Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. В. Руновский, Прямая теорема теории приближений
для общего модуля гладкости, *Матем. заметки*, 2014,
том 95, выпуск 6, 899–910

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10339>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 12:30:20

Прямая теорема теории приближений для общего модуля гладкости

К. В. Руновский

Введено понятие общего модуля гладкости в пространствах L_p , состоящих из 2π -периодических интегрируемых в p -степени функций, в котором коэффициенты при значениях данной функции в узлах равномерной решетки суть коэффициенты Фурье некоторой 2π -периодической функции, названной генератором модуля. Отмечено, что все известные модули гладкости являются частными случаями этой общей конструкции.

Для введенного модуля в случае $1 \leq p \leq +\infty$ доказана прямая теорема теории приближений (оценка типа Джексона). Отмечено, что известные оценки типа Джексона для классических модулей, модуля положительного дробного порядка и модуля гладкости, связанного с производной Рисса, являются ее прямыми следствиями. Получено также универсальное структурное описание классов функций, наилучшие приближения которых имеют определенный порядок стремления к нулю.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10339

В 1911 г. американский математик Д. Джексон доказал, что наилучшее приближение $E_n(f)$, $n = 0, 1, \dots$, тригонометрическими полиномами в равномерной метрике 2π -периодической непрерывной функции f и ее модуль непрерывности $\omega(f, \delta)$, $\delta \geq 0$, связаны соотношением

$$E_n(f) \leq c\omega(f, (n+1)^{-1}), \quad (1)$$

где положительная постоянная c не зависит от f и n . В дальнейшем неравенство (1) было распространено на случай модулей гладкости высших порядков, а также пространств L_p , $0 < p < +\infty$, состоящих из измеримых по Лебегу и интегрируемых в p -й степени 2π -периодических функций. Доказательства этих классических результатов, получивших название прямых теорем теории приближений или оценок типа Джексона, а также история вопроса и соответствующие ссылки, могут быть найдены, например, в [1].

В данной работе будет показано, что для $1 \leq p \leq +\infty$ (в случае $p = +\infty$, как обычно, рассматривается пространство C непрерывных 2π -периодических функций, снабженных нормой Чебышева) неравенство (1) остается справедливым также и в общем случае, когда классический модуль гладкости заменяется модулем, произведенным некоторой произвольной 2π -периодической функцией (генератор модуля).

Перейдем к точным формулировкам. Скажем, что 2π -периодическая комплекснозначная непрерывная функция θ принадлежит классу $\mathbb{G}$, если $\theta(-\xi) = \overline{\theta(\xi)}$ для всех вещественных ξ , ее ряд Фурье сходится абсолютно, т.е. последовательность коэффициентов Фурье $\theta^\wedge = (\theta^\wedge(\nu))_{\nu=-\infty}^{+\infty}$ принадлежит пространству ℓ_1 , и при этом $\theta(0) = 0$. Класс функций из $\mathbb{G}$, удовлетворяющих условию $\theta^\wedge(0) = -1$, будем обозначать символом $\mathcal{G}$. Пусть θ принадлежит $\mathcal{G}$. Для f из L_p , $1 \leq p \leq +\infty$, величину

$$\omega_\theta(f, \delta)_p = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left\| \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \theta^\wedge(\nu) f(x + \nu h) \right\|_p, \quad \delta \geq 0, \quad (2)$$

будем называть θ -модулем функции f в пространстве L_p или модулем, произведенным генератором θ . Так как

$$\omega_\theta(f, \delta)_p \leq \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |\theta^\wedge(\nu)| \|f(x + \nu h)\|_p \leq \|\theta^\wedge\|_{\ell_1} \|f\|_p < +\infty, \quad (3)$$

то θ -модуль корректно определен во всех пространствах L_p для $1 \leq p \leq +\infty$.

Следует отметить, что практически все известные модули гладкости суть частные случаи общей конструкции (2). Так, например, классическому модулю гладкости $\omega_k(f, \delta)_p$, k – натуральное число, соответствует $\theta(\xi) = -(1 - e^{i\xi})^k$. Изученный в работах Потапова, Симонова и С. Ю. Тихонова модуль $\omega_\alpha(f, \delta)_p$, идея конструкции которого основана на замене натурального параметра k положительным вещественным числом α (см., например, [2]), порождается функцией

$$\theta(\xi) = -(1 - e^{i\xi})^\alpha,$$

где $z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}$, $-\pi < \arg z \leq \pi$. Введенный в [3] Руновским и Шмайссером в целях описания качества приближения средними Фейера модуль $\omega_{(\cdot)}(f, \delta)_p$ соответствует функции $\theta(\xi) = -(2/\pi)|\xi|$, $\xi \in [-\pi, \pi]$.

