Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Никольская, Об алгебраических классах когомологий на гладкой модели расслоенного произведения семейств КЗ поверхностей, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 5, 738–746

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10337>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 03:37:53

Об алгебраических классах когомологий на гладкой модели расслоенного произведения семейств КЗ поверхностей

О. В. Никольская

Доказана гипотеза Ходжа об алгебраических циклах для гладкой проективной модели X расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$ неизотривиальных 1-параметрических семейств КЗ поверхностей (возможно, с вырождениями) при некоторых ограничениях на ранги решеток трансцендентных циклов общих геометрических слоев X_{ks} и представления групп Ходжа $Hg(X_{ks})$.

Библиография: 15 названий.

DOI: 10.4213/mzm10337

Введение

Гладкая комплексная проективная поверхность S называется *КЗ поверхностью*, если $\Omega_S^2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S$ и $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$, где $\mathcal{O}_S$ – пучок ростков голоморфных функций, Ω_S^2 – пучок ростков голоморфных 2-форм.

Пусть $\pi_k: X_k \rightarrow C$ – такой морфизм гладкого проективного трехмерного многообразия на кривую, что все слои морфизма π_k являются объединениями гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями, общий геометрический слой X_{ks} является КЗ поверхностью ($k = 1, 2$). Мы называем семейство $\pi_k: X_k \rightarrow C$ *неизотривиальным*, если существуют хотя бы два неизоморфных гладких геометрических слоя морфизма π_k .

Для гладкого слоя X_{1s} семейства $X_1 \rightarrow C$ обозначим через $Hg(X_{1s})$ группу Ходжа КЗ поверхности X_{1s} . Пусть $NS_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ – трансцендентная часть пространства $H^2(X_{1s}, \mathbb{Q})$ (ортогональное дополнение подпространства

$$NS_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \stackrel{\text{def}}{=} NS(X_{1s}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \subset H^2(X_{1s}, \mathbb{Q})$$

алгебраических классов когомологий относительно индекса пересечения).

В этой статье мы доказываем следующие теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00097) и при частичной финансовой поддержке фонда Дмитрия Зимина «Династия».

ТЕОРЕМА 1. Для проективных неизотривиальных семейств $\pi_k: X_k \rightarrow C$ КЗ поверхностей (возможно с вырождениями) над гладкой проективной кривой C предположим, что общие геометрические слои X_{1s}, X_{2s} удовлетворяют хотя бы одному из следующих условий:

(i) $\text{rank NS}(X_{1s})$ является нечетным числом, $\text{rank NS}(X_{1s}) \neq \text{rank NS}(X_{2s})$;

(ii) $\text{rank NS}(X_{1s}) \neq 18$, $\text{End}_{\text{Hg}(X_{1s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \mathbb{Q}$, $\text{rank NS}(X_{1s}) \neq \text{rank NS}(X_{2s})$.

Тогда для любой гладкой проективной модели X расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$ верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах [1].

ТЕОРЕМА 2. Гипотеза Ходжа верна для гладкой модели X расслоенного квадрата $X_1 \times_C X_1$, если семейство КЗ поверхностей $\pi_1: X_1 \rightarrow C$ неизотривиальное и для общего геометрического слоя X_{1s} выполнено хотя бы одно из следующих условий:

(iii) $p_1 = 22 - \text{rank NS}(X_{1s})$ – нечетное простое число;

(iv) $\text{rank NS}(X_{1s}) \neq 18$ и $\text{End}_{\text{Hg}(X_{1s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \mathbb{Q}$.

Здесь общность точки $s \in C$ означает, что она принадлежит $C \setminus \Delta_{\text{countable}}$, где $\Delta_{\text{countable}}$ – счетное подмножество, зависящее от семейств π_k ; мы можем также предполагать, что функции $s \mapsto \text{rank NS}(X_{ks})$ постоянны на множестве $C \setminus \Delta_{\text{countable}}$.

Теоремы 1 и 2 можно рассматривать как важные шаги в доказательстве стандартной гипотезы Гротендика $B(X)$ (типа Лефшеца) об алгебраичности оператора Ходжа “звездочка” [2]–[4] и гипотетического существования мотивного разложения Чжоу–Лефшеца для некоторых гладких комплексных проективных многообразий X , которое обсуждается в работе Виала [5].

1. Алгебраические циклы на гладкой модели расслоенного произведения семейств КЗ поверхностей

В этом разделе мы докажем теорему 1.

