказанному в п. 2.1 доказательства

$$b_{0,-l}(l) = b_{0,N+1-l}(l-1+\theta) = 0, \quad l = 1, \dots, N.$$

Поскольку $\det R_{02}(1) \neq 0, \det R_{02}(\theta) \neq 0$, отсюда и из (4.29), (4.30) получим

$$\varphi_j^1 - \psi_j^1 = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.42)$$

$$\beta_j^1 - \gamma_j^1 = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.43)$$

В п. 2.1 доказательства было доказано, что $b_{0,-l}(l) = 0$ и $b_{0,N+1-l}(l-1+\theta) = 0$ для всех $l = 1, \dots, N$. Таким образом, равенства (4.31), (4.35)–(4.38) примут вид

$$\sum_{j=1}^N b_{0,j-l}(l)(\varphi_j^2 - \psi_j^2) = 2b'_{0,-l}(l)\psi_0^1, \quad l = 1, \dots, N, \quad (4.44)$$

$$b_{1,-l}(l)\psi_0^1 = 0, \quad l = 1, \dots, N, \quad (4.45)$$

$$b_{1,N+1-l}(l-1+\theta)\beta_{N+1}^1 = 0, \quad l = 1, \dots, N. \quad (4.46)$$

Рассмотрим систему (4.44). Положим $\psi_0^1 = 1$. Тогда столбец свободных членов, стоящий в правой части системы уравнений (4.44), ненулевой. Поскольку по условию $\det R_{02}(1) \neq 0$, система уравнений (4.44) имеет единственное решение $(\varphi_1^2 - \psi_1^2, \dots, \varphi_N^2 - \psi_N^2)^T$, которое, очевидно, нетривиально. Обозначим это решение через $(-\mu_1, \dots, -\mu_N)^T$. Данное решение не удовлетворяет системе уравнений (4.33).

Положим

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0, & t \in \bigcup_{l=1}^N (l-1+\theta, l), \\ \sum_{j=1}^N (t-j)^2 \mu_j \frac{\eta(t-j)}{2}, & t \in \bigcup_{l=1}^{N+1} [l-1, l-1+\theta], \end{cases} \quad (4.47)$$

где $\eta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \eta(t) \leq 1$ ($\eta(t) = 1$, если $|t| \leq \theta/3$; $\eta(t) = 0$, если $|t| \geq \theta/2$).

Будем использовать прежние обозначения $\tilde{\varphi}_l^i$, $\tilde{\psi}_l^i$, $\tilde{\beta}_l^i$, $\tilde{\gamma}_l^i$ для $\tilde{u}$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_l^i &= \tilde{\gamma}_l^i = 0, & i &= 0, 1, 2, \quad l = 1, \dots, N, \\ \tilde{\psi}_l^i &= 0, & i &= 0, 1, \quad l = 1, \dots, N, & \tilde{\psi}_0^0 &= 0, \\ \tilde{\beta}_l^i &= 0, & i &= 0, 1, 2, \quad l = 1, \dots, N+1. \end{aligned}$$

По построению числа φ_j^i , γ_j^i , $j = 1, \dots, N$, ψ_l^i , $l = 0, \dots, N$, и β_k^i , $k = 1, \dots, N+1$, удовлетворяют уравнениям (4.25)–(4.32). Таким образом, $\tilde{u} \in D(\mathcal{A}_R)$ и $\mathcal{A}_R \tilde{u} \in C[0, d]$. Другими словами, функция $u = \tilde{u}$ является обобщенным решением задачи (0.4), (0.2) при $f = \mathcal{A}_R \tilde{u} \in C[0, d]$.

С другой стороны, $\sum_{i=1}^N (\tilde{\varphi}_i^2 - \tilde{\psi}_i^2)^2 \neq 0$. Значит, числа $\tilde{\varphi}_i^2 - \tilde{\psi}_i^2$, $i = 1, \dots, N$, не будут удовлетворять системе уравнений (4.33) при $i = 2$. Таким образом, обобщенное решение $\tilde{u}$ не является классическим. Полученное противоречие доказывает, что $b'_{0,-l}(l) = 0$, $l = 1, \dots, N$. Аналогично можно показать, что $b'_{0,N+1-l}(l-1+\theta) = 0$, $l = 1, \dots, N$.

