Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Радомский, О возможности усиления неравенств
типа Сидона, *Матем. заметки*, 2013, том 94, вы-
пуск 5, 792–795

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10335>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 04:39:56

О возможности усиления неравенств типа Сидона

А. О. Радомский

Обобщения классического неравенства Сидона (см., например, [1; т. 1, с. 393–395]) были установлены в работах [2]–[4]. Следующая теорема является усилением теоремы 2.3 из работы [2] и теоремы 1 из работы [4].

ТЕОРЕМА 1. Пусть последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $n_{k+1}/n_k \geq \lambda > 1$, $k = 1, 2, \dots$. Существуют константы $c = c(\lambda) > 0$ и $\gamma = \gamma(\lambda) \in (0, 1)$, зависящие лишь от λ , такие, что для любого тригонометрического полинома вида

$$f(x) = \sum_{k=l}^N p_k(x) \cos n_k x,$$

где p_k – вещественные тригонометрические полиномы с $\deg(p_k) \leq [\gamma n_l]$, $k = l, \dots, N$, $N \geq l$, $l = 1, 2, \dots$, справедливо неравенство

$$\|f\|_{\infty} \geq c \sum_{k=l}^N \|p_k\|_1.$$

Здесь $\|\cdot\|_p$ – норма в пространстве $L^p(0, 2\pi)$, $1 \leq p \leq \infty$:

$$\|f\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{[0, 2\pi]} |f(x)|, \quad \|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Приведенный ниже результат показывает, что в теореме 1 (при $n_k = 2^k$) условие $\deg p_k \leq [\gamma 2^l]$ нельзя заменить на $\deg p_k \leq [2^{k-k^\varepsilon}]$ ни при каком $\varepsilon \in (0, 1)$. Доказательство теоремы 2 опирается на идеи из работы [5].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varepsilon, \tilde{\varepsilon}$ – действительные числа, причем $1/2 \leq \varepsilon < \tilde{\varepsilon} < 1$. Для любого $W \in \mathbb{N}$ существуют вещественные тригонометрические полиномы $p_k(x)$, $k = 1, \dots, W$, такие, что $\deg p_k \leq [2^{k-k^\varepsilon}]$, $\|p_k\|_1 \geq 1/3$, $\|p_k\|_{\infty} \leq 70$, $k = 1, \dots, W$, и

$$\max_{1 \leq n \leq W} \left\| \sum_{k=1}^n p_k(x) \cos 2^k x \right\|_{\infty} \leq C W^{\tilde{\varepsilon}}, \quad (1)$$

где $C = C(\varepsilon, \tilde{\varepsilon}) > 0$ – константа, зависящая лишь от ε и $\tilde{\varepsilon}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Возьмем $k_0 = k_0(\varepsilon, \tilde{\varepsilon}) \in \mathbb{N}$, $k_0 > 5$, такое, что при $k \geq k_0$ выполнено:

- 1) $2^{k-k^\varepsilon} \geq 6$;
- 2) $2^{k^\varepsilon - k^{\tilde{\varepsilon}}} k^3 < 1/4$;
- 3) $2^{(k-1)^\varepsilon - k^\varepsilon} > 1/2$;
- 4) $k^{\tilde{\varepsilon}} < (1/8)k$.

Обозначим $m_k := [2^{k-k^\varepsilon}]$. Пусть функция $f \in L^2(0, 2\pi)$ и последовательность $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$, $l_k \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условию

$$\frac{l_{k+1}}{l_k} \geq q > 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда для $S^*(x) = \sup_{k \geq 1} |S_{l_k}(f, x)|$ справедливо неравенство (см., например, [1; т. 2, с. 246])