1.1. Пусть $\sigma: X \rightarrow X_1 \times_C X_2$ – разрешение особенностей расслоенного произведения, $\pi: X \rightarrow C$ – структурный морфизм, $q_k: X_1 \times_C X_2 \rightarrow X_k$ – каноническая проекция. Положим

$$\Delta_k = \{\delta \in C \mid \text{Sing}(X_{k\delta}) \neq \emptyset\}, \quad \Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2, \quad C' = C \setminus \Delta.$$

Пусть

$$X' = X \setminus \pi^{-1}(\Delta), \quad X'_k = X_k \setminus \pi_k^{-1}(\Delta).$$

Обозначим через $\pi': X' \rightarrow C'$, $\pi'_k: X'_k \rightarrow C'$ соответствующие структурные морфизмы. Фиксируем точку $s \in C'$. Тогда слои X_{1s} и X_{2s} являются КЗ поверхностями. Пусть $\rho^{(i)}: \pi_1(C', s) \rightarrow \text{GL}(H^i(X_s, \mathbb{Q}))$ – представление монодромии,

$$G^{(i)} = \overline{\rho^{(i)}(\pi_1(C', s))} \subset \text{GL}(H^i(X_s, \mathbb{Q}))$$

– замыкание группы $\rho^{(i)}(\pi_1(C', s))$ в топологии Зариского группы $\text{GL}(H^i(X_s, \mathbb{Q}))$. Аналогично определяются группы $G_k^{(i)}$, ассоциированные с представлениями $\rho_k^{(i)}: \pi_1(C', s) \rightarrow \text{GL}(H^i(X_{ks}, \mathbb{Q}))$. Обозначим через $(G^{(i)})^0$ связную компоненту единицы группы $G^{(i)}$. Рассматривая, если необходимо, конечное разветвленное накрытие $\tilde{C} \rightarrow C$ и подходящие гладкие модели $\tilde{X}_k$ многообразий $X_k \times_C \tilde{C}$, мы можем (и будем)

считать (принимая во внимание теорему Мамфорда о полустабильных редукциях [6; с. 53–54]), что $G^{(i)} = (G^{(i)})^0$, потому что если гипотеза Ходжа верна для гладкого проективного 5-мерного многообразия $\tilde{X}$ и существует доминантное рациональное отображение $\tilde{X} \rightarrow X$, то гипотеза Ходжа верна для X ([7; следствие 1.2], [8; следствие 1.8]). Группа $G^{(i)}$ полупростая в силу [9; следствие 4.2.9] и не зависит от выбора точки $s \in C'$. Кроме того, можно считать [6; с. 53–54], что все вырожденные слои структурного морфизма $\pi: X \rightarrow C$ являются объединениями гладких многообразий кратности 1 с нормальными пересечениями.

Согласно теореме Делиня [10; теорема 7.3] можно считать, что существует такое счетное подмножество $\Delta_{\text{countable}} \subset C'$, что для любой точки $s \in C' \setminus \Delta_{\text{countable}}$ группа $G_k^{(2)}$ является нормальной подгруппой группы Ходжа $\text{Hg}(X_{ks})$ ($k = 1, 2$). Мы будем называть точку $s \in C' \setminus \Delta_{\text{countable}}$ *общей в смысле Ходжа*. Для такой точки s алгебра Ли $\text{Lie } G_k^{(2)}$ является *идеалом* в алгебре Ли $\text{Lie } \text{Hg}(X_{ks})$.

1.2. ЛЕММА 1. *Имеем $H^2(X_k, \mathbb{Q}) = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k)$, $H^2(X, \mathbb{Q}) = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы известно [2; лемма 2.5], а второе доказано там же при дополнительном предположении, что $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$.

Пусть $f: Z \rightarrow \pi^{-1}(\Delta)$ – нормализация схемы $\pi^{-1}(\Delta)$. Тогда Z – несвязное объединение гладких неприводимых компонент дивизора $\pi^{-1}(\Delta)$. Поскольку $f: Z \rightarrow \pi^{-1}(\Delta)$ – разрешение особенностей замкнутого подмногообразия $i_{\Delta}: \pi^{-1}(\Delta) \hookrightarrow X$, имеется точная последовательность смешанных $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [11; следствие (8.2.8)]:

$$H^0(Z, \mathbb{Q}) \xrightarrow{(i_{\Delta}f)_*} H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q}),$$

где $(i_{\Delta}f)_*$ – морфизм типа $(1, 1)$ рациональных структур Ходжа. Поэтому

$$(i_{\Delta}f)_* H^0(Z, \mathbb{Q}) = \text{Ker}[H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q})] \quad (1.2.1)$$

является структурой Ходжа типа $(1, 1)$.

