Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Бударина, Ф. Гетце, Расстояние между сопряженными алгебраическими числами в кластерах, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 5, 780–783

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10334>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:54:17

Расстояние между сопряженными алгебраическими числами в кластерах

Н. В. Бударина, Ф. Гетце

Для натуральных чисел $n \geq 2$ и $Q > 1$ введем класс целочисленных многочленов $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$:

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[x] : \deg P = n, H(P) \leq Q\},$$

где $H = H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$ – высота P . Всюду далее, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, – корни P , а $c_1 = c_1(n)$, $c_2 = c_2(n)$, $\dots$ – величины, зависящие от n и не зависящие от H и Q . Далее $a \ll b$ означает, что существует константа $c > 0$ такая, что $a \leq cb$; выражение $a \asymp b$ эквивалентно $a \ll b \ll a$. Существует много характеристик P , связанных с его корнями. Например, производная P' в корне α_1 :

$$P'(\alpha_1) = a_n(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \dots (\alpha_1 - \alpha_n),$$

дискриминант $D(P)$:

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Оценки $|P'(\alpha_1)|$ и $|D(P)|$ как сверху, так и снизу имеют важное значение в теории трансцендентных чисел и теории диофантовых приближений [1]. На этих оценках основано доказательство проблемы Малера [2], аналога метрической теоремы А. Я. Хинчина для многочленов произвольной степени, получение точного значения размерности Хаусдорфа множеств действительных и комплексных чисел с заданной мерой трансцендентности [1].

В последние годы началось систематическое изучение величин $|\alpha_i - \alpha_j|$ для различных сопряженных алгебраических чисел α_i и α_j , и более общей задачи о кластерах $M_k = \prod_{1 \leq i < j \leq k} |\alpha_i - \alpha_j|$ различных корней $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ целочисленного многочлена P степени n , где $2 \leq k \leq n$. Оценка снизу для $|\alpha_i - \alpha_j|$ была получена Малером [3]:

$$|\alpha_i - \alpha_j| > \sqrt{3} (n+1)^{-(2n+1)/2} H(P)^{-n+1},$$

которая является частным случаем оценки снизу

$$\prod_{1 \leq i < j \leq k} |\alpha_i - \alpha_j| \gg H(P)^{-n+1}, \quad (1)$$

справедливой для любого целочисленного многочлена P степени n и имеющего, по крайней мере, $k \geq 2$ различных корней $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Пусть $n, k \in \mathbb{N}$ удовлетворяют условию $2 \leq k \leq n$. Обозначим через $E(n, k)$, соответственно $E_{\text{irr}}(n, k)$, инфимум действительных чисел δ , для которых неравенство

$$\prod_{1 \leq i < j \leq k} |\alpha_i - \alpha_j| \geq H(P)^{-\delta}$$

выполняется для каждого целочисленного многочлена P , соответственно целочисленного неприводимого многочлена P , степени n и достаточно большой высоты с различными корнями $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Из (1) следует, что $E_{\text{irr}}(n, k) \leq E(n, k) \leq n-1$ для любых n и k , удовлетворяющих $2 \leq k \leq n$.

Работа выполнена при поддержке гранта CRC 701 университета Билефельда.

DOI: 10.4213/mzm10334

© Н. В. Бударина, Ф. Гетце, 2013

Существование близких сопряженных чисел доказано в работах [4]–[8]. К настоящему времени известны только следующие точные оценки

$$E_{\text{irr}}(2, 2) = E(2, 2) = 1, \quad E_{\text{irr}}(3, 2) = E(3, 2) = 2$$

(см. [6]). Наилучшие к настоящему времени оценки снизу

$$\begin{aligned} E_{\text{irr}}(n, 2) &\geq \frac{n}{2} + \frac{n-2}{4(n-1)} && \text{для } n \geq 4, \\ E(n, 2) &\geq \frac{2n-1}{3} && \text{для } n \geq 4, \end{aligned}$$

доказаны в [7] и [8] соответственно.

