Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Бодренко, Обобщение теоремы Бонне о поверхностях Дарбу, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 6, 812–820

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10338>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:28:49

Обобщение теоремы Бонне о поверхностях Дарбу

И. И. Бодренко

Известная теорема О. Бонне утверждает, что на поверхности Дарбу в трехмерном евклидовом пространстве вдоль каждой линии кривизны соответствующая ей главная кривизна пропорциональна кубу другой главной кривизны. В данной работе получено обобщение этой теоремы по размерности для n -мерных гиперповерхностей евклидовых пространств.

Библиография: 3 названия.

DOI: 10.4213/mzm10338

1. Формулировка результатов. Пусть E^{n+1} – $(n+1)$ -мерное, $n \geq 2$, евклидово пространство с декартовыми прямоугольными координатами $(x^1, x^2, \dots, x^{n+1})$.

Рассмотрим в E^{n+1} гиперповерхность F^n , заданную в окрестности каждой своей точки $x \in F^n$ уравнениями

$$x^\alpha = f^\alpha(u^1, \dots, u^n), \quad (u^1, \dots, u^n) \in U, \quad \alpha = 1, \dots, n+1,$$

где U – некоторая область параметрического пространства $(u^1, \dots, u^n)$, $f^\alpha \in C^3(U)$.

Пусть $I = g_{ij} du^i du^j$ и $II = b_{ij} du^i du^j$ – соответственно первая и вторая квадратичные формы гиперповерхности $F^n \subset E^{n+1}$. Будем считать, что гауссова кривизна K гиперповерхности $F^n \subset E^{n+1}$ отлична от нуля. Тогда на F^n можно определить симметрический трижды ковариантный тензор третьей валентности $\Theta_{(n)}$ формулой (см. [1; гл. 6]):

$$\Theta_{(n)ijm} = \nabla_m b_{ij} - \frac{b_{ij} \nabla_m K + b_{jm} \nabla_i K + b_{mi} \nabla_j K}{(n+2)K}, \quad i, j, m = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

где ∇_i – операция ковариантного дифференцирования относительно тензора g_{ij} .

Для поверхностей в евклидовом пространстве E^3 тензор $\Theta_{(2)}$ совпадает с известным тензором Дарбу Θ (см. [2; гл. 15]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Тензор $\Theta_{(n)}$ при $n > 2$ назовем *обобщенным тензором Дарбу* гиперповерхности $F^n \subset E^{n+1}$.

Обозначим через $\mathcal{D}_{(n)}$ множество гиперповерхностей F^n , $n \geq 2$, с ненулевой гауссовой кривизной $K \neq 0$ в евклидовом пространстве E^{n+1} , на которых выполняется тождество

$$\Theta_{(n)ijm} \equiv 0, \quad i, j, m = 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

ЛЕММА 1. Пусть $F^n \subset E^{n+1}$ принадлежит множеству $\mathcal{D}_{(n)}$, $n > 2$. Тогда в каждой точке $x \in F^n$ для главных направлений $\{Y_i\}_1^n$ справедливы уравнения

$$\rho_{mj}g(Y_m, \nabla_{Y_i}Y_j) = 0, \quad i \neq j \neq m \neq i, \quad i, j, m = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как главные направления $\{Y_i\}_1^n$ попарно сопряжены, то в силу (1.2) в каждой точке $x \in F^n$ для главных направлений $\{Y_i\}_1^n$ имеем

$$(\nabla_{Y_i}b)(Y_j, Y_m) = 0, \quad i \neq j \neq m \neq i, \quad i, j, m = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Но для главных направлений $\{Y_i\}_1^n$ выполнены уравнения (см. [3])

$$-(\nabla_{Y_i}b)(Y_j, Y_m) = \rho_{mj}g(Y_m, \nabla_{Y_i}Y_j), \quad i \neq j \neq m \neq i, \quad i, j, m = 1, \dots, n.$$

Отсюда, учитывая (2.2), получим (2.1).