Хорошо известно, что существует канонический сюръективный морфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа $H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$ [12; следствие (15.14)], включенный в коммутативную диаграмму с точными строками [12; диаграмма (15.1) для случая $m = 1$]

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & H^2(X, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \psi_2 \\ & & H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) & & & & \\ & & \downarrow \gamma_2 & & & & \\ & & H^1(C, j_* R^1\pi'_*\mathbb{Q}) & & & & \\ & & \downarrow \beta_2 & & & & \\ 0 & \longrightarrow & H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\beta_2} & H^2(X', \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (1.2.2)$$

где $\gamma_2 \circ \alpha_2$ – морфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа и β_2 – морфизм смешанных структур Ходжа [12; теоремы (15.3), (15.4)]. По теореме Делиня каноническое отображение

$H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ – сюръективный морфизм рациональных структур Ходжа [9; п. 4.1.1, 4.1.2]. Поэтому диаграмма (1.2.2) дает коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & H^2(X, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \psi_2 \\
 & & H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_2) & \xrightarrow{\beta_2} & \text{Im}(\varphi_2) & \longrightarrow & H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) \longrightarrow 0
 \end{array} \quad (1.2.3)$$

Поскольку $R^1\pi'_*\mathbb{Q} = 0$, то (1.2.1) и нижняя строка диаграммы (1.2.3) дают точную последовательность рациональных структур Ходжа

$$0 \rightarrow (i_{\Delta}f)_*H^0(Z, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0. \quad (1.2.4)$$

В силу неизотривияльности гладкого семейства КЗ поверхностей $\pi'_k: X'_k \rightarrow C'$ и одного из результатов Ю. Г. Зархина [13; следствие 4.1.1] имеем

$$H^0(C', R^2\pi'_{k*}\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} \hookrightarrow \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}). \quad (1.2.5)$$

Очевидно, что из формулы Кюннета на слоях гладкого морфизма π' следует равенство

$$H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) = H^0(C', R^2\pi'_{1*}\mathbb{Q}) \oplus H^0(C', R^2\pi'_{2*}\mathbb{Q}).$$

Поэтому $H^2(X, \mathbb{Q}) = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$ в силу (1.2.4)–(1.2.5) и теоремы Лефшеца о дивизорах на X . Лемма доказана.

1.3. В силу леммы 1, равенств

$$\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}) = H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\text{Hg}(X_{ks})} = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^{\pi_1(C', s)}$$

[2; формулы (2.17), (2.18)] и теоремы Делиня [9; теорема 4.1.1] существует каноническое сюръективное отображение ограничения

$$\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k) = H^2(X_k, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^2\pi'_{k*}\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}).$$

Поэтому элементы из $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})$ поднимаются до алгебраических классов из пространства $H^2(X_k, \mathbb{Q})$. С другой стороны, элементы пространства $H^4(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)}$ поднимаются до алгебраических классов из $H^4(X_k, \mathbb{Q})$, потому что каноническое отображение ограничения $H^4(X_k, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)}$ сюръективно по теореме Делиня [9; теорема 4.1.1].

Сильная теорема Лефшеца гласит, что $H^4(X_k, \mathbb{Q}) = H^2(X_k, \mathbb{Q}) \smile \text{cl}_{X_k}(H_k)$, где H_k – гиперплоское сечение многообразия X_k . Поэтому из леммы 1 следует, что пространство $H^4(X_k, \mathbb{Q})$ порождается алгебраическими классами когомологий.

1.4. ЛЕММА 2. Пусть $\pi_k: X_k \rightarrow C$ проективное неизотривиальное семейство КЗ поверхностей (возможно с вырождениями) над гладкой проективной кривой, причем для точки $s \in C'$, общей в смысле Ходжа для каждого из семейств $\pi_k: X_k \rightarrow C$, выполнены следующие условия:

$$\text{rank NS}(X_{1s}) \neq 18, \quad \text{End}_{\text{Hg}(X_{1s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \mathbb{Q}, \quad \text{rank NS}(X_{1s}) \neq \text{rank NS}(X_{2s}).$$

Тогда

$$\text{Hom}_{\pi_1(C', s)}(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая, в случае необходимости, подходящее разветвленное накрытие $\hat{C} \rightarrow C$, мы можем считать, что группы $G_k^{(2)}$ связны ($k = 1, 2$).