В дальнейшем символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ будут обозначаться соответственно множества натуральных, целых неотрицательных, целых и вещественных чисел. Как обычно, наилучшим приближением функции f из L_p порядка не выше $n \in \mathbb{N}_0$ называется величина

$$E_n(f)_p = \inf_{T \in \mathcal{T}_n} \|f - T\|_p,$$

где

$$\mathcal{T}_n = \left\{ T(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, c_{-k} = \bar{c}_k \right\}$$

– множество всех вещественнозначных тригонометрических полиномов порядка не выше n . Совокупность всех тригонометрических полиномов будет обозначаться символом $\mathcal{T}$. Символ $\hat{g}$ используется в работе для обозначения преобразования Фурье функции g из пространства $L_1(\mathbb{R})$. Норма линейного оператора A в пространстве L_p будет обозначаться символом $\|A\|_{(p)}$.

Для формулировки основного результата введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(\xi) = - \int_0^\xi \theta(t) dt, \quad \theta \in \mathcal{G}. \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 \leq p \leq +\infty$. Пусть также абсолютно непрерывная функция θ принадлежит классу $\mathcal{G}$ и $\Phi(\xi) \neq 0$ при $|\xi| \geq \lambda$ для некоторого $\lambda > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$E_n(f)_p \leq c \omega_\theta(f, \lambda(n+1)^{-1})_p, \quad f \in L_p, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (5)$$

в котором положительная постоянная $c \equiv c(p, \theta, \lambda)$ не зависит от f и n .

Используя разработанный в [4] и [5] метод сравнения генераторов в комбинации с теоремой Джексона для классических модулей гладкости $\omega_k(f, \delta)_p$, $k \in \mathbb{N}$, несложно доказать оценку (5) для генераторов θ , которые удовлетворяют следующему условию: существуют число $k \in \mathbb{N}$ и бесконечно дифференцируемая функция η , имеющая компактный носитель и равная 1 на интервале $[-\rho, \rho]$ для некоторого $\rho > 0$ такие, что преобразование Фурье функции $(|\xi|^k \eta(\xi))/\theta(\xi)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$. Отметим, что оценки типа Джексона для упомянутых выше модулей могут быть немедленно получены из этого результата в качестве простых следствий. Сформулированное условие фактически означает, что генератор модуля стремится к нулю при стремящемся к нулю аргументе не быстрее некоторой степенной функции. В данной работе устанавливается, таким образом, гораздо более сильный результат, состоящий в том, что оценка типа Джексона остается справедливой при любой скорости убывания генератора к нулю.

Доказательство теоремы 1 основано на ряде вспомогательных утверждений.

Пусть ψ – непрерывная на $\mathbb{R}$ функция такая, что $\psi(-\xi) = \overline{\psi(\xi)}$ для $\xi \in \mathbb{R}$. Введем в рассмотрение совокупность порожденных ψ операторов мультипликаторного типа $A_\sigma(\psi)$, $0 < \sigma \leq +\infty$, действующих по закону

$$A_\sigma(\psi): g(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g^\wedge(k) e^{ikx} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{k}{\sigma}\right) g^\wedge(k) e^{ikx}, \quad 0 < \sigma < +\infty, \quad (6)$$

при этом $A_\infty(\psi) = \psi(0)I$, где I – тождественный оператор. Формула (6) корректно определяет операторы $A_\sigma(\psi)$, $\sigma > 0$, по крайней мере, в пространстве $\mathcal{T}$ вещественнозначных тригонометрических полиномов.

ЛЕММА 1. Пусть $1 \leq p \leq +\infty$, $\theta \in \mathbb{G}$. Тогда оператор θ -разности с шагом $h \geq 0$, определяемый формулой

$$\Delta_h^{(\theta)} f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \theta^\wedge(\nu) f(x + \nu h), \quad (7)$$

ограничен в L_p с оценкой

$$\|\Delta_h^{(\theta)}\|_{(p)} \leq \|\theta^\wedge\|_{l_1}, \quad h \geq 0, \quad (8)$$

для его нормы. При этом для каждой f из L_1 выполнено

$$(\Delta_h^{(\theta)} f)^\wedge(k) = \theta(kh) f^\wedge(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

и, в частности,

$$\Delta_h^{(\theta)} = A_{h^{-1}}(\theta) \quad (10)$$

в пространстве тригонометрических полиномов $\mathcal{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (8) следует непосредственно из (7) (см. также (3)). Учитывая абсолютную сходимость ряда Фурье функции θ , имеем для $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} (\Delta_h^{(\theta)} f)^\wedge(k) &= (2\pi)^{-1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \theta^\wedge(\nu) \int_0^{2\pi} f(x + \nu h) e^{-ikx} dx \\ &= f^\wedge(k) \left(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \theta^\wedge(\nu) e^{i\nu kh} \right) = f^\wedge(k) \theta(kh) \end{aligned}$$

на основании (7), что влечет (9). Соотношение (10) непосредственно вытекает из (9) с учетом (6).