$$\|S^*\|_2 \leq c_0(q)\|f\|_2, \quad (2)$$

где константа $c_0 = c_0(q) > 0$ зависит только от q . Возьмем константу c_0 из неравенства (2), соответствующую $q = 23/16$. Положим $\alpha = \max(70\sqrt{8}c_0, 1)$. Возьмем произвольное $W \geq 8k_0$, $W \in \mathbb{N}$. Положим $a = [W^{\bar{\varepsilon}}]$. Полиномы $p_k(x)$, $k = 1, \dots, W$, удовлетворяющие условиям теоремы, будем строить по индукции. Положим

$$p_k(x) \equiv 1, \quad k = 1, \dots, k_0 + a.$$

Пусть полиномы $p_1(x), \dots, p_N(x)$ ($N \geq k_0 + a$) уже построены. Построим $p_{N+1}(x)$. Положим

$$F_k(x) := \sum_{j=k_0}^k p_j(x) \cos 2^j x,$$

$$\delta_j(x) := p_j(x) \cos 2^j x \text{ и}$$

$$E_N^k := \{x \in [0, 2\pi) : |F_k(x)| > \alpha\sqrt{N}\}, \quad k = k_0, \dots, N, \quad (3)$$

$$B_N := \bigcup_{k=k_0}^N E_N^k, \quad \tilde{B}_N := \bigcup_{k=k_0}^{N-a} O_{(2\pi(N-k)^2)/m_N}(E_N^k), \quad (4)$$

где $O_\varepsilon(G)$ обозначает ε -окрестность множества G на $[0, 2\pi)$ с метрикой окружности. Через $d(x, y)$ будем обозначать расстояние на окружности $[0, 2\pi)$ между точками x и y . Положим

$$\Lambda_{N+1} := \left\{ j \in \{1, \dots, m_{N+1}\} : \tilde{B}_N \cap O_{\pi/m_{N+1}}\left(\frac{2\pi j}{m_{N+1}}\right) = \emptyset \right\}, \quad (5)$$

$$p_{N+1}(x) := \frac{1}{m_{N+1}} \sum_{j \in \Lambda_{N+1}} K_{m_{N+1}-1}\left(x - \frac{2\pi j}{m_{N+1}}\right), \quad (6)$$

где

$$K_{m-1}(x) = \frac{\sin^2(mx/2)}{m \sin^2(x/2)}$$

– ядра Фейера. Оценим $|\Lambda_{N+1}|$. Используя неравенство (2), получаем

$$\mu(B_N) \leq \frac{c_0^2 2\pi \|F_N\|_2^2}{\alpha^2 N} = \frac{c_0^2 2\pi \sum_{k=k_0}^N \|\delta_k\|_2^2}{\alpha^2 N} \leq \frac{c_0^2 2\pi \sum_{k=k_0}^N \|\delta_k\|_\infty^2}{\alpha^2 N} \leq \frac{c_0^2 2\pi 70^2 N}{\alpha^2 N} \leq \frac{\pi}{4}. \quad (7)$$

Обозначим через $\text{Conn } G$ число компонент связности множества G . Так как $\deg |F_k(x)|^2 \leq 4 \cdot 2^k$, то получаем

$$\text{Conn } E_N^k \leq 4 \cdot 2^k. \quad (8)$$

Следовательно,

$$\text{Conn } \tilde{B}_N \leq \sum_{k=k_0}^{N-a} \text{Conn } E_N^k \leq 4 \frac{2^{N+1}}{2^a} \leq 4 \frac{2^{N+1}}{2^{W^{\bar{\varepsilon}}-1}} \leq 8 \frac{2^{N+1}}{2^{N^{\bar{\varepsilon}}}}. \quad (9)$$

Учитывая (7), (8) и условие 1) на k_0 , получаем (см. (4))

$$\begin{aligned} \mu(\tilde{B}_N) &\leq \mu(B_N) + \sum_{k=k_0}^{N-a} \frac{4\pi(N-k)^2}{m_N} \text{Conn } E_N^k \leq \frac{\pi}{4} + 16\pi \sum_{k=k_0}^{N-a} \frac{(N-k)^2}{2^N/2^{N^{\bar{\varepsilon}}} - 1} 2^k \\ &\leq \frac{\pi}{4} + 16\pi \sum_{k=k_0}^{N-a} \frac{(N-k)^2}{2^N/2^{N^{\bar{\varepsilon}}} - 2^{N-1}/2^{N^{\bar{\varepsilon}}}} 2^k = \frac{\pi}{4} + 32\pi 2^{N^{\bar{\varepsilon}}} \sum_{s=a}^{N-k_0} \frac{s^2}{2^s}. \end{aligned}$$