Относительно нижних оценок для $E(n, k)$ и $E_{\text{irr}}(n, k)$, $k > 2$, в [6] доказано следующее:

$$\begin{aligned} E_{\text{irr}}(n, n-1) &= n-1 && \text{для } n \geq 4, \\ E(n, k) &\geq \frac{k-1}{k}n, \quad E_{\text{irr}}(n, k) \geq \frac{k-1}{k}n && \text{для } k \geq 3, \quad n = tk, \quad t \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

В работе [8] показано, что для любого целого $k \geq 3$ существует рациональное число $c_1(k)$ такое, что при любом $n \geq k$ справедливо неравенство

$$E(n, k) \geq \frac{k}{k+1}n - c_1(k). \quad (2)$$

В данной работе мы получаем в большей части диапазона изменения k лучшие, чем в (2), оценки для $E_{\text{irr}}(n, k)$. Более того, мы даем оценки снизу для количества многочленов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, для которых такие оценки выполняются.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $2 \leq k \leq n$ и $0 \leq \gamma \leq 2(n+1)/(k(k+1))$. Тогда существует N_1 , где $N_1 > c_2 Q^{n+1 - ((k-1)(k+2)/2)\gamma}$, многочленов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ таких, что

$$E_{\text{irr}}(n, k) \geq \frac{k(k-1)}{2}\gamma.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. При $\gamma = 2(n+1)/(k(k+1))$ получаем $E_{\text{irr}}(n, k) \geq ((k-1)/(k+1))(n+1)$, что при $k > c_3 n$, где $c_3 < 1$, улучшает оценку (2).

Если $k = n$, то $E_{\text{irr}}(n, n) \geq n-1$ и $N_1 > c_4 Q^{2/n}$, т.е. в этом случае оценки сверху и снизу для кластера M_n совпадают.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Интересным является тот факт, что оценки для кластера

$$M'_k = |\alpha_1 - \alpha_2| |\alpha_1 - \alpha_3| \cdots |\alpha_1 - \alpha_k|, \quad 2 \leq k \leq n,$$

который является нормированным значением модуля производной в корне (или его частью), получаются, а может и являются, такими же как и для одного сомножителя $|\alpha_1 - \alpha_i|$. Из теоремы 1 можно получить, что существует не менее $c_5 Q^{(n+1)/3}$ многочленов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, для различных сопряженных корней которых выполняются неравенства

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \ll Q^{-(n+1)/3}, \quad M'_k \ll Q^{-(n+1)/3}, \quad k > 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Обозначим через B_1 множество точек x из интервала $I \subset [-1/2, 1/2]$, для которых при

$$v_0 \geq v_1 \geq \cdots \geq v_m \geq -1, \quad 0 \leq j \leq m, \quad \sum_{i=0}^m v_i = n-m \quad (3)$$

система неравенств

$$\begin{aligned} \delta_0 Q^{-v_j} &< |P^{(j)}(x)| < c_0 Q^{-v_j}, & 0 \leq j \leq m, & P^{(0)}(x) = P(x), \\ \delta_0 Q &< |P^{(j)}(x)| < c_0 Q, & m+1 \leq j \leq n \end{aligned} \quad (4)$$

имеет решение в неприводимых многочленах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$. Согласно определению $E_{\text{irr}}(n, m+1)$ имеем $2 \leq m+1 \leq n$.

Для приложений системы неравенств (4) потребуем, чтобы при $1 \leq j \leq m$ последовательность

$$d_j = v_{j-1} - v_j, \quad d_{m+1} = v_m + 1 \quad (5)$$

не возрастала. Упорядочим корни многочлена P относительно точки x так, чтобы

$$|x - \alpha_1| \leq |x - \alpha_2| \leq \dots \leq |x - \alpha_n|.$$

В работе [4] доказана следующая лемма, которая имеет много приложений при оценках дискриминантов и результатов.

ЛЕММА 1. Пусть даны целые числа $n \geq 2$ и $m \in [0, n-1]$. Тогда существуют положительные постоянные $\delta_0 = \delta_0(n)$ и $c_0 = c_0(n)$ такие, что $\mu B_1 > (3/4)\mu I$.