Символом $\mathcal{M}$ будем обозначать класс непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, удовлетворяющих условию $\psi(-\xi) = \overline{\psi(\xi)}$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$ и таких, что

$$|\psi(\xi)| \leq c_1(1 + |\xi|)^{-1-\varepsilon}, \quad |\widehat{\psi}(x)| \leq c_2(1 + |x|)^{-1-\varepsilon}, \quad \xi, x \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

для некоторого $\varepsilon > 0$, где положительные постоянные c_1 и c_2 не зависят от ξ и x соответственно. Хорошо известно (см., например, [6; гл. VII, п. 2]), что для функций ψ из $\mathcal{M}$ справедлива формула суммирования Пуассона

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi(k) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \widehat{\psi}(2\pi\nu). \quad (12)$$

ЛЕММА 2. Пусть $\psi \in \mathcal{M}$. Тогда для $f \in L_1$ и $\sigma > 0$ справедлива формула

$$A_\sigma(\psi)(f; x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + \sigma^{-1}h) \overline{\widehat{\psi}(h)} dh, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

Операторы $A_\sigma(\psi)$ ограничены в L_p , $1 \leq p \leq +\infty$, в совокупности. При этом

$$\sup_{\sigma > 0} \|A_\sigma(\psi)\|_{(p)} \leq (2\pi)^{-1} \|\widehat{\psi}\|_{L_1(\mathbb{R})}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что в силу (11) ряд Фурье функции $A_\sigma(\psi)(f; x)$, где $f \in L_1$, сходится абсолютно и равномерно, и применяя формулу (12) к функции $\overline{\widehat{\psi}(\sigma^{-1}\xi)} e^{ih\xi}$, имеем на основании (6) для $f \in L_1$ и $\sigma > 0$

$$\begin{aligned} A_\sigma(\psi)(f; x) &= (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(h) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{k}{\sigma}\right) e^{ik(x-h)} dh \\ &= (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(x+h) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{\psi\left(\frac{k}{\sigma}\right)} e^{ikh} dh \\ &= (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(x+h) \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \overline{\widehat{\psi}(\sigma^{-1} \cdot)(h + 2\pi\nu)} dh \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+h) \overline{\widehat{\psi}(\sigma^{-1} \cdot)(h)} dh \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+h) \widehat{\psi(\sigma h)} dh \\
&= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\sigma^{-1}h) \widehat{\psi(h)} dh.
\end{aligned}$$

Формула (13) доказана. Применяя (13), получаем для $f \in L_p$ и $\sigma > 0$

$$\|A_\sigma(\psi)(f)\|_p \leq (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \|f(x+\sigma^{-1}h)\|_p |\widehat{\psi(h)}| dh = (2\pi)^{-1} \|f\|_p \|\widehat{\psi}\|_{L_1(\mathbb{R})},$$

что немедленно влечет (14).

Важный частный случай мультипликаторов ψ – это функции с компактным носителем. Пусть φ – непрерывная функция, равная нулю вне интервала $[-1, 1]$ и удовлетворяющая условиям $\varphi(0) = 1$, а также $\varphi(-\xi) = \overline{\varphi(\xi)}$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$. В этом случае операторы $A_\sigma(\varphi)$ являются полиномиальными и часто называются *средними Фурье*. Как известно, приближение средними Фурье, порожденными четным вещественнозначным генератором φ , – это один из классических методов тригонометрической аппроксимации, которому посвящена обширная литература (см., например, [1], [7], [8]). В дальнейшем будем говорить, что функция φ принадлежит *классу $\mathcal{K}$* , если наряду с перечисленными выше условиями она является вещественнозначной четной бесконечно дифференцируемой и $\varphi(\xi) = 1$ для $|\xi| \leq \rho$ при некотором $0 < \rho < 1$. Ясно, что $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$.

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется оператор

$$A_\sigma \left(\frac{1 - \varphi(\cdot)}{i(\cdot)} \right), \quad \text{где } \varphi \in \mathcal{K}.$$

Так как функция $\psi(\xi) = (1 - \varphi(\xi))(i\xi)^{-1}$ не удовлетворяет условию (11), то лемма 2 в этом случае оказывается неприменимой. Для изучения свойств A_σ введем в рассмотрение оператор

$$J: f \rightarrow \int_0^x (f(t) - f^\wedge(0)) dt. \quad (15)$$

Для каждой $f \in L_1$ функция Jf является 2π -периодической и абсолютно непрерывной. Таким образом, J – линейный оператор, корректно определенный в пространстве L_1 . Непосредственным вычислением убеждаемся в том, что

$$(Jf)^\wedge(k) = \frac{f^\wedge(k)}{ik}, \quad k \neq 0. \quad (16)$$

ЛЕММА 3. Пусть $1 \leq p \leq +\infty$ и $\varphi \in \mathcal{K}$. Тогда

$$\sup_{\sigma > 0} \left\| A_\sigma \left(\frac{1 - \varphi(\cdot)}{i(\cdot)} \right) \right\|_{(p)} \leq \pi^{-1} \|\widehat{\varphi'}\|_{L_1(\mathbb{R})}. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что $\varphi(0) = 1$, на основании (6), (16) получаем

$$A_\sigma \left(\frac{1 - \varphi(\cdot)}{i(\cdot)} \right) = \sigma(I - A_\sigma(\varphi)) \circ J, \quad \sigma > 0. \quad (18)$$