2.3. Перейдем к последнему шагу в доказательстве необходимости. Мы по-прежнему предполагаем, что каждое обобщенное решение является классическим. Докажем, что

$$b_{1,-l}(l) = 0, \quad b_{1,N+1-l}(l-1+\theta) = 0, \quad 1 \leq l \leq N.$$

В 2.1 и 2.2 было доказано, что

$$\begin{aligned} b_{0,-l}^{(i)}(l) &= 0, \quad b_{0,N+1-l}^{(i)}(l-1+\theta) = 0, & i &= 0, 1, \quad l = 1, \dots, N, \\ \varphi_j^i - \psi_j^i &= 0, & i &= 1, 2, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Поэтому из равенств (4.45) и (4.46) следует, что

$$b_{1,-l}(l) = 0, \quad b_{1,N+1-l}(l-1+\theta) = 0, \quad 1 \leq l \leq N.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $\theta < 1$ и коэффициенты разностного оператора R_i постоянны. Пусть $\det R_{0s} \neq 0$, $s = 1, 2$, и $f \in C[0, d]$. Тогда каждое обобщенное решение задачи (0.4), (0.2) является классическим решением тогда и только тогда, когда

$$b_{ij} = 0, \quad i = 0, 1, \quad j = \pm 1, \dots, \pm N.$$

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $\theta = 1$. Пусть $\det R_{01}(t) \neq 0$ для $t \in [0, 1]$, $\det R_{02}(1) \neq 0$, и пусть $f \in C[0, d]$. В этом случае каждое обобщенное решение задачи (0.4), (0.2) является классическим решением этой задачи тогда и только тогда, когда

$$b_{i,-l}(l) = 0, \quad b_{i,N+1-l}(l) = 0, \quad b'_{i,-l}(l) = 0, \quad b'_{i,N+1-l}(l) = 0,$$

$i = 0, 1, l = 1, \dots, N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 4.3.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $\theta = 1$ и коэффициенты разностного оператора R_i постоянны. Пусть $\det R_{01} \neq 0$ для $t \in [0, 1]$ и $f \in C[0, d]$. Тогда каждое обобщенное решение задачи (0.4), (0.2) является классическим решением тогда и только тогда, когда $b_{ij} = 0$, $i = 0, 1, j = \pm 1, \dots, \pm N$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Н. Красовский, *Теория управления движения. Линейные системы*, Наука, М., 1968.
- [2] Г. Г. Онанов, А. Л. Скубачевский, “Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела”, *Прикл. мех.*, **15**:5 (1979), 39–47.
- [3] А. В. Бицадзе, А. А. Самарский, “О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач”, *Докл. АН СССР*, **185**:4 (1969), 739–740.
- [4] A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **91**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.
- [5] Г. А. Каменский, А. Д. Мышкис, “Постановка краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами в старших членах”, *Дифференц. уравнения*, **10** (1974), 409–418.
- [6] А. Г. Каменский, “Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами”, *Дифференц. уравнения*, **12**:5 (1976), 815–824.
- [7] Д. А. Неверова, А. Л. Скубачевский, “Обобщенные и классические решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений”, *Докл. РАН*, **447**:2 (2012), 143–145.
- [8] G. A. Kamenskii, *Extrema of Nonlocal Functionals and Boundary Value Problems for Functional Differential Equations*, Nova Sci. Publ., New York, 2007.

Д. А. Неверова

Российский университет дружбы народов, г. Москва

E-mail: dneverova@gmail.com

Поступило

11.03.2013

А. Л. Скубачевский

Российский университет дружбы народов, г. Москва

E-mail: skub@lector.ru