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $F^n \subset E^{n+1}$ принадлежит множеству $\mathcal{D}_{(n)}$, $n > 2$. Тогда в каждой точке $x \in F^n$ для главных направлений $\{Y_i\}_1^n$ справедливы уравнения

$$\rho_{mi}\rho_{mj}g(Y_m, \nabla_{Y_i}Y_j - \nabla_{Y_j}Y_i) = 0, \quad i \neq j \neq m \neq i, \quad i, j, m = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Меняя местами индексы i и j , из (2.1) находим

$$\rho_{mi}g(Y_m, \nabla_{Y_j}Y_i) = 0, \quad i \neq j \neq m \neq i, \quad i, j, m = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Умножая равенство (2.1) на ρ_{mi} , равенство (2.4) на ρ_{mj} и вычитая из первого второе, получим (2.3).

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $F^n \subset E^{n+1}$ принадлежит множеству $\mathcal{D}_{(n)}$. Если в точке $x \in F^n$ главные кривизны $k_1, k_2, \dots, k_n$ все попарно различны, то на F^n в некоторой окрестности $O(x)$ существует координатная сеть линий кривизны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 2$ утверждение леммы очевидно. Пусть $n > 2$. Если в точке x главные кривизны все попарно различны, то в некоторой окрестности $O(x)$

$$\rho_{mi}\rho_{mj} \neq 0, \quad i \neq j \neq m \neq i, \quad i, j, m = 1, \dots, n.$$

Тогда в силу (2.3) в $O(x)$ выполняются равенства

$$g(Y_m, \nabla_{Y_i}Y_j - \nabla_{Y_j}Y_i) = 0, \quad i \neq j \neq m \neq i, \quad i, j, m = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Из (2.5) вытекает, что главные направления $\{Y_i\}_1^n$ голономны в $O(x)$. Значит, в $O(x)$ можно ввести локальные координаты $(u^1, \dots, u^n)$ такие, что

$$\frac{\partial}{\partial u^1} = Y_1, \quad \dots, \quad \frac{\partial}{\partial u^n} = Y_n.$$

Так как главные направления попарно ортогональны и сопряжены, то координаты $(u^1, \dots, u^n)$ являются координатами кривизны в $O(x)$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $F^n \subset E^{n+1}$ принадлежит множеству $\mathcal{D}(n)$, $c = c(x)$ – число различных собственных значений матрицы второй фундаментальной формы b в точке $x \in F^n$. Если $c > 1$, то в некоторой окрестности $O(x)$ можно ввести координаты $(u^1, \dots, u^n)$ такие, что основные квадратичные формы F^n имеют вид

$$ds^2 = \sum_{s=1}^c \sum_{i,j=p_{s-1}+1}^{p_s} g_{ij} du^i du^j, \quad (2.6)$$

$$II = \sum_{s=1}^c \tilde{k}_s \sum_{i,j=p_{s-1}+1}^{p_s} g_{ij} du^i du^j, \quad (2.7)$$

где

$$K = \tilde{k}_1^{t_1} \tilde{k}_2^{t_2} \dots \tilde{k}_c^{t_c}, \quad t_1 + t_2 + \dots + t_c = n, \quad \tilde{k}_s \neq \tilde{k}_r, \quad s \neq r, \\ p_0 = 0, \quad p_1 = t_1, \quad p_2 = t_1 + t_2, \quad \dots, \quad p_c = n, \quad s, r = 1, \dots, c.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 2$ утверждение леммы очевидно. Пусть $n > 2$. Обозначим через $T_x F^n$ касательное пространство к F^n в точке x . Построим в некоторой окрестности $O(x)$ распределения $L_1^{t_1}, \dots, L_c^{t_c}$, где $t_1 + \dots + t_c = n$ такие, что

$$L_1^{t_1}(y) \oplus \dots \oplus L_c^{t_c}(y) = T_y F^n \quad \text{для всех } y \in O(x).$$

Пусть векторные поля $\{Y_i\}_1^n$ имеют главные направления в точке x . Векторное поле Y_m будет принадлежать одномерному распределению $L_m^{t_m}$, $t_m = 1$, если для каждого главного направления Y_s , отличного от Y_m , в точке x выполнено неравенство $k_s \neq k_m$. Тогда в силу (2.3) в некоторой окрестности $O_m(x)$ имеем

$$g(Y_m, \nabla_{Y_i} Y_j - \nabla_{Y_j} Y_i) = 0 \quad \text{для всех } Y_i, Y_j \notin L_m^{t_m}.$$

Следовательно, главное направление Y_m голономно в $O_m(x)$.