Пусть $f \in L_p$, $\sigma > 0$. Принимая во внимание, что

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(h) dh = (\widehat{\varphi})^\vee(0) = \varphi(0) = 1,$$

где символом $(\cdot)^\vee$ обозначено обратное преобразование Фурье, и применяя формулу (13) к функции Jf , будем иметь

$$\begin{aligned} (A_\sigma(\varphi) - I)(Jf; x) &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (Jf(x + \sigma^{-1}h) - Jf(x)) \widehat{\varphi}(h) dh \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{\sigma^{-1}h} (f(x+t) - f^\wedge(0)) dt \right) \widehat{\varphi}(h) dh. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|(I - A_\sigma(\varphi))Jf\|_p &\leq (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \int_0^{\sigma^{-1}h} (f(x+t) - f^\wedge(0)) dt \right\|_p |\widehat{\varphi}(h)| dh \\ &\leq (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \int_0^{\sigma^{-1}h} \|f(x+t) - f^\wedge(0)\|_p dt \right\| |\widehat{\varphi}(h)| dh \\ &\leq (2\pi\sigma)^{-1} \|f - f^\wedge(0)\|_p \int_{-\infty}^{+\infty} |h| |\widehat{\varphi}(h)| dh \\ &= (2\pi\sigma)^{-1} \|\widehat{\varphi}'\|_{L_1(\mathbb{R})} \|f - f^\wedge(0)\|_p. \end{aligned} \quad (19)$$

Принимая во внимание, что

$$\|f - f^\wedge(0)\|_p \leq \|f\|_p + (2\pi)^{1/p} |f^\wedge(0)| \leq 2\|f\|_p$$

в силу неравенства Гёльдера, на основании (18), (19) получаем

$$\left\| A_\sigma \left(\frac{1 - \varphi(\cdot)}{i(\cdot)} \right) f \right\|_p \leq 2\sigma(2\pi\sigma)^{-1} \|\widehat{\varphi}'\|_{L_1(\mathbb{R})} \|f\|_p = \pi^{-1} \|\widehat{\varphi}'\|_{L_1(\mathbb{R})} \|f\|_p,$$

что немедленно влечет оценку (17) для норм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Наряду с функцией $\Phi(\xi)$, определенной формулой (4), рассмотрим функцию

$$\tau(\xi) = i(\xi - \Phi(\xi)) = i \left(\xi + \int_0^\xi \theta(t) dt \right). \quad (20)$$

В силу $\theta^\wedge(0) = -1$ функция τ является 2π -периодической. Прямым вычислением несложно убедиться в том, что

$$\tau^\wedge(k) = \frac{\theta^\wedge(k)}{2\pi k}, \quad k \neq 0,$$

в частности, $\tau^\wedge \in l_1$. Учитывая, что $\tau(0) = 0$ и $\tau(-\xi) = \overline{\tau(\xi)}$ для всех вещественных x , получаем, таким образом, что τ принадлежит классу $\mathbb{G}$. На основании (20) имеем

$$|\Phi(\xi)| \geq |\xi| - |\tau(\xi)| \geq |\xi| - \|\tau\|_C, \quad (21)$$

что влечет

$$|\Phi(\xi)| \geq \frac{|\xi|}{2}, \quad |\xi| \geq 2\|\tau\|_C. \quad (22)$$

Так как $\Phi(\xi) \neq 0$ для $|\xi| \geq \lambda$, то существует $0 < r < \lambda$ такое, что $\Phi(\xi) \neq 0$ также и для $|\xi| > r$. Учитывая (20), нетрудно убедиться в том, что

$$\frac{\lambda\xi}{\Phi(\lambda\xi)} = 1 + \frac{\tau(\lambda\xi)}{i\lambda\xi} - \frac{\tau^2(\lambda\xi)}{\lambda\xi\Phi(\lambda\xi)}, \quad |\xi| > \frac{r}{\lambda}. \quad (23)$$

Пусть φ – некоторая функция из класса $\mathcal{K}$ такая, что

$$\varphi(\xi) = 1 \quad \text{для} \quad |\xi| \leq \rho,$$

причем число ρ выбрано из условия $r/\lambda < \rho < 1$. Тогда, доопределяя функции $(1 - \varphi(\xi))/\xi$ и $(1 - \varphi(\xi))/\Phi(\lambda\xi)$ на интервале $[-r/\lambda, r/\lambda]$ нулем, имеем на основании (23)

$$\frac{\lambda\xi(1 - \varphi(\xi))}{\Phi(\lambda\xi)} = 1 - \varphi(\xi) + \frac{\tau(\lambda\xi)(1 - \varphi(\xi))}{i\lambda\xi} - \frac{\tau^2(\lambda\xi)(1 - \varphi(\xi))}{\lambda\xi\Phi(\lambda\xi)}$$