Из условий

$$\text{rank NS}(X_{1s}) \neq 18, \quad \text{End}_{\text{Hg}(X_{1s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \mathbb{Q}$$

и результатов Зархина [13; пример 2.2.3] следует, что группа Ходжа $\text{Hg}(X_{1s})$ является абсолютно простой $\mathbb{Q}$ -группой типа $B_{(p_1-1)/2}$ (если $p_1 \stackrel{\text{def}}{=} 22 - \text{rank NS}(X_{1s})$ – нечетное число) или $D_{(p_1)/2} \neq D_2$ (если p_1 – четное число). С другой стороны, точка $s \in C$ является общей в смысле Ходжа, поэтому $G_1^{(2)}$ является нетривиальной (в силу неизотривиальности семейства КЗ поверхностей $\pi_1: X_1 \rightarrow C$) нормальной подгруппой $\mathbb{Q}$ -простой связной алгебраической группы $\text{Hg}(X_{1s})$. Поэтому $G_1^{(2)} = \text{Hg}(X_{1s})$ и, следовательно, $\pi_1(C', s)$ -модуль $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ является простым, так как он является простым $\text{Hg}(X_{1s})$ -модулем по теореме Зархина [13; теорема 1.6].

Будем предполагать в дальнейшем, что

$$\text{Hom}_{\pi_1(C', s)}(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}) \neq 0.$$

Тогда простой $\pi_1(C', s)$ -модуль $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ является прямым слагаемым полупростого $\pi_1(C', s)$ -модуля $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ [9; теорема 4.2.6].

Если $\text{End}_{\text{Hg}(X_{2s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})$ является вполне вещественным полем и для КЗ поверхности X_{2s} выполнено одно из условий (1.2.1), (1.2.3), (1.2.4) в обозначениях [2], то по лемме Мустафина [14; § 4, лемма 3] алгебра Ли $\text{Lie Hg}(X_{2s})$ является $\mathbb{Q}$ -простой [2; п. 1.4] и, следовательно, $\pi_1(C', s)$ -модуль $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ является простым, причем он содержит простой $\pi_1(C', s)$ -модуль $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$. Поэтому

$$\dim \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \dim \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp},$$

что противоречит условию леммы. Если для КЗ поверхности X_{2s} выполнено условие (1.2.2) в обозначениях [2], то

$$\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^{\perp} \otimes \overline{\mathbb{Q}} = \bigoplus_i V_i(X_{ks}),$$

где в силу результатов [2; п. 1.3–1.5] пространство $V_i(X_{2s})$ является неприводимым $\pi_1(C', s)$ -модулем степени 4 или прямой суммой $\pi_1(C', s)$ -модулей степеней 1 или 2 (потому что $G_2^{(2)}$ является связной нормальной подгруппой в группе Ходжа $\text{Hg}(X_{2s})$), в то время как $V_i(X_{1s})$ является неприводимым $\pi_1(C', s)$ -модулем степени 3, $2n + 1$ ($n \geq 2$), $2n$ ($n \geq 3$). Это противоречит существованию включения $\pi_1(C', s)$ -модулей

$$\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \subset \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}.$$

Если $\text{End}_{\text{Hg}(X_{2s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ не является вполне вещественным полем, то из [2; формула (1.5)] следует, что $V_i(X_{2s})$ является прямой суммой 1-мерных модулей (с тривиальным действием $\pi_1(C', s)$) или неприводимым $\pi_1(C', s)$ -модулем степени $n + 1$ (потому что $G_2^{(2)}$ является связной нормальной подгруппой в группе Ходжа $\text{Hg}(X_{2s})$ с полупростой частью $\text{Hg}(X_{2s})^{\text{ss}}$ типа $A_n \times \cdots \times A_n = A_n^{e_0}$ ($n \geq 1$)). Поскольку для КЗ поверхности X_{1s} группа Ходжа $\text{Hg}(X_{1s})$ является абсолютно простой $\mathbb{Q}$ -группой и включение $\pi_1(C', s)$ -модулей $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \hookrightarrow \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ индуцирует сюръективный морфизм алгебраических $\mathbb{Q}$ -групп $G_2^{(2)} \rightarrow G_1^{(2)}$, из доказанного выше равенства $G_1^{(2)} = \text{Hg}(X_{1s})$ следует, что простая алгебра Ли $\text{Lie Hg}(X_{1s})$ типа $B_{(p_1-1)/2}$ или $D_{p_1/2}$ имеет тип A_n ($n \geq 1$). Значит, $n = 1$ и $V_i(X_{1s})$ является неприводимым 3-мерным представлением группы $\pi_1(C', s)$, в то же время из [2; формула (1.5)] следует, что $\dim V_i(X_{2s}) = 2$; это противоречит существованию включения $\pi_1(C', s)$ -модулей