Векторные поля Y_i и Y_j будут принадлежать распределению $L_m^{t_m}$ размерности $t_m > 1$, если в точке x выполняется равенство $k_i(x) = k_j(x)$. Следовательно, главное направление $Y_s \notin L_m^{t_m}$, если $k_s(x) \neq k_i(x)$ и $k_s(x) \neq k_j(x)$. Тогда в некоторой окрестности $O_m(x)$ в силу (2.3) выполнено

$$g(Y_s, \nabla_{Y_i} Y_j - \nabla_{Y_j} Y_i) = 0 \quad \text{для всех } Y_i, Y_j \in L_m^{t_m}, \quad Y_s \notin L_m^{t_m}. \quad (2.8)$$

Учитывая, что главные направления попарно ортогональны, из (2.8) получим инволютивность распределения $L_m^{t_m}$, $t_m > 1$, в $O_m(x)$.

Рассмотрим построенные распределения $L_1^{t_1}, \dots, L_c^{t_c}$ в окрестности

$$O(x) = \bigcap_{m=1}^c O_m(x).$$

Не ограничивая общности, можем считать, что распределения $L_m^{t_m}$ порождаются векторными полями

$$Y_{p_{m-1}+1}, \quad \dots, \quad Y_{p_m},$$

где

$$p_0 = 0, \quad p_1 = t_1, \quad p_2 = t_1 + t_2, \quad \dots, \quad p_c = n, \quad m = 1, \dots, c.$$

Распределения $L_m^{t_m}$ попарно ортогональны и сопряжены, т.е.

$$\begin{aligned} g(X, Y) = 0, \quad b(X, Y) = 0 \\ \text{для всех } X \in L_m^{t_m}, \quad Y \in L_s^{t_s}, \quad m \neq s, \quad m, s = 1, \dots, c. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Таким образом, распределения $L_1^{t_1}, \dots, L_c^{t_c}$ образуют ортогональную сопряженную систему в окрестности $O(x)$. Следовательно, в $O(x)$ можно ввести координаты $(u^1, \dots, u^n)$ такие, что векторные поля

$$\frac{\partial}{\partial u^{p_{m-1}+1}}, \quad \dots, \quad \frac{\partial}{\partial u^{p_m}}$$

порождают распределения $L_m^{t_m}$, $m = 1, \dots, c$.

Отсюда, учитывая (2.9), в $O(x)$ получим

$$\begin{aligned} b_{jk} \equiv b\left(\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k}\right) = 0, \quad g_{jk} \equiv g\left(\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k}\right) = 0, \\ \text{для всех } \frac{\partial}{\partial u^j} \in L_s^{t_s}, \quad \frac{\partial}{\partial u^k} \in L_q^{t_q}, \quad s \neq q, \quad s, q = 1, \dots, c. \end{aligned}$$

Кроме того, в $O(x)$

$$k_j \neq k_m \quad \text{для любых } Y_j \in L_s^{t_s} \quad \text{и} \quad Y_m \in L_q^{t_q}, \quad s \neq q, \quad s, q = 1, \dots, c.$$

Так как для любых векторных полей $Y_i, Y_j \in L_m^{t_m}$ главные кривизны совпадают, то в $O(x)$

$$b\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \tilde{k}_m g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \quad \text{для всех } \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \in L_m^{t_m},$$

где $\tilde{k}_m \equiv k_{p_m}$, $m = 1, \dots, c$.

Таким образом, основные квадратичные формы F^n в $O(x)$ имеют вид (2.6), (2.7). Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $F^n \subset E^{n+1}$ принадлежит множеству $\mathcal{D}_{(n)}$, $c = c(x)$ — число различных собственных значений матрицы второй фундаментальной формы b в точке $x \in F^n$. Если $c > 1$, то $c = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 2$ утверждение леммы очевидно. Пусть $n > 2$. Предположим, что в некоторой точке $x \in F^n$ выполнено неравенство $1 < c(x) < n$. Тогда в силу леммы 4 в некоторой окрестности $O(x)$ можно ввести координаты $(u^1, \dots, u^n)$ такие, что основные квадратичные формы F^n имеют вид (2.6), (2.7). Тогда в $O(x)$ мы имеем