уже для всех вещественных ξ . Следовательно,

$$\begin{aligned} A_\sigma \left(\frac{(1 - \varphi(\cdot))(\lambda \cdot)}{\Phi(\lambda \cdot)} \right) &= I - A_\sigma(\varphi(\cdot)) + A_\sigma \left(\frac{\tau(\lambda \cdot)(1 - \varphi(\cdot))}{i(\lambda \cdot)} \right) \\ &\quad - A_\sigma \left(\frac{\tau^2(\lambda \cdot)(1 - \varphi(\cdot))}{(\lambda \cdot)\Phi(\lambda \cdot)} \right), \quad \sigma > 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Пусть $\sigma > 0$. В силу леммы 2

$$\|A_\sigma(\varphi)\|_{(p)} \leq (2\pi)^{-1} \|\widehat{\varphi}\|_{L_1(\mathbb{R})}. \quad (25)$$

Учитывая, что $A_\sigma(\tau(\lambda \cdot)) = A_{\lambda^{-1}\sigma}(\tau)$ в силу (6), и применяя лемму 1 (см. (8), (10)) для функции τ в комбинации с леммой 3, получаем

$$\begin{aligned} \left\| A_\sigma \left(\frac{\tau(\lambda \cdot)(1 - \varphi(\cdot))}{i(\lambda \cdot)} \right) \right\|_{(p)} &\leq \|A_\sigma(\tau(\lambda \cdot))\|_{(p)} \left\| A_\sigma \left(\frac{(1 - \varphi(\cdot))}{i(\lambda \cdot)} \right) \right\|_{(p)} \\ &\leq (\pi\lambda)^{-1} \|\tau^\wedge\|_{l_1} \|\widehat{\varphi'}\|_{L_1(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (26)$$

Для оценки нормы последнего слагаемого в правой части (24) заметим, что функция $\psi(\xi) = (1 - \varphi(\xi))/(\lambda\xi\Phi(\lambda\xi))$ принадлежит классу $\mathcal{M}$. В самом деле, выполнение первого условия в (11) с $\varepsilon = 1$ обеспечивается оценкой (22). Прямым вычислением с учетом (4) и (22) убеждаемся в том, что

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \psi'(\xi) = 0, \quad |\psi''(\xi)| \leq \frac{c(1 + |\theta'(\xi)|)}{(1 + |\xi|)^{-3}} \quad (27)$$

для почти всех ξ , где положительная постоянная c не зависит от ξ . В силу (27) с учетом элементарных свойств преобразования Фурье имеем для $x \neq 0$

$$\begin{aligned} |\widehat{\psi}(x)| &= |x|^{-2} |\widehat{\psi''}(x)| \leq |x|^{-2} \|\psi''\|_{L_1(\mathbb{R})} \leq c_1 |x|^{-2} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \frac{|\theta'(\xi)|}{|\xi|^3} d\xi \right) \\ &\leq c_2 |x|^{-2} \left(1 + \|\theta'\|_1 \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-3} \right) \leq c_3 |x|^{-2}, \end{aligned}$$

где положительные постоянные c_1 , c_2 и c_3 не зависят от x , что немедленно влечет выполнение второго условия в (11) с $\varepsilon = 1$. Применяя теперь лемму 1 к функции τ (см. также (26)) и лемму 2 к функции ψ получаем

$$\left\| A_\sigma \left(\frac{\tau^2(\lambda \cdot)(1 - \varphi(\cdot))}{(\lambda \cdot)\Phi(\lambda \cdot)} \right) \right\|_{(p)} \leq \|A_\sigma(\tau(\lambda \cdot))\|_{(p)}^2 \|A_\sigma(\psi)\|_{(p)} \leq (2\pi)^{-1} \|\tau^\wedge\|_{l_1}^2 \|\widehat{\psi}\|_{L_1(\mathbb{R})}. \quad (28)$$

На основании (24)–(26) и (28) будем иметь

$$\sup_{\sigma > 0} \left\| A_\sigma \left(\frac{(1 - \varphi(\cdot))(\lambda \cdot)}{\Phi(\lambda \cdot)} \right) \right\|_{(p)} < +\infty,$$

что влечет

$$\left\| A_\sigma \left(\frac{(1 - \varphi(\cdot))(\lambda \cdot)}{\Phi(\lambda \cdot)} \right) (g; x) \right\|_p \leq c \|g\|_p, \quad g \in L_p, \quad \sigma > 0, \quad (29)$$

где положительная постоянная c не зависит от g и σ .

