Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Журавлёва, О двух наименьших числах Пизо, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 5, 784–787

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10336>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 15:49:03

О двух наименьших числа Пизо

В. В. Журавлева

1. Введение. Напомним, что *числом Пизо* называется целое алгебраическое число, такое что оно само больше 1, а его сопряженные лежат строго внутри единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Числа Пизо могут быть охарактеризованы с помощью их диофантовых свойств. Известен следующий результат [1; гл. VIII].

ТЕОРЕМА 1. 1) Если θ – число Пизо, а λ – целое алгебраическое из поля $\mathbb{Q}(\theta)$, то последовательность $\|\lambda\theta^n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

2) Если $\theta > 1$ – алгебраическое число, $\lambda \neq 0$ – действительное и последовательность $\|\lambda\theta^n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то θ – число Пизо, а $\lambda \in \mathbb{Q}(\theta)$.

(Здесь и далее $\|\cdot\|$ обозначает расстояние до ближайшего целого, в то время как $\{\cdot\}$ – это дробная часть.)

Диофантовым свойствам чисел Пизо посвящено достаточно много работ (см. [2]–[4]). В частности, в своей статье автор [5], рассматривая величину

$$L(\theta) := \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\xi\theta^n\|$$

в случае $\theta = (\sqrt{5} + 1)/2$, доказал следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Выполнено равенство $L((\sqrt{5} + 1)/2) = 1/5$.

Настоящая статья посвящена вычислению величины $L(\theta)$ для максимального корня уравнения $x^3 - x - 1 = 0$. Известно (см. работу К. Зигеля [6]), что это число является самым маленьким числом Пизо.

ТЕОРЕМА 3. Пусть θ – наибольший корень уравнения $x^3 - x - 1 = 0$, тогда выполнено $L(\theta) = 1/5$.

Для доказательства этой теоремы достаточно сделать следующее:

- 1) установить существование такого ξ , что $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\xi\theta^n\| = 1/5$;
- 2) построить функцию $U(x, y, z)$ такую, что $L(\theta) \leq \max_{x, y, z \in \mathbb{R}} U(x, y, z) = 1/5$; а именно, такой функцией является

$$U(x, y, z) = \min_{x, y, z \in \mathbb{R}} \{\|x\|, \|y\|, \|z\|, \|x + y\|, \|y + z\|, \|x + y + z\|, \|x + 2y + z\|, \|x + 2y + 2z\|, \|2x + 3y + 2z\|\}.$$

Исходя из этого, данная статья организована следующим образом. Во втором пункте мы докажем первое утверждение. Затем перейдем к доказательству второго утверждения. Следует отметить, что в его доказательстве мы опираемся на результаты компьютерных вычислений.

Аналогичным образом может быть получен результат для второго по минимальности числа Пизо (см. [6]).

ТЕОРЕМА 4. Пусть θ – наибольший корень уравнения $x^4 - x^3 - 1 = 0$. Тогда выполнено $L(\theta) = 3/17$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 12-01-00681-а).

DOI: 10.4213/mzm10336

© В. В. ЖУРАВЛЕВА, 2013

2. Оценка снизу. Пусть $\theta, \theta_2, \theta_3$ – корни уравнения $x^3 - x - 1 = 0$. Заметим, что последовательности

$$\begin{aligned} A &= (a_n)_{n=1}^{\infty}, & \text{где } a_n &= \theta_2^{n-1}, \\ B &= (b_n)_{n=1}^{\infty}, & \text{где } b_n &= \theta_3^{n-1}, \\ D &= (d_n)_{n=1}^{\infty}, & \text{где } d_n &= \xi \theta^{n-1} \end{aligned}$$

(ξ – любое действительное число) удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$x_n = x_{n-2} + x_{n-3}, \quad n \geq 4.$$

Очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Также любая последовательность, являющаяся линейной комбинацией A и B , будет рекуррентной с характеристическим уравнением $x^3 - x - 1 = 0$ и стремится к 0. Каждая последовательность, удовлетворяющая рекуррентному соотношению $x_n = x_{n-2} + x_{n-3}$ при $n \geq 4$, однозначно задается тремя своими первыми членами.