ЛЕММА 2. Пусть $x \in B_1$. Тогда при выполнении условия (5) корни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1}$ многочлена P удовлетворяют неравенствам

$$|x - \alpha_j| \ll Q^{-v_{j-1}+v_j}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad |x - \alpha_{m+1}| \ll Q^{-v_m-1}.$$

Лемма 2 доказана в [9].

Возьмем $\gamma = 1 + v_m$, $\gamma = v_{j-1} - v_j$, $2 \leq j \leq m$ и $v_0 - v_1 \geq \gamma$. Тогда

$$v_m = -1 + \gamma, \quad v_{m-1} = v_m + \gamma = -1 + 2\gamma, \quad \dots, \quad v_1 = v_2 + \gamma = -1 + m\gamma.$$

Из равенства $\sum_{i=0}^m v_i = n - m$ получаем $v_0 = n - (m(m+1)/2)\gamma$. Вычислим $v_0 - v_1 = n + 1 - (m(m+3)/2)\gamma$. Поскольку $v_0 - v_1 \geq \gamma$, то $0 \leq \gamma \leq 2(n+1)/((m+1)(m+2))$, откуда следует, что

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i < j \leq m+1} |\alpha_i - \alpha_j| &\leq \prod_{1 \leq i < j \leq m+1} (|x - \alpha_i| + |x - \alpha_j|) \\ &\ll \prod_{1 \leq i < j \leq m+1} |x - \alpha_j| \asymp Q^{-(m(m+1)/2)\gamma}. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, в точке $x \in B_1$ мы построили многочлен P такой, что для кластера M_{m+1} справедливо неравенство (6) и $|x - \alpha_1| < c_6 Q^{-v_0+v_1}$. Этот же многочлен P может быть решением (4)–(6) и для других точек $x \in B_1$, в окрестности которых есть другие корни многочлена P . Мера объединения таких интервалов, взятая по n корням многочлена P не превосходит $2nc_6 Q^{-v_0+v_1}$. Возьмем другую точку $x' \in B_1$ вне этого объединения и построим новый многочлен с кластером корней M_{m+1} , удовлетворяющим (6) и т.д. Поскольку по лемме 1 множество B_1 имеет меру, большую $(3/4)\mu I$, то в результате построим не менее

$$\frac{3}{4} 2^{-1} n^{-1} c_6^{-1} Q^{v_0-v_1} \mu I \gg Q^{v_0-v_1} \asymp Q^{n+1-(m(m+3)/2)\gamma}$$

многочленов, кластеры M_{m+1} которых удовлетворяют (6), причем никакие многочлены в этом наборе не будут совпадать. Положим $k = m+1$. Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Baker, W. M. Schmidt, *Proc. London Math. Soc.* (3), **21** (1970), 1–11. [2] В. Г. Спринджук, *Проблема Малера в метрической теории чисел*, Наука и техника, Минск, 1967. [3] K. Mahler, *Michigan Math. J.*, **11**:3 (1964), 257–262. [4] V. V. Beresnevich, V. I. Bernik, F. Götze, *Compositio Math.*, **146**:5 (2010), 1165–1179. [5] Y. Bugeaud, M. Mignotte, *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2), **47**:2 (2004), 553–556. [6] Y. Bugeaud, M. Mignotte, *Int. J. Number Theory*, **6**:3 (2010), 587–602. [7] Y. Bugeaud, A. Dujella, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **43**:6 (2011), 1239–1244. [8] Y. Bugeaud, A. Dujella, *Root Separation for Reducible Integer Polynomials*, arXiv: math.NT/1306.2128v1. [9] В. В. Бересневич, В. И. Берник, Ф. Гетце, *Докл. НАН Беларуси*, **54**:5 (2010), 21–23.

Н. В. Бударина

Хабаровское отделение Института
прикладной математики ДВО РАН
E-mail: buda77@mail.ru

Поступило

03.07.2013

Ф. Гетце

Bielefeld University, Германия
E-mail: goetze@math.uni-bielefeld.de