$$\begin{aligned} \nabla_i b_{jm} = \nabla_i (\tilde{k}_s g_{jm}) = g_{jm} \partial_i (\tilde{k}_s) + \tilde{k}_s \nabla_i g_{jm} = g_{jm} \partial_i (\tilde{k}_s), \\ i, j, m = p_{s-1} + 1, \dots, p_s, \quad s = 1, \dots, c. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \nabla_j b_{ii} = g_{ii} \partial_j (\tilde{k}_s), \quad \nabla_i b_{ji} = g_{ji} \partial_i (\tilde{k}_s), \quad \nabla_j b_{ij} = g_{ij} \partial_j (\tilde{k}_s), \quad \nabla_i b_{jj} = g_{jj} \partial_i (\tilde{k}_s), \\ i \neq j, \quad i, j = p_{s-1} + 1, \dots, p_s, \quad s = 1, \dots, c. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнения Петерсона–Кодацци

$$\nabla_i b_{jm} = \nabla_m b_{ij}, \quad i, j, m = 1, \dots, n. \quad (2.11)$$

Учитывая (2.11), имеем

$$\begin{aligned} g_{ii} \partial_j (\tilde{k}_s) - g_{ji} \partial_i (\tilde{k}_s) &= 0, & g_{ij} \partial_j (\tilde{k}_s) - g_{jj} \partial_i (\tilde{k}_s) &= 0, \\ i &\neq j, & i, j &= p_{s-1} + 1, \dots, p_s, \quad s = 1, \dots, c. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Так как $g_{ii} g_{jj} - g_{ij}^2 \neq 0$, то из (2.12) получим, что

$$\partial_i (\tilde{k}_s) = 0, \quad i = p_{s-1} + 1, \dots, p_s, \quad s = 1, \dots, c.$$

Тогда в силу (2.10) находим

$$\nabla_i b_{jm} = 0, \quad i, j, m = p_{s-1} + 1, \dots, p_s, \quad s = 1, \dots, c. \quad (2.13)$$

По формулам (1.1) имеем

$$\Theta_{(n)iii} = \nabla_i b_{ii} - \frac{3b_{ii} \partial_i K}{(n+2)K}.$$

С учетом (2.13) находим, что равенство $\Theta_{(n)iii} = 0$, $i = 1, \dots, n$, равносильно $\partial_i K = 0$, $i = 1, \dots, n$. Значит, в $O(x)$ гауссова кривизна $K \equiv \text{const}$. Тогда в $O(x)$ (1.2) равносильно условию

$$\nabla_m b_{ij} = 0, \quad i, j, m = 1, \dots, n.$$

Отсюда в силу (2.11) следует, что

$$\tilde{k}_s \equiv \text{const}, \quad s = 1, \dots, c. \quad (2.14)$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} \nabla_m b_{ij} &= g_{ij} \partial_m (\tilde{k}_s), & \nabla_i b_{mj} &= \frac{\tilde{k}_q - \tilde{k}_s}{2} \partial_m g_{ij}, \\ i, j &= p_{s-1} + 1, \dots, p_s, & m &= p_{q-1} + 1, \dots, p_q, \quad s \neq q, \quad s, q = 1, \dots, c. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (2.14) в силу (2.11) получим

$$g_{ij} = g_{ij}(u^{p_{s-1}+1}, \dots, u^{p_s}), \quad i, j = p_{s-1} + 1, \dots, p_s, \quad s = 1, \dots, c. \quad (2.15)$$

Вычислим компоненты тензора кривизны Римана $R_{ij,ji}$. Мы имеем

$$R_{ij,ji} = g_{ki} (\partial_i \Gamma_{jj}^k - \partial_j \Gamma_{ij}^k) + \Gamma_{ik,i} \Gamma_{jj}^k - \Gamma_{jk,i} \Gamma_{ji}^k.$$

Учитывая (2.15), находим

$$\begin{aligned} \partial_i \Gamma_{jj}^k &= 0, & \partial_j \Gamma_{ij}^k &= 0, & \Gamma_{ik,i} \Gamma_{jj}^k &= 0, & \Gamma_{jk,i} \Gamma_{ji}^k &= 0, \\ i &= p_{s-1} + 1, \dots, p_s, & j &= p_{r-1} + 1, \dots, p_r, & s &\neq r, & s, r &= 1, \dots, c. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$R_{ij,ji} = 0, \quad i = p_{s-1} + 1, \dots, p_s, \quad j = p_{r-1} + 1, \dots, p_r, \quad s \neq r, \quad s, r = 1, \dots, c. \quad (2.16)$$