Точки $(0, 0, 0)$, $(1, \theta_2, \theta_2^2)$, $(1, \theta_3, \theta_3^2)$ лежат в плоскости $x + \theta^2 y + \theta z = 0$. Поэтому, если (x, y, z) принадлежит этой плоскости, то для рекуррентной последовательности $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ с характеристическим уравнением $x^3 - x - 1 = 0$ и $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ выполнено $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$.

Легко видно, что для последовательности $C = (c_n)_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей рекуррентному соотношению

$$c_n = c_{n-2} + c_{n-3}, \quad n \geq 4,$$

с $c_1 = 2/5$, $c_2 = 4/5$, $c_3 = 3/5$ выполняются равенства

$$\{c_{4k-3}\} = \frac{2}{5}, \quad \{c_{4k-2}\} = \frac{4}{5}, \quad \{c_{4k-1}\} = \frac{3}{5}, \quad \{c_{4k}\} = \frac{1}{5}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|c_n\| = 1/5$.

Из вышесказанного следует, что если

$$\left(d_1 - \frac{2}{5}\right) + \theta^2 \left(d_2 - \frac{4}{5}\right) + \theta \left(d_3 - \frac{3}{5}\right) = 0,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\{c_n\} - \{d_n\}) = 0.$$

Таким образом, если взять

$$\xi = \frac{2 + 4\theta^2 + 3\theta}{5(1 + 2\theta^3)},$$

то $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|d_n\| = 1/5$. Тем самым, доказана оценка снизу $L(\theta) \geq 1/5$.

3. Оценка сверху. Для доказательства второго утверждения мы будем исследовать график функции

$$F(x, y, z) := \min\{\|x\|, \|y\|, \|z\|, \|x + y\|, \|y + z\|, \|x + y + z\|, \|x + 2y + z\|, \|x + 2y + 2z\|, \|2x + 3y + 2z\|\}$$

при $0 \leq x, y, z < 1$. Он состоит из кусков трехмерных аффинных плоскостей. Очевидно, что экстремумы $F(x, y, z)$ могут находиться только в точках пересечения 4 таких плоскостей.

ОСНОВНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ. *Максимум функции $F(x, y, z)$ достигается в 4 следующих точках:*

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) &:= \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right), & (x_2, y_2, z_2) &:= \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \\ (x_3, y_3, z_3) &:= \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right), & (x_4, y_4, z_4) &:= \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right). \end{aligned}$$

Основное утверждение состоит из нескольких вспомогательных утверждений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Для доказательства $F(x, y, z) \leq 1/5$ при $0 \leq x, y, z < 1$ достаточно доказать $F(x, y, z) \leq 1/5$ при $1/5 \leq x, y, z \leq 4/5$.

Это следует из очевидного наблюдения, что при $\min\{\|x\|, \|y\|, \|z\|\} < 1/5$ значение функции можно оценить сверху: $F(x, y, z) \leq \min\{\|x\|, \|y\|, \|z\|\} < 1/5$.

Результаты компьютерных вычислений. Пройдя область $1/5 \leq x, y, z \leq 4/5$ с шагом $1/1000$ по всем трем направлениям, было получено неравенство

$$F(x, y, z) < \frac{1}{5} - \frac{4}{1000}, \quad \text{если } (x, y, z) \notin \mathcal{F}_i, \quad \text{где } i = 1, 2, 3, 4,$$