Для $f \in L_p$ и $h \neq 0$ введем в рассмотрение функцию

$$G_h(x) = -h^{-1} \int_0^h \Delta_t^{(\theta)} f(x) dt. \quad (30)$$

На основании (4), леммы 1 (формула (9)) и (30) получаем

$$G_h^\wedge(0) = \theta(0) = 0, \quad G_h^\wedge(k) = \frac{\Phi(kh)}{kh} f^\wedge(k), \quad k \neq 0.$$

Следовательно, с учетом (6)

$$G_h(x) = A_{h^{-1}} \left(\frac{\Phi(\cdot)}{(\cdot)} \right) (f; x) = A_{\lambda h^{-1}} \left(\frac{\Phi(\lambda \cdot)}{(\lambda \cdot)} \right) (f; x). \quad (31)$$

Вспоминая, что $1 - \varphi(\xi) = 0$ для $|\xi| \leq \rho$ и функция $(1 - \varphi(\xi))/\Phi(\lambda\xi)$ доопределена нулем на интервале $[-r/\lambda, r/\lambda]$, где $\rho > r/\lambda$, имеем

$$\frac{\lambda\xi(1 - \varphi(\xi))}{\Phi(\lambda\xi)} \frac{\Phi(\lambda\xi)}{\lambda\xi} = 1 - \varphi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (32)$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Применяя неравенство (29) к функции G_h для $h = \lambda/n$ при $\sigma = \lambda h^{-1} = n$, получаем на основании (30)–(32)

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_p &\leq \|A_n(1 - \varphi(\cdot))(f)\|_p = \left\| A_n \left(\frac{(1 - \varphi(\cdot))(\lambda \cdot)}{\Phi(\lambda \cdot)} \right) G_h \right\|_p \\ &\leq c \|G_h\|_p \leq \frac{cn}{\lambda} \int_0^{\lambda/n} \|\Delta_t^{(\theta)} f(x)\|_p dt \leq c\omega_\theta(f, \lambda n^{-1})_p, \end{aligned}$$

что влечет (5). Теорема 1 доказана.

Отметим, что в силу (21) оценка (5) заведомо выполняется для $\lambda > \|\tau\|_C$. Если же θ -модуль удовлетворяет условию

$$\omega_\theta(f, 2\delta)_p \leq c\omega_\theta(f, \delta)_p, \quad f \in L_p, \quad \delta \geq 0, \quad (33)$$

где положительная постоянная c не зависит от f и δ , то (5), очевидно, оказывается справедливым при любом $\lambda > 0$.

Обсудим теперь некоторые приложения теоремы 1. В частности, теорема 1 позволяет немедленно получать оценки типа Джексона для уже известных модулей гладкости. В качестве примера рассмотрим модули $\omega_\alpha(f, \delta)_p$ и $\omega_{\langle \cdot \rangle}(f, \delta)_p$, для которых прямые теоремы были доказаны, каждая своим специальным методом, соответственно в работах [2] и [3].

ТЕОРЕМА 2. Для $1 \leq p \leq +\infty$ и $\alpha > 0$ справедливы неравенства

$$E_n(f)_p \leq c\omega_\alpha(f, (n+1)^{-1})_p, \quad f \in L_p, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (34)$$

$$E_n(f)_p \leq c\omega_{\langle \cdot \rangle}(f, (n+1)^{-1})_p, \quad f \in L_p, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (35)$$

в которых положительные постоянные c_1 и c_2 не зависят от f и n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\theta_\alpha(\xi) = -(1 - e^{i\xi})^\alpha,$$

где $z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}$, $-\pi < \arg z \leq \pi$ и рассмотрим функцию

$$\Theta_\alpha(\xi) = \frac{\theta_\alpha(2\xi)}{\theta_\alpha(\xi)} = (1 + e^{i\xi})^\alpha.$$

Покажем, что θ_α принадлежит $\mathcal{G}$, а $\Theta_\alpha(\cdot) - 2^\alpha$ принадлежит $\mathbb{G}$. Ясно, что в доказательстве нуждается только абсолютная сходимость рядов, состоящих из соответствующих коэффициентов Фурье. Для $\alpha \in \mathbb{N}$ это утверждение очевидно, так как наборы коэффициентов Фурье обеих функций конечны. Пусть теперь $\alpha \notin \mathbb{N}$. Принимая во внимание, что для $\nu \geq [\alpha] + 2$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \theta_\alpha^\wedge(\nu) &= \operatorname{sgn}(-1)^{\nu+1} \binom{\alpha}{\nu} = \frac{\operatorname{sgn}(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \prod_{j=0}^{[\alpha]} (\alpha - j) \prod_{j=[\alpha]+1}^{\nu-1} (\alpha - j) \\ &= (-1)^{\nu+1} (-1)^{\nu-1-[\alpha]} = (-1)^{[\alpha]}, \end{aligned}$$

а также

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \theta_\alpha^\wedge(\nu) = \theta_\alpha(0) = 0,$$