Рассмотрим уравнение Гаусса

$$R_{ij,kl} = b_{il} b_{jk} - b_{ik} b_{jl}.$$

В частности, $R_{ij,ji} = b_{ii} b_{jj} - b_{ij}^2$. Тогда в силу (2.16) имеем

$$b_{ii} b_{jj} - b_{ij}^2 = 0, \quad i = p_{s-1} + 1, \dots, p_s, \quad j = p_{r-1} + 1, \dots, p_r, \quad s \neq r, \quad s, r = 1, \dots, c.$$

Отсюда с учетом (2.7) находим, что

$$\tilde{k}_s \tilde{k}_r = 0, \quad s \neq r, \quad s, r = 1, \dots, c.$$

Значит, гауссова кривизна $K = k_1 \cdots k_n = 0$.

С другой стороны, по условию леммы F^n принадлежит множеству $\mathcal{D}_{(n)}$ и, следовательно, $K \neq 0$.

Полученное противоречие показывает, что неравенство $1 < c < n$ невозможно. Лемма доказана.

3. Доказательства теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Необходимость. Если $F^n \in \mathcal{D}_{(n)}$, то каждая точка $x \in F^n$ имеет некоторую окрестность $O(x) \subset F^n$, в которой главные кривизны все совпадают или согласно лемме 5 принадлежит замыканию некоторой области $V \subset F^n$, в которой главные кривизны $k_1, k_2, \dots, k_n$ все попарно различны.

Случай 1. Если в некоторой окрестности $O(x) \subset F^n$

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n \equiv k,$$

то из (2.11) находим, что $k \equiv \text{const} \neq 0$ в $O(x)$. Следовательно, $O(x)$ лежит на некоторой гиперсфере $S^n \subset E^{n+1}$. Тогда в некоторой области $V \subset O(x)$, $x \in V$, существует координатная сеть линий кривизны $(u^1, \dots, u^n)$ такая, что для главных кривизн

$$k_i = k \equiv \text{const}, \quad i = 1, \dots, n,$$

имеют место уравнения (1.3), где функции

$$\psi_{(i)}(u^i) \equiv \text{const} = \frac{1}{k^2} > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Случай 2. Пусть V – область на F^n , $x \in \bar{V}$, такая, что в каждой точке $y \in V$

$$k_i(y) \neq k_j(y), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Тогда в силу леммы 3 в области V существует координатная сеть линий кривизны $(u^1, \dots, u^n)$. Основные квадратичные формы гиперповерхности F^n в координатах кривизны $(u^1, \dots, u^n)$ имеют вид

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n g_{ii}(du^i)^2, \quad II = \sum_{i=1}^n b_{ii}(du^i)^2, \quad (3.1)$$

где $b_{ii} = k_i g_{ii}$.

Найдем компоненты $\Theta_{(n)}$, $n \geq 2$, в координатах кривизны $(u^1, \dots, u^n)$. Учитывая (3.1), по формулам (1.1) вычисляем

$$\Theta_{(n)iii} = g_{ii} \partial_i k_i - \frac{3b_{ii} \partial_i K}{(n+2)K}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

$$\Theta_{(n)jii} = g_{ii} \partial_j k_i - \frac{b_{ii} \partial_j K}{(n+2)K}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

Кроме того, в случае $n > 2$ имеем

$$\Theta_{(n)ijm} \equiv 0, \quad i \neq j \neq m \neq i, \quad i, j, m = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

В силу (3.2)–(3.4) условие (1.2) в области V в координатах кривизны $(u^1, \dots, u^n)$ равносильно следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}\partial_i \ln |k_i|^{n+2} &= \partial_i \ln |K|^3, & i = 1, \dots, n, \\ \partial_j \ln |k_i|^{n+2} &= \partial_j \ln |K|, & i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Из (3.5) находим

$$K = \psi_{(i)}(u^i)k_i^{n+2}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.6)$$

где $\psi_{(i)}(u^i) \neq 0$ – некоторые функции. Из (3.6), замечая, что $K = k_1 k_2 \dots k_n$, получаем систему уравнений (1.3)