$$\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \subset \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}.$$

Лемма доказана.

1.5. При выполнении условия (i) пространство $H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q})$ порождается образами при краевом отображении алгебраических классов в $H^4(X, \mathbb{Q})$, лежащих в

$$\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_1) \cup \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_2), \quad H^4(X_1, \mathbb{Q}), \quad H^4(X_2, \mathbb{Q}),$$

где $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k)$ отождествляется с образом $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k)$ при каноническом отображении $(q_k\sigma)^*: H^2(X_k, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{Q})$, определенном композицией $X \xrightarrow{\sigma} X_1 \times_C X_2 \xrightarrow{q_k} X_k$, и $H^4(X_k, \mathbb{Q})$ отождествляется с образом $H^4(X_k, \mathbb{Q})$ при каноническом отображении $(q_k\sigma)^*: H^4(X_k, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^4(X, \mathbb{Q})$ [2; формулы (2.16), (2.19), (2.20)]. В силу леммы 2 это же верно при выполнении условия (ii). В частности, точная последовательность [2; (2.16)]

$$0 \rightarrow (i_{\Delta}f)_* H^2(Z, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

рациональных структур Ходжа дает точную последовательность $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$0 \rightarrow (i_{\Delta}f)_*[H^2(Z, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(Z, \mathbb{C})] \rightarrow [H^4(X, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X, \mathbb{C})] \rightarrow H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0. \quad (1.5.1)$$

Теорема Лефшеца о дивизорах на гладком (возможно, несвязном) многообразии Z показывает, что (1.5.1) имеет вид

$$0 \rightarrow (i_{\Delta}f)_* \text{NS}_{\mathbb{Q}}(Z) \rightarrow [H^4(X, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X, \mathbb{C})] \rightarrow H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0.$$

По доказанному выше $H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q})$ порождается образами алгебраических классов на X , поэтому $H^4(X, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X, \mathbb{C})$ порождается классами когомологий алгебраических циклов коразмерности 2 на X . Значит, для X верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах. Теорема 1 доказана.

2. О геометрии расслоенного квадрата семейства КЗ поверхностей

В этом разделе мы докажем теорему 2.

2.1. Если p_1 – простое нечетное число, то согласно [7; следствие 0.9] для *общей* в смысле Ходжа точки $s \in C'$ пространство $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ является абсолютно непри-

водимым $\mathrm{Hg}(X_{1s})$ -модулем, поэтому группа $\mathrm{Hg}(X_{1s}) = \mathrm{SO}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \Phi)$ – простая алгебраическая группа типа $B_{(p_1-1)/2}$.

Если

$$\mathrm{rank} \mathrm{NS}(X_{1s}) \neq 18, \quad \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \mathbb{Q},$$

то в силу теоремы Зархина [13; теорема 2.2.1] группа $\mathrm{Hg}(X_{1s})$ является абсолютно простой алгебраической группой типа $B_{(p_1-1)/2}$ или $D_{p_1/2} \neq D_2$. Можно считать, что выполнено условие $G_1^{(2)} = \mathrm{Hg}(X_{1s})$ [2; формула (2.1)], так что $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ является абсолютно неприводимым $\pi_1(C', s)$ -модулем степени p_1 . Поскольку группа $G_1^{(2)}$ не зависит от выбора точки $s \in C'$, можно считать [2; п. 4.6.], что для всех $s \in C' \setminus \Delta_{\text{countable}}$ имеется включение $G_1^{(2)} \subset \mathrm{Hg}(X_{1s})$, поэтому из абсолютной неприводимости $\pi_1(C', s)$ -модуля $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ следует абсолютная неприводимость $\mathrm{Hg}(X_{1s})$ -модуля $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$, так что для всех $s \in C' \setminus \Delta_{\text{countable}}$ в силу леммы Шура имеется равенство

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \mathbb{Q}$$

и, следовательно, выполнено условие (iv).