немедленно получаем, что последовательность $\theta_\alpha^\wedge$ принадлежит l_1 и, тем самым, $\theta_\alpha \in \mathcal{G}$. Отсюда с учетом того, что $|\Theta_\alpha^\wedge(\nu)| = |\theta_\alpha^\wedge(\nu)|$ для всех $\nu \in \mathbb{N}$, вытекает принадлежность функции $\Theta_\alpha(\cdot) - 2^\alpha$ классу $\mathbb{G}$. Обозначая θ_α -разность символом $\Delta_h^{(\alpha)}$, на основании (6) и леммы 1 (см. (10)) имеем

$$\Delta_{2h}^{(\alpha)} = A_{h^{-1}}(\Theta_\alpha) \circ \Delta_h^{(\alpha)}.$$

Применяя теперь лемму 1 (см. (8)) к функции $\Theta_\alpha(\cdot) - 2^\alpha$, получаем для $f \in L_p$ и $h \geq 0$

$$\|\Delta_{2h}^{(\alpha)} f(x)\|_p \leq \|A_{h^{-1}}(\Theta_\alpha)\|_{(p)} \|\Delta_h^{(\alpha)} f(x)\|_p \leq \|\Theta_\alpha^\wedge\|_{l_1} \|\Delta_h^{(\alpha)} f(x)\|_p$$

и, тем самым, выполнение неравенства (33). Теперь оценка (34) немедленно вытекает из теоремы 1.

Для доказательства неравенства (35) достаточно заметить, что для

$$\theta(\xi) = -\frac{2}{\pi}|\xi|, \quad \xi \in [-\pi, \pi],$$

функция $\Phi(\xi)$ не равна 0 для всех $\xi \neq 0$, и применить теорему 1.

Другое возможное приложение теоремы 1 связано с задачей описания классов

$$\mathcal{E}_p^\eta = \{f \in L_p : E_n(f)_p = O(\eta(n)), n \rightarrow +\infty\},$$

где η – некоторая положительная непрерывная убывающая к нулю на $[t_0, +\infty)$, $t_0 > 0$, функция, в терминах структурных характеристик функции. Хорошо известно (см., например, [1; гл. 7]), что для $1 \leq p \leq +\infty$ и $k \in \mathbb{N}$

$$E_n(f)_p = O(n^{-\alpha}), \quad n \rightarrow +\infty, \quad \Longleftrightarrow \quad \omega_k(f, \delta)_p = O(\delta^\alpha), \quad \delta \rightarrow +0, \quad (36)$$

только если $\alpha < k$, а в случае $\alpha \geq k$ для эквивалентного описания соответствующих классов $\mathcal{E}_p^\alpha \equiv \mathcal{E}_p^\eta$, $\eta(t) = t^{-\alpha}$, требуются модули гладкости более высоких порядков. Таким образом, в терминах классических структурных величин не удастся единообразно охарактеризовать всю шкалу $\{\mathcal{E}_p^\alpha, \alpha > 0\}$.

Оказывается, что конструкция (2) в совокупности с теоремой 1 позволяет не только дать новое универсальное описание классов $\mathcal{E}_p^\alpha$, пригодное для всех $\alpha > 0$, но и решить более общую задачу, в которой функция η не обязательно является степенной. Для этих целей введем в рассмотрение величину ($f \in L_p, \delta \geq 0$)

$$\tilde{\omega}(f, \delta)_p = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left\| \frac{8}{\pi^2} \sum_{\nu \neq 0} \frac{\cos(\pi\nu/2) + (-1)^{|\nu|+1}}{|\nu|^2} f(x + \nu h) - f(x) \right\|_p. \quad (37)$$

Непосредственным вычислением нетрудно убедиться в том, что $\tilde{\omega}(f, \delta)_p$ является θ -модулем, порожденным 2π -периодической вещественнозначной четной функцией θ , которая определяется на интервале $[0, \pi]$ формулами

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{8}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \xi \right), & \frac{\pi}{2} < \xi \leq \pi. \end{cases} \quad (38)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 \leq p \leq +\infty$, а положительная непрерывная убывающая к нулю на $[t_0, +\infty)$ для некоторого $t_0 > 0$ функция η удовлетворяет условию

$$\eta(t) \leq c\eta(2t), \quad t \geq t_0, \quad (39)$$

где положительная постоянная c не зависит от t . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $E_n(f)_p = O(\eta(n)), n \rightarrow +\infty$;
- 2) $\tilde{\omega}(f, \delta)_p = O(\eta(\delta^{-1})), \delta \rightarrow +0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (38) вытекает, что функция θ принадлежит классу $\mathcal{G}$, является абсолютно непрерывной и, при этом, $\Phi(\xi) \neq 0$ для $|\xi| > \pi/2$. Следовательно, на основании теоремы 1

$$E_n(f)_p \leq c\tilde{\omega}(f, \pi(n+1)^{-1})_p, \quad f \in L_p, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (40)$$

где положительная постоянная c не зависит от f и n .