Достаточность. Пусть V – область на F^n , $x \in \bar{V}$, такая, что в V существует координатная сеть линий кривизны $(u^1, \dots, u^n)$, и для главных кривизн $k_1, k_2, \dots, k_n$ выполняются уравнения (1.3). Покажем, что из (1.3) следует (1.2). Перемножив соответственно левые и правые части системы уравнений (1.3), получим уравнение

$$K^{n-1} = \psi_{(1)}(u^1)\psi_{(2)}(u^2) \cdots \psi_{(n)}(u^n)K^{n+1}.$$

Отсюда находим

$$K^3 = \frac{K}{\psi_{(1)}(u^1)\psi_{(2)}(u^2)\cdots\psi_{(n)}(u^n)}. \quad (3.7)$$

Заметим, что в силу соотношения $K = k_1 k_2 \cdots k_n \neq 0$ система уравнений (1.3) равносильна (3.6). Теперь для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ последовательно подставим выражения для гауссовой кривизны K из (3.6) в числитель правой части уравнения (3.7). Тогда получим систему уравнений

$$\begin{aligned} K^3 &= \frac{k_1^{n+2}}{\psi_{(2)}(u^2)\psi_{(3)}(u^3)\cdots\psi_{(n)}(u^n)}, \\ K^3 &= \frac{k_2^{n+2}}{\psi_{(1)}(u^1)\psi_{(3)}(u^3)\cdots\psi_{(n)}(u^n)}, \\ &\dots\dots\dots \\ K^3 &= \frac{k_n^{n+2}}{\psi_{(1)}(u^1)\psi_{(2)}(u^2)\cdots\psi_{(n-1)}(u^{n-1})}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Дифференцируя обе части системы уравнений (3.8), находим

[illegible]

Подставляя в (3.9) выражения $k_i = b_{ii}/g_{ii}$, $i = 1, 2, \dots, n$, и используя (3.8), получим систему уравнений

$$g_{ii}\partial_i k_i - \frac{3b_{ii}\partial_i K}{(n+2)K} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.10)$$

Теперь рассмотрим (3.6). Дифференцируя обе части системы уравнений (3.6), получим

$$\partial_j K = \psi_{(i)}(u^i)(n+2)k_i^{n+1}\partial_j k_i, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.11)$$

Используя (3.6), систему уравнений (3.11) можно записать в виде

$$\partial_j K = \frac{(n+2)K}{k_i} \partial_j k_i, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.12)$$

Подставив выражения $k_i = b_{ii}/g_{ii}$ в (3.12), находим

$$g_{ii}\partial_j k_i - \frac{b_{ii}\partial_j K}{(n+2)K} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Учитывая (3.2) и (3.3), из (3.10) и (3.13) соответственно получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \Theta_{(n)iii} &= 0, & i &= 1, \dots, n, \\ \Theta_{(n)jii} &= 0, & i &\neq j, \quad i, j = 1, \dots, n; \end{aligned}$$

при этом для $n > 2$ в области V в координатах кривизны $(u^1, \dots, u^n)$ выполнены уравнения (3.4). Следовательно, в области V выполняется условие (1.2).

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из доказательства теоремы 1 следует, что если $F^n \subset E^{n+1}$ с ненулевой гауссовой кривизной $K \neq 0$ принадлежит множеству $\mathcal{D}_{(n)}$, то F^n является объединением замыканий своих областей, в каждой из которых существует координатная сеть линий кривизны $(u^1, \dots, u^n)$ такая, что для гауссовой кривизны $K = K(u^1, \dots, u^n) \neq 0$ выполнено уравнение (3.7), где $\psi_{(i)}(u^i) \neq 0$ – некоторые функции, $i = 1, \dots, n$. Из (3.7) получим

$$K^2 = \frac{1}{\psi_{(1)}(u^1)\psi_{(2)}(u^2)\cdots\psi_{(n)}(u^n)}. \quad (3.14)$$

Уравнение (1.5) непосредственно следует из (3.14).

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. И. Бодренко, *Обобщенные поверхности Дарбу в пространствах постоянной кривизны*, LAP Lambert Acad. Publ., Saarbrücken, Germany, 2013.
- [2] В. Ф. Каган, *Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 2. Поверхности в пространстве. Образования и изгибания поверхностей. Специальные вопросы*, Гостехиздат, М.-Л., 1948.
- [3] Ю. А. Аминов, “Условие голономности главных направлений подмногообразия”, *Матем. заметки*, **41:4** (1987), 543–548.

И. И. Бодренко

Волгоградский государственный университет

E-mail: irina@bodrenko.org

Поступило

09.07.2013

Исправленный вариант

30.11.2013