и

$$\mathcal{F}_1 = \begin{cases} \left| x - \frac{1}{5} \right| \leq \frac{12}{1000}, \\ \left| y - \frac{2}{5} \right| \leq \frac{12}{1000}, \\ \left| z - \frac{4}{5} \right| \leq \frac{12}{1000}; \end{cases} \quad \mathcal{F}_2 = \begin{cases} \left| x - \frac{2}{5} \right| \leq \frac{12}{1000}, \\ \left| y - \frac{4}{5} \right| \leq \frac{12}{1000}, \\ \left| z - \frac{3}{5} \right| \leq \frac{12}{1000}; \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_3 = \begin{cases} \left| x - \frac{4}{5} \right| \leq \frac{12}{1000}, \\ \left| y - \frac{3}{5} \right| \leq \frac{12}{1000}, \\ \left| z - \frac{1}{5} \right| \leq \frac{12}{1000}; \end{cases} \quad \mathcal{F}_4 = \begin{cases} \left| x - \frac{3}{5} \right| \leq \frac{12}{1000}, \\ \left| y - \frac{1}{5} \right| \leq \frac{12}{1000}, \\ \left| z - \frac{2}{5} \right| \leq \frac{12}{1000}. \end{cases}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Если в вершинах куба с длинами сторон, равными $1/1000$, значения $F(x, y, z) < 1/5 - 4/1000$, то и во всех точках внутри этого куба $F(x, y, z) < 1/5$.

Заметим, что $\partial F/\partial x + \partial F/\partial y + \partial F/\partial z \leq 7$. Самая удаленная точка от вершин куба находится на расстоянии $5/10000$ от каждой из вершин. В ней

$$F(x, y, z) < \frac{1}{5} - \frac{4}{1000} + 7 \frac{5}{10000} < \frac{1}{5}.$$

Осталось рассмотреть области $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. В них достаточно точно построить график функции. Подробно опишем область $\mathcal{F}_1(x, y, z)$. Для остальных рассуждения аналогичны.

Анализ области $\mathcal{F}_1$. В области $\mathcal{F}_1(x, y, z)$ выполнено

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &:= \|x\| = x, & u_4(x, y, z) &:= \|x + y\| = 1 - x - y, \\ u_2(x, y, z) &:= \|y\| = y, & u_5(x, y, z) &:= \|y + z\| = y + z - 1, \\ u_3(x, y, z) &:= \|z\| = 1 - z, & u_6(x, y, z) &:= \|x + y + z\| = x + y + z - 1, \\ u_7(x, y, z) &:= \|x + 2y + z\| = 2 - x - 2y - z, \\ u_8(x, y, z) &:= \|x + 2y + 2z\| = 3 - x - 2y - 2z, \\ u_9(x, y, z) &:= \|2x + 3y + 2z\| = 2x + 3y + 2z - 3. \end{aligned}$$

Функции $u_i(1/5, 2/5, 4/5) = 1/5$ при нечетных i и $2/5$ при четных i . Следовательно, в формировании максимума участвуют только линейные формы с нечетными индексами.

Область $\mathcal{F}_1$ — это куб. Разделим его на 5 областей в зависимости от того, какая из функций $u_i(x, y, z)$, $i = 1, 3, 5, 7, 9$, минимальна. Таким построением мы и определим точку, в которой достигается максимум. Ею будет $(1/5, 2/5, 4/5)$. Отметим, что в этой точке пересекаются все 5 областей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. W. S. Cassels, *An Introduction to Diophantine Approximations*, Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys., **45**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1957. [2] T. Vijayaraghavan, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **37** (1941), 349–357. [3] A. Dubickas, *Bull. London Math. Soc.*, **38**:1 (2006), 70–80. [4] M. J. Bertin, A. Decomps-Guilloux, M. Grandet-Hugot, M. Pathiaux-Delefosse, J. P. Schreiber, *Pisot and Salem Numbers*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992. [5] V. Zhuravleva, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **25** (2013), 499–520. [6] C. L. Siegel, *Duke Math. J.*, **11**:3 (1944), 597–602.

В. В. Журавлева

Московский государственный

университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: victoria.zhuravleva@me.com

Поступило

24.06.2013