Пусть φ – четная бесконечно дифференцируемая функция такая, что $\varphi(\xi) = 1$ для $|\xi| \leq 1$ и $\varphi(\xi) = 0$ для $|\xi| \geq \pi/2$. Применяя лемму 2 (см. (14)), получаем для $f \in L_p$ и $T \in \mathcal{T}_{[\sigma]}$ с учетом (6)

$$\begin{aligned} \|A_\sigma(1 - \varphi(\cdot))(f)\|_p &= \|A_\sigma(1 - \varphi(\cdot))(f - T)\|_p \leq \|A_\sigma(1 - \varphi(\cdot))\|_{(p)} \|f - T\|_p \\ &\leq (1 + (2\pi)^{-1} \|\widehat{\varphi}\|_{L_1(\mathbb{R})}) \|f - T\|_p. \end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к точной нижней грани по всем $T \in \mathcal{T}_{[\sigma]}$, имеем

$$\|A_\sigma(1 - \varphi(\cdot))(f)\|_p \leq (1 + (2\pi)^{-1} \|\widehat{\varphi}\|_{L_1(\mathbb{R})}) E_{[\sigma]}(f)_p, \quad f \in L_p, \quad \sigma > 0. \quad (41)$$

Отметим также, что в силу (38)

$$\theta(\xi) = (1 - \varphi(\xi))\theta(\xi)$$

для всех вещественных ξ . Отсюда с учетом леммы 1 (см. (10)) получаем

$$\Delta_h^{(\theta)} = A_{h^{-1}}(\theta) = A_{h^{-1}}(\theta) \circ A_{h^{-1}}(1 - \varphi(\cdot)) = \Delta_h^{(\theta)} \circ A_{h^{-1}}(1 - \varphi(\cdot))$$

для $h \geq 0$, что влечет на основании леммы 1 (см. (8))

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^{(\theta)} f(x)\|_p &\leq \|\Delta_h^{(\theta)}\|_{(p)} \|A_{h^{-1}}(1 - \varphi(\cdot))(f)\|_p \\ &\leq \|\theta^\wedge\|_{l_1} \|A_{h^{-1}}(1 - \varphi(\cdot))(f)\|_p, \quad f \in L_p, \quad h \geq 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Комбинируя (41) и (42) окончательно получаем

$$\tilde{\omega}(f, n^{-1})_p \leq c \sup_{0 \leq h \leq n^{-1}} E_{[h^{-1}]}(f)_p = cE_n(f)_p, \quad f \in L_p, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (43)$$

где положительная постоянная c не зависит от f и n .

Теперь утверждение теоремы немедленно следует из (39), (41) и (43).

В заключение отметим, что условию (39), помимо степенной, удовлетворяет, например, и функция

$$\eta(t) = t^{-\alpha} \log^\gamma t, \quad \text{где } \alpha > 0, \quad \gamma \in \mathbb{R} \quad \text{или} \quad \alpha = 0, \quad \gamma < 0.$$

Применяя для нее теорему 3, получаем следующую эквивалентность:

$$E_n(f)_p = O(n^{-\alpha} \log^\gamma n), \quad n \rightarrow +\infty \iff \tilde{\omega}(f, \delta)_p = O\left(\delta^\alpha \log^\gamma \left(\frac{1}{\delta}\right)\right), \quad \delta \rightarrow +0.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Grundlehren Math. Wiss., **303**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [2] М. К. Потапов, Б. В. Симонов, “Модули гладкости положительных порядков функций из пространств L_p , $1 \leq p \leq +\infty$ ”, *Современные проблемы математики и механики*, Тр. мех.-матем. фак-та МГУ, **7**, № 1, Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, М., 2011, 100–109.
- [3] K. Runovski, H.-J. Schmeisser, *On Modulus of Continuity Related to Riesz Derivative*, Preprint, Friedrich-Schiller-Universität Jena, 2011.
- [4] К. В. Руновский, *Приближение семействами линейных полиномиальных операторов*, Дис. . . . докт. физ.-матем. наук, МГУ, М., 2010.
- [5] V. Rukasov, K. Runovski, H.-J. Schmeisser, “Approximation by families of linear polynomial operators and smoothness properties of functions”, *Math. Nachr.*, **284**:11–12 (2011), 1523–1537.
- [6] E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Math. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
- [7] P. L. Butzer, R. J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation*. Vol. 1. *One-Dimensional Theory*, Pure Appl. Math., **40**, Acad. Press, New-York, 1971.
- [8] K. Runovski, H.-J. Schmeisser, “Methods of trigonometric approximation and generalized smoothness. I”, *Eurasian Math. J.*, **2**:3 (2011), 98–124.

К. В. Руновский

Черноморский филиал Московского
государственного университета
им. М. В. Ломоносова, г. Севастополь
E-mail: k_runov@mail.ru

Поступило

07.06.2013

Исправленный вариант

02.11.2013