Из результатов, полученных в п.п. 1.2–1.3, имеем

$$H^2(X_1, \mathbb{Q}) = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_1), \quad H^4(X_1, \mathbb{Q}), \quad H^2(X, \mathbb{Q})$$

порождены классами алгебраических циклов.

2.2. Группа $\pi_1(C', s)$ оставляет неподвижными элементы из $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})$ в силу включения $G_1^{(2)} \hookrightarrow \mathrm{Hg}(X_{1s})$. Значит, из [2; формула (2.18)] следует, что

$$\begin{aligned} H^0(C', R^2\pi'_{1*}\mathbb{Q} \otimes R^2\pi'_{1*}\mathbb{Q}) &\xrightarrow{\sim} [H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{1s}, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C', s)} \\ &= [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \oplus \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\otimes 2}]^{\pi_1(C', s)} \\ &= [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})]^{\pi_1(C', s)} \oplus [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})]^{\pi_1(C', s)} \\ &\quad \oplus [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\pi_1(C', s)} \oplus [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\pi_1(C', s)} \\ &= [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})] \oplus [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\pi_1(C', s)}. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Очевидно, что

$$[\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\pi_1(C', s)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\pi_1(C', s)}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}).$$

Поскольку $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ является абсолютно неприводимым $\pi_1(C', s)$ -модулем степени p_1 , в силу леммы Шура имеем: $\mathrm{Hom}_{\pi_1(C', s)}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}) = \mathbb{Q}$. В итоге

$$\dim_{\mathbb{Q}}[\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\pi_1(C', s)} = 1. \quad (2.2.2)$$

Отображение $H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q})$ сюръективно по теореме Делиня [9; теорема 4.1.1]. Кроме того,

$$H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) = H^0(C', R^4\pi'_{1*}\mathbb{Q}) \oplus H^0(C', R^2\pi'_{1*}\mathbb{Q} \otimes R^2\pi'_{1*}\mathbb{Q}) \oplus H^0(C', R^4\pi'_{1*}\mathbb{Q}), \quad (2.2.3)$$

В силу [2; формула (2.1)] имеем

$$\begin{aligned} G_1^{(2)} &= \mathrm{Hg}(X_{1s}), \\ H^0(C', R^2\pi'_{1*}\mathbb{Q}) &\xrightarrow{\sim} H^2(X_{1s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} = H^2(X_{1s}, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(X_{1s})} = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}), \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

поэтому

$$\begin{aligned} & [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\pi_1(C',s)} \\ &= [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{G_1^{(2)}} = [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\mathrm{Hg}(X_{1s})} \\ &\hookrightarrow [H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{1s}, \mathbb{Q})]^{\mathrm{Hg}(X_{1s})} \\ &\hookrightarrow H^4(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Согласно [7; теорема 0.8] пространство

$$H^4(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{C})$$

порождается классами пересечений дивизоров и классом диагонали

$$\Delta_{X_{1s}} \hookrightarrow X_{1s} \times X_{1s}$$

(в частности, гипотеза Ходжа выполнена для $X_{1s} \times X_{1s}$), потому что для *общей* в смысле Ходжа точки $s \in C$, пространство $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ является абсолютно неприводимым $\mathrm{Hg}(X_{1s})$ -модулем ([7; следствие 0.9]).

Заметим, что в силу результатов Окамото [15; следствие 2.5] образ класса

$$\mathrm{cl}_X(\sigma^{-1}(\Delta_{X_1})) \in H^4(X, \mathbb{Q})$$

(где $\Delta_{X_1} \hookrightarrow X_1 \times_C X_1$ – диагональ) при каноническом сюръективном морфизме $H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q})$ не когомологичен сумме пересечений дивизоров с коэффициентами из $\mathbb{Q}$, потому что

$$H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^4(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)} \subset H^4(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{Q})$$

– образ $H^4(X, \mathbb{Q})$ при каноническом морфизме ограничения

$$H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{Q}).$$

Пусть $\sigma: X \rightarrow X_1 \times_C X_1$ – разрешение особенностей расслоенного квадрата, причем можно считать, что все слои являются объединениями гладких многообразий кратности 1 с нормальными пересечениями. В силу [2; лемма 2.2, формулы (2.17), (2.18)] и теоремы Делиня [9; теорема 4.1.1], существует каноническое сюръективное отображение ограничения