Поскольку функция $f(x) = x^2/2^x$ монотонно убывает при $x \geq 3$ и, как нетрудно видеть, $a > 5$, получаем (см. условия 2) и 4) на k_0)

$$\mu(\tilde{B}_N) \leq \frac{\pi}{4} + 32\pi 2^{N^\varepsilon} \frac{a^2}{2^a} N \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \frac{2^{W^\varepsilon} W^3}{2^{W^\varepsilon - 1}} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

Оценим число интервалов

$$I_j := O_{\pi/m_{N+1}} \left(\frac{2\pi j}{m_{N+1}} \right),$$

которые пересекаются с $\tilde{B}_N$. Для каждого такого интервала возможен один из двух случаев: либо он содержит граничную точку $\tilde{B}_N$, либо он целиком содержится в $\tilde{B}_N$. Число интервалов первого типа (см. (9)) не превосходит $2 \text{Conn } \tilde{B}_N \leq 16 \cdot 2^{N+1}/2^{N^\varepsilon}$. Пусть число интервалов второго типа равно S . Тогда, поскольку интервалы I_j не пересекаются при разных j , то (см. (10)) имеем

$$S \frac{2\pi}{m_{N+1}} \leq \mu(\tilde{B}_N) \leq \frac{\pi}{2}$$

и, следовательно,

$$S \leq \frac{m_{N+1}}{4} \leq \frac{1}{4} \frac{2^{N+1}}{2^{(N+1)^\varepsilon}}.$$

Отсюда находим (см. условия 1)–3) на k_0)

$$|\Lambda_{N+1}| \geq \frac{2^{N+1}}{2^{(N+1)^\varepsilon}} \left(\frac{3}{4} - 16 \frac{2^{(N+1)^\varepsilon}}{2^{N^\varepsilon}} \right) - 1 \geq \frac{1}{3} \frac{2^{N+1}}{2^{(N+1)^\varepsilon}}. \quad (11)$$

Учитывая, что $K_m(x) \geq 0$ и $\|K_m\|_1 = 1$, имеем (см. (6), (11))

$$\|p_{N+1}\|_1 = \frac{1}{m_{N+1}} \sum_{j \in \Lambda_{N+1}} \|K_{m_{N+1}-1}\|_1 \geq \frac{1}{m_{N+1}} \frac{1}{3} \frac{2^{N+1}}{2^{(N+1)^\varepsilon}} \geq \frac{1}{3}.$$

Хорошо известна оценка

$$K_{m-1}(x) \leq \begin{cases} 10m \cdot \min\left(1, \frac{1}{m^2 x^2}\right), & |x| \leq \pi, \\ 10m \cdot \min\left(1, \frac{1}{m^2 (2\pi - |x|)^2}\right), & \pi < |x| \leq 2\pi. \end{cases} \quad (12)$$

Из (12) нетрудно вывести (см. (6)), что $\|p_{N+1}\|_\infty \leq 70$. Оценим $\|F_{N+1}\|_\infty$. Положим

$$k(x) := \max\{k_0 \leq j \leq N+1 : |F_j(x)| \leq \alpha\sqrt{N}\}.$$

Поскольку

$$|F_{k_0}(x)| = |p_{k_0}(x) \cos 2^{k_0} x| = |\cos 2^{k_0} x| \leq 1 \leq \alpha \leq \alpha\sqrt{N},$$

то функция $k(x)$ корректно определена. Возьмем произвольное $x \in [0, 2\pi)$. Рассмотрим два случая:

1) $k(x) \geq N - a$; тогда

$$|F_{N+1}(x)| \leq |F_{k(x)}(x)| + \sum_{j=k(x)+1}^{N+1} |\delta_j(x)| \leq \alpha\sqrt{N} + 70(a+1); \quad (13)$$

2) $k(x) < N - a$; тогда

$$\begin{aligned} |F_{N+1}(x)| &\leq |F_{k(x)}(x)| + \sum_{j=k(x)+1}^{k(x)+a+1} |\delta_j(x)| + \sum_{j=k(x)+a+2}^{N+1} |\delta_j(x)| \\ &\leq \alpha\sqrt{N} + 70(a+1) + \sum_{j=k(x)+a+2}^{N+1} |\delta_j(x)|. \end{aligned} \quad (14)$$

Оценим последнее слагаемое. Покажем, что (см. (3), (4))

$$x \in E_{j-1}^{k(x)+1} \subset \tilde{B}_{j-1}, \quad j = k(x) + a + 2, \dots, N + 1. \quad (15)$$

Действительно, $|F_{k(x)+1}(x)| > \alpha\sqrt{N} \geq \alpha\sqrt{j-1}$, и так как $k(x) \geq k_0$ и $j-1 \geq k(x) + 1 + a \geq k_0 + 1 + a$, то (15) выполняется. Следовательно (см. (5)), для любого $l \in \Lambda_j$

$$d\left(x, \frac{2\pi l}{m_j}\right) \geq \frac{2\pi|j-1-(k(x)+1)|^2}{m_{j-1}} = \frac{2\pi|j-k(x)-2|^2}{m_{j-1}}. \quad (16)$$

Из (16) (см. также (6), (12) и условия 1) и 3) на k_0) нетрудно вывести, что $|\delta_j(x)| \leq 40/|j-k(x)-2|^2$. Следовательно,

$$\sum_{j=k(x)+a+2}^{N+1} |\delta_j(x)| \leq \sum_{j=k(x)+a+2}^{N+1} \frac{40}{|j-k(x)-2|^2} \leq 40 \sum_{s=a}^{\infty} \frac{1}{s^2} < 10.$$

Отсюда (см. (14)) получаем

$$|F_{N+1}(x)| \leq \alpha\sqrt{N} + 70a + 80 \leq \alpha\sqrt{W} + 70W^{\tilde{\varepsilon}} + 80 \leq (\alpha + 150)W^{\tilde{\varepsilon}}. \quad (17)$$

Таким образом, в обоих случаях (см. (13), (17)) для всех $x \in [0, 2\pi)$ выполнено $|F_{N+1}(x)| \leq (\alpha + 150)W^{\tilde{\varepsilon}}$. Следовательно,

$$\|p_n\|_1 \geq \frac{1}{3}, \quad \|p_n\|_{\infty} \leq 70, \quad \|F_n\|_{\infty} \leq (\alpha + 150)W^{\tilde{\varepsilon}}, \quad n = k_0 + a + 1, \dots, W. \quad (18)$$

Из (18) нетрудно получить, что неравенство (1) выполнено с константой $C = 8k_0 + \alpha + 150$ для произвольного W (где для $W < 8k_0$ в качестве полиномов $p_k(x)$ мы положим $p_k(x) \equiv 1$, $k = 1, \dots, W$). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Т. 1, 2, Мир, М., 1965. [2] Б. С. Кашин, В. Н. Темляков, *Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа*, Сборник статей. Посвящается Петру Лаврентьевичу Ульянову к его семидесятилетию, АФЦ, М., 1999, 69–99. [3] Б. С. Кашин, В. Н. Темляков, *Матем. заметки*, **64**:4 (1998), 637–640. [4] А. О. Радомский, *Матем. заметки*, **89**:4 (2011), 589–595. [5] П. Г. Григорьев, *Матем. заметки*, **61**:6 (1997), 935–938.

А. О. Радомский

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: artrad@list.ru

Поступило
17.06.2013