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_1) = H^2(X_1, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_{1s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)} = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}).$$

Поэтому элементы из $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})$ поднимаются до алгебраических классов из пространства $H^2(X_1, \mathbb{Q})$. С другой стороны, элементы пространства $H^4(X_{1s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)}$ поднимаются до алгебраических классов из $H^4(X_1, \mathbb{Q})$, потому что каноническое отображение ограничения $H^4(X_1, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X_{1s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)}$ сюръективно по теореме Делиня [9; теорема 4.1.1].

Согласно (2.2.1)–(2.2.4) и результатам Окамото [15] пространство $H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q})$ порождается образом алгебраического класса $\mathrm{cl}_X(\sigma^{-1}(\Delta_{X_1}))$ и образами при канонических отображениях алгебраических классов в $H^4(X, \mathbb{Q})$, лежащих в

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_1) \cup \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_1), \quad H^4(X_1, \mathbb{Q}),$$

где $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_1)$ отождествляется с образом $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_1)$ при каноническом отображении $(q_k\sigma)^*: H^2(X_1, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{Q})$, определенном композицией $X \xrightarrow{\sigma} X_1 \times_C X_1 \xrightarrow{q_k} X_1$, и $H^4(X_1, \mathbb{Q})$ отождествляется с образом $H^4(X_1, \mathbb{Q})$ при каноническом отображении $(q_k\sigma)^*: H^4(X_1, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^4(X, \mathbb{Q})$. В частности, точная последовательность [2; формула (2.16)] структур Ходжа

$$0 \rightarrow (i_{\Delta}f)_*H^2(Z, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

дает в рассматриваемом случае точную последовательность (1.5.1), из которой следует гипотеза Ходжа для X . Теорема 2 доказана.

Автор благодарит С. Г. Танкеева за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. V. D. Hodge, “The topological invariants of algebraic varieties”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, V. 1 (Cambridge, MA, 1950), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1952, 182–192.
- [2] О. В. Никольская, “Об алгебраических циклах на расслоенном произведении семейств K3-поверхностей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:1 (2013), 145–164.
- [3] С. Г. Танкеев, “О стандартной гипотезе для комплексных 4-мерных эллиптических многообразий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:5 (2012), 119–142.
- [4] С. Г. Танкеев, “О стандартной гипотезе для комплексных 4-мерных эллиптических многообразий и компактификаций минимальных моделей Нерона”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:1 (2014), 181–214.
- [5] Ch. Vial, “Projectors on the intermediate algebraic Jacobians”, *New York J. Math.*, **19** (2013), 793–822.
- [6] G. Kempf, F. F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal Embeddings. I*, Lecture Notes in Math., **339**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973.
- [7] С. Г. Танкеев, “Об арифметике и геометрии общего гиперповерхностного сечения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 173–204.
- [8] С. Г. Танкеев, “Моноидальные преобразования и гипотезы об алгебраических циклах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:3 (2007), 197–224.
- [9] П. Делинь, “Теория Ходжа. II”, *Математика. Сб. пер.*, **17**:5 (1973), 3–56; P. Deligne, “Théorie de Hodge. II”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **40** (1971), 5–57.
- [10] Ю. Г. Зархин, “Весы простых алгебр Ли в когомологиях алгебраических многообразий”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:2 (1984), 264–304.
- [11] P. Deligne, “Théorie de Hodge. III”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **44** (1974), 5–77.
- [12] S. Zucker, “Hodge theory with degenerating coefficients: L_2 cohomology in the Poincaré metric”, *Ann. of Math.* (2), **109**:3 (1979), 415–476.
- [13] Yu. G. Zarhin, “Hodge groups of K3 surfaces”, *J. Reine Angew. Math.*, **341** (1983), 193–220.
- [14] Г. А. Мустафин, “Семейства алгебраических многообразий и инвариантные циклы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:5 (1985), 948–978.
- [15] M. Okamoto, “On a certain decomposition of 2-dimensional cycles on a product of two algebraic surfaces”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **57**:6 (1981), 321–325.

О. В. Никольская

Владимирский государственный университет

им. А. Г. и Н. Г. Столетовых

E-mail: papichonok@yandex.ru

Поступило

07.06.2013

Исправленный вариант

